

新生根

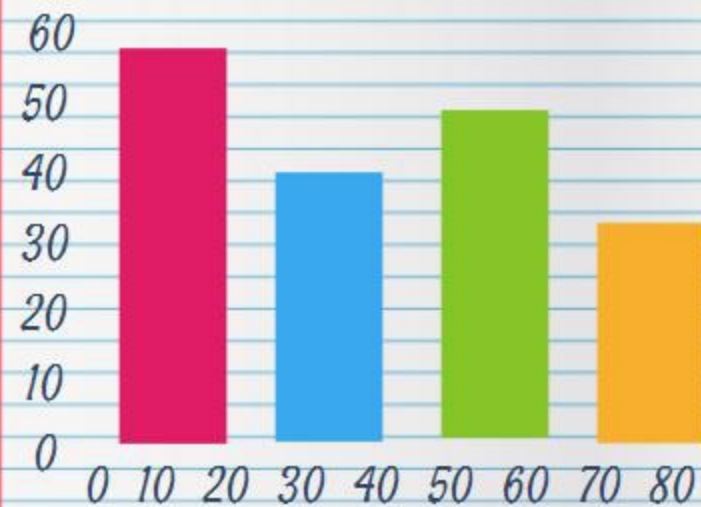
# 從等級概念發展 到指數與對數

弘文高中 廖寶貴 林坤樑  
報告



# 話說從頭

與生根的因緣際會



透過指數的定義方式，太過於抽象與形式化，是無法帶給學生任何的啟示

# 以往 對數介紹

採行十八世紀數學家尤拉所下的定義：

給定一個正數當作底數，則一個數的對數，就是這個底數的次方與這個數相等時的指數/指標(index)(按：以現在的數學符號表示，就 $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$ )



# 弘文是雙前導學校

課程領先規劃

十二年國民基本教育課程綱

要 國民中小學暨普通型高級

中等學校

數學領域

### 三、教學實施

(十四) 教師在教學過程中可適當介紹數學史、民族數學及數學家，引發學生興趣、培養其欣賞數學發展的素養，但不可將這些內容納入評量。

# 數學史

18 世紀法國數學家拉普拉斯曾經說過：「納皮爾發明了對數，透過對數的計算，天文學家可以大幅縮短計算的時間，不僅節省了工作的時間，更是延長了天文學家的壽命。」



對數的創始人為納皮爾（John Napier, 1550-1617.4.4, 蘇格蘭），那時指數的概念尚未完成，也無指數符號，納皮爾本人亦不知"底"為何物。一直到尤拉，才發現指數與對數的天然關係。現在我們學習對數之前，必先研習指數，但在數學史上，對數的建立先於指數，大概是一般人想像不到的吧！納皮爾不從指數出發，那他是怎樣得到對數的概念呢？原來他是從幾何數列和算術數列之間的關聯為基礎，來發展出對數。不過他所發展出的對數，一般稱納皮爾對數，和自然對數並不同，兩者不可混為一談。

# 契機出現

辦理主題增能工作坊，協助支持教師系統性增能



**CA**  
初次見面去年  
九月份談插值  
多項式

11月再邀觀課三  
部曲談指對數



科內反應很好



# 指對數函數

利用**CA**傳授的晉級方式表達

## 教學活動一

### 複習國中的 科學記號

例：以科學記號表示下列各數。

(1) 3500000000

(2) 0.000000035

解：(1) 3500000000

(2) 0.000000035

=  $35 \times 100000000$

=  $35 \times 0.000000001$

=  $35 \times 10^8$

=  $35 \times 10^{-9}$

=  $3.5 \times 10 \times 10^8$

=  $3.5 \times 10 \times 10^{-9}$

=  $3.5 \times 10^9$

國中時期曾經學習過科學記號的轉換，科學記號的用意是為了書寫巨大數據或超微小數據時能將其簡化。



## 等級轉換

科學記號  $3456789=3.\sim \times 10^6$  為什麼我們寫 $3.\sim$  而不寫 $345.\sim \times 10^4$  ?

舉例：把5000元的老爺車能說成是0.00005千萬的跑車嗎？

(謎之音：CA舉的例子直接拿來套用)

$3.\sim \times 10^6$ 前面這個數字  $3.\sim$  表示是這個等級 $10^6$ 的  $3.\sim$ 倍，**這個不是換單位**

**練習**  $2 \times 10^8$   $10^8$ 我們說這個數字在第8等級

$12 \times 10^8$  有12個 $10^8$ 這個等級，我們應該要把它晉級，晉級到 $1.2 \times 10^9$

這個等級

$0.23 \times 10^8$  這個數字真的有達到10的8次方這個等級嗎？沒有，真的

要講要降級，降到 $2.3 \times 10^7$

**CA語錄：數字用等級表示，等級回應數字**

# 筆記 學習單

透過觀察科學記號，引導學生判斷科學記號是以10為基底在運作，並且能思考以10為基底的理由是因為我們平時的計數習慣是10進位，並且能說出十進位的晉級方式(遇10進位)



# 課堂發問

剛才講到  
達到 10 晉級，它晉級要乘以 10。  
那降級呢？  
除以 10（也就是  $\times \frac{1}{10}$ ）就降級。  
再來看  $a$  這個數，降級就是  $\times \frac{1}{a}$   
有沒有哪一個數字例外？



接著以其他  
數字為基底  
嘗試不同的  
進位方式

1. 以 5 為基底：

5 進位後為 1 級

24 進位後超過 1 及但是未滿 2 級

125 進位後為 3 級

判斷方式，考慮若所需判斷的數值介於  $5^a$  及  $5^b$  之間  
的話，則是超過 a 級且未滿 b 級

2. 以 2 為基底：

2 進位後為 1 級

24 進位後超過 4 及但是未滿 5 級

128 進位後為 7 級

判斷方式，考慮若所需判斷的數值介於  $2^a$  及  $2^b$  之間的  
話，則是超過 a 級且未滿 b 級

CA語錄：高中以更自在的方式  
看數字的等級（不限定以10）



# 筆記 學習單

## 練習

- (1) 利用3為晉級標準找出100、200、500的等級
- (2) 利用4為晉級標準找出100、200、500的等級
- (3) 利用10為晉級標準找出100、200、500的等級



數字轉換等級

先決定  
晉級標準

例子

32這個數字，分別用10、5和2，  
三種不同晉級標準的表示

以10為晉級標準  $\Rightarrow 32 = 3.2 \times 10^1$

以5為晉級標準  $\Rightarrow 32 = \square \times 5^2$ ，

$\square = \frac{32}{25}$ ，也就是1.~

以2為晉級標準  $\Rightarrow 32 = 1 \times 2^5$

筆記  
學習單

檢視剛才自  
己所做的結  
果是否符合  
這個結論

2013

sunday

## 教學活動二

## 引入指數函數圖形



我們用數線來標示數字的等級 當我們標示  
 $0, 1, 5, 25$  我們想要用哪一個等級門檻來  
看數字? ※忽略數線單位長比例是為了方便畫圖



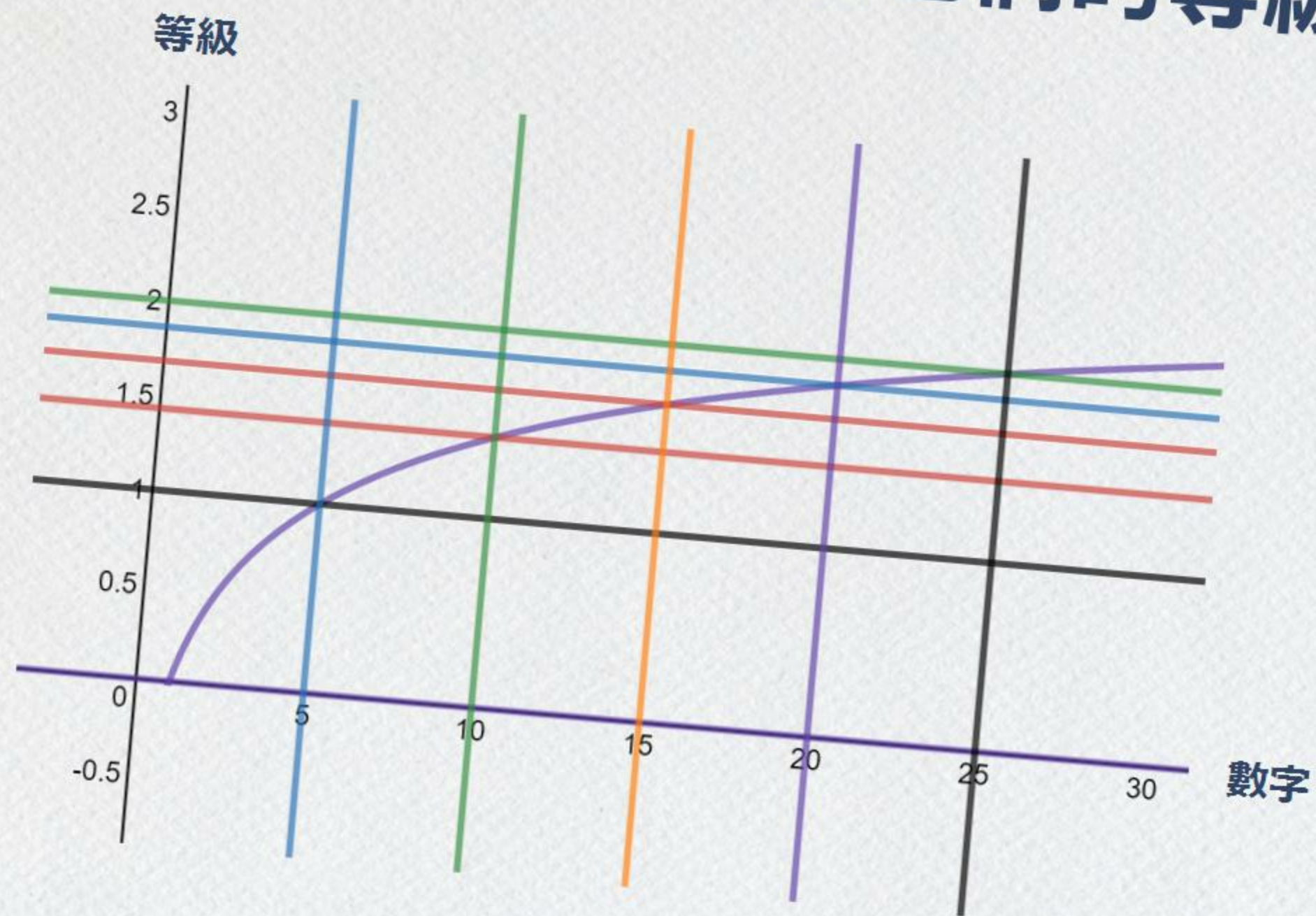
例子：試點出 1、5、10、15、20、25 的位置



用5當等級門檻 1的等級是0, 5的  
等級是1, 25的等級是2 如果數字  
在5和25之間, 那它的等級是1.~  
如果數字在1和5之間, 那它的等  
級就是0.~

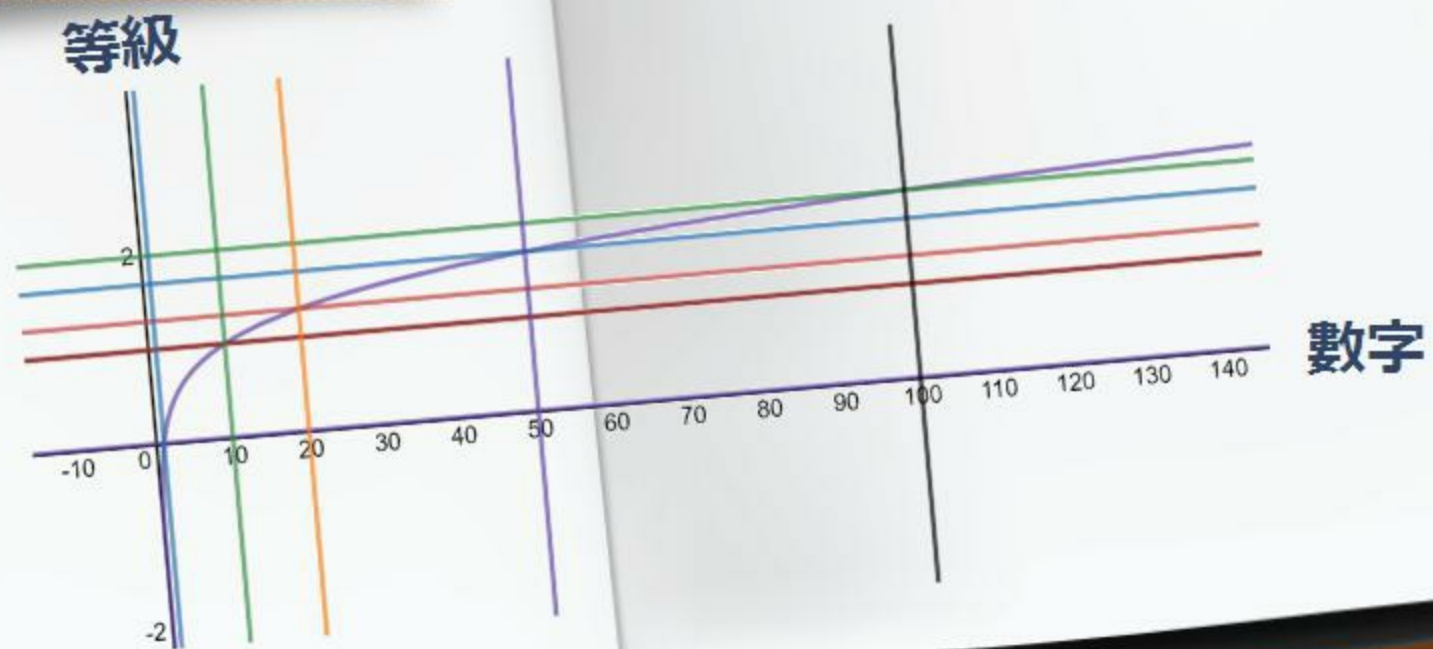


# 用不同的高度來標示它們的等級

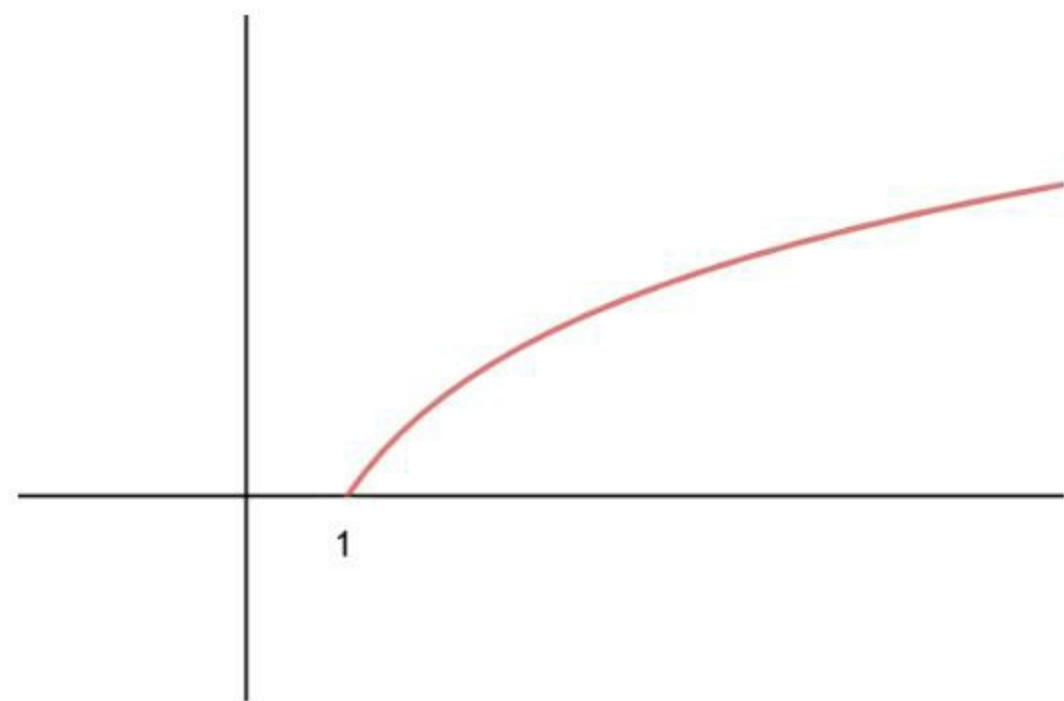


筆記  
學習單

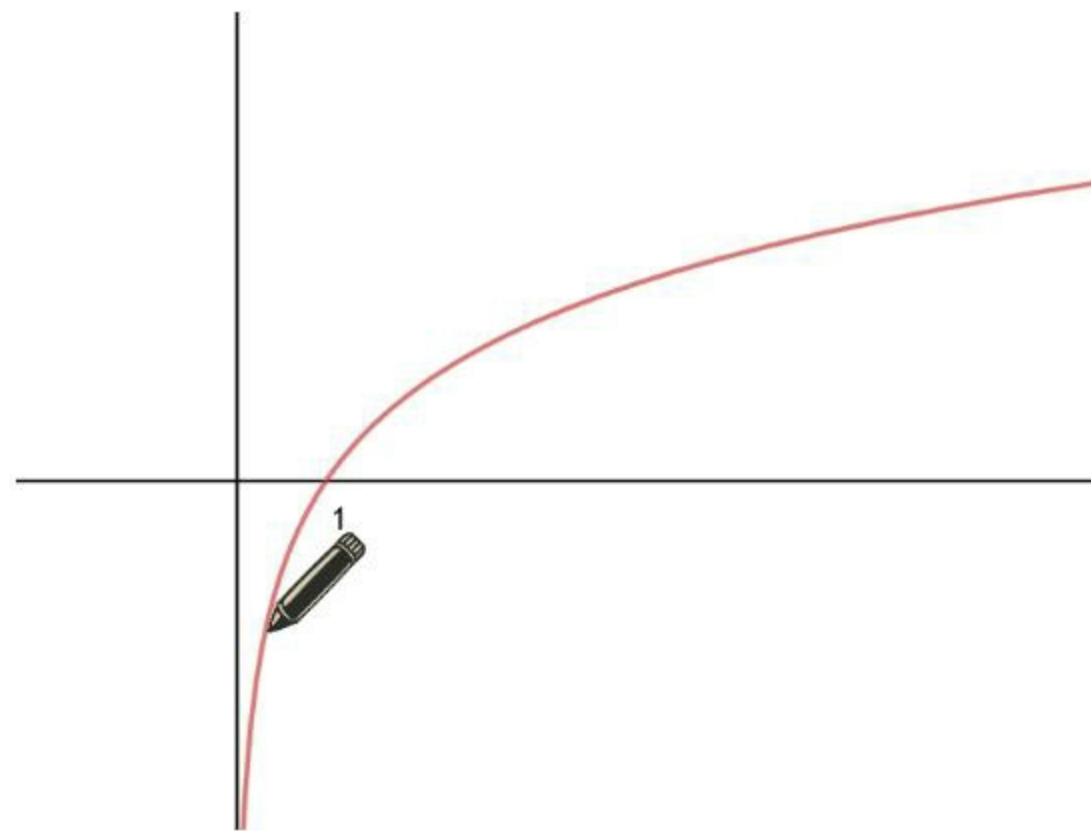
試畫出以10為晉級單位  
數  
字1, 10, 20, 50, 100  
的等級圖



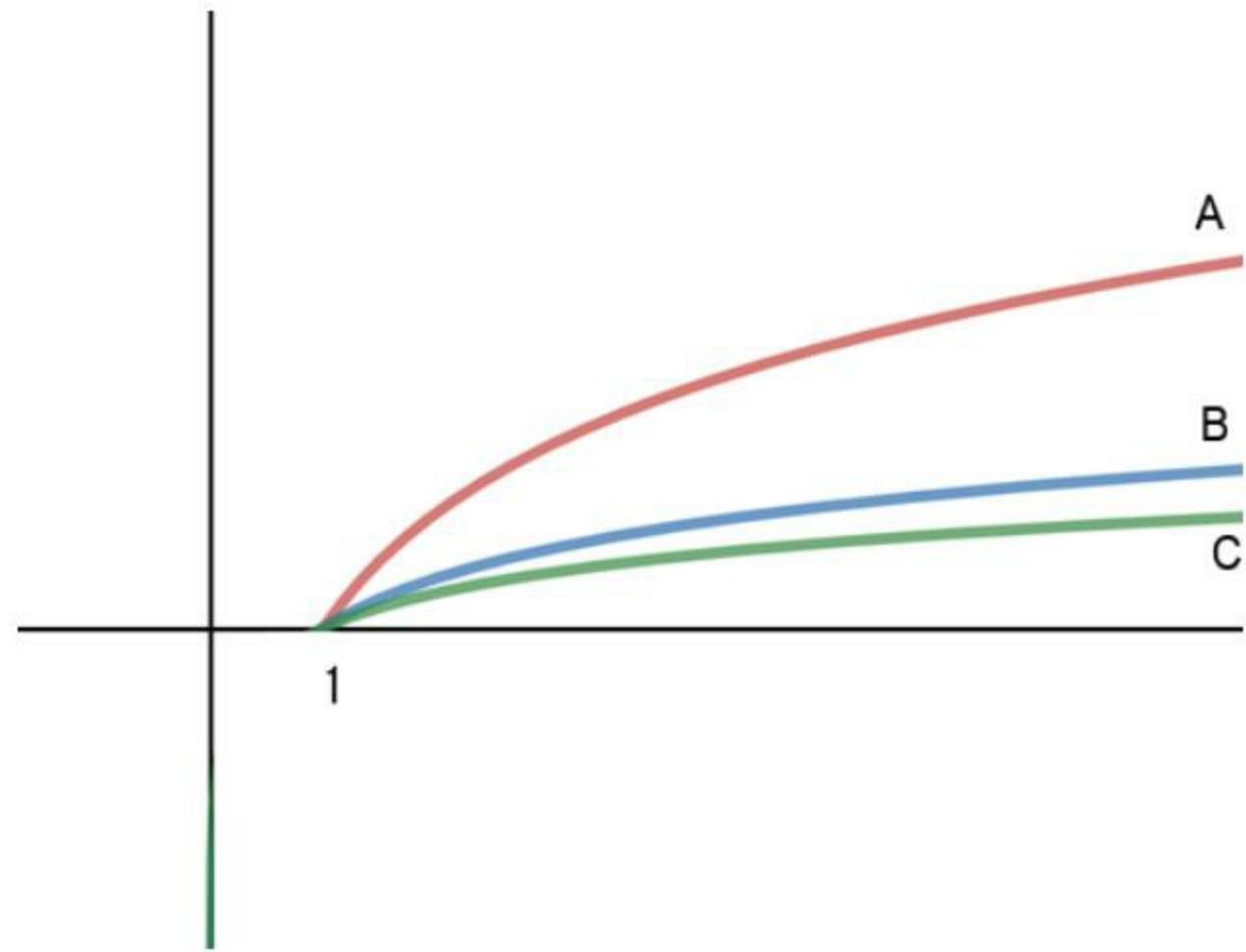
由圖可看出晉級標準  
大於1



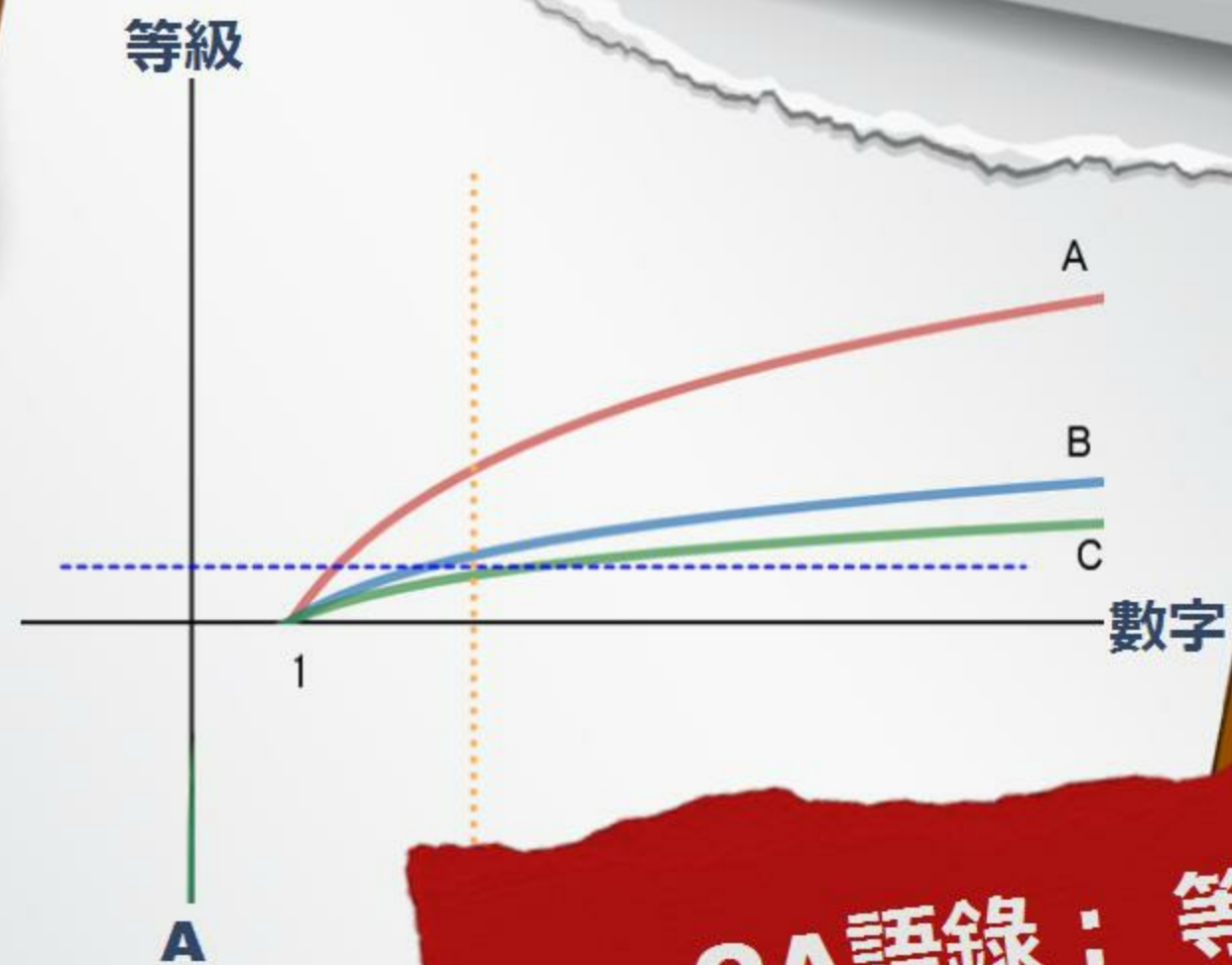
數字比1小時，它的等級  
變成負的，圖形順勢畫下  
來即可



觀察**A**、**B**、**C**三個圖形，比較它們晉級標準的大小



# 晉級標準



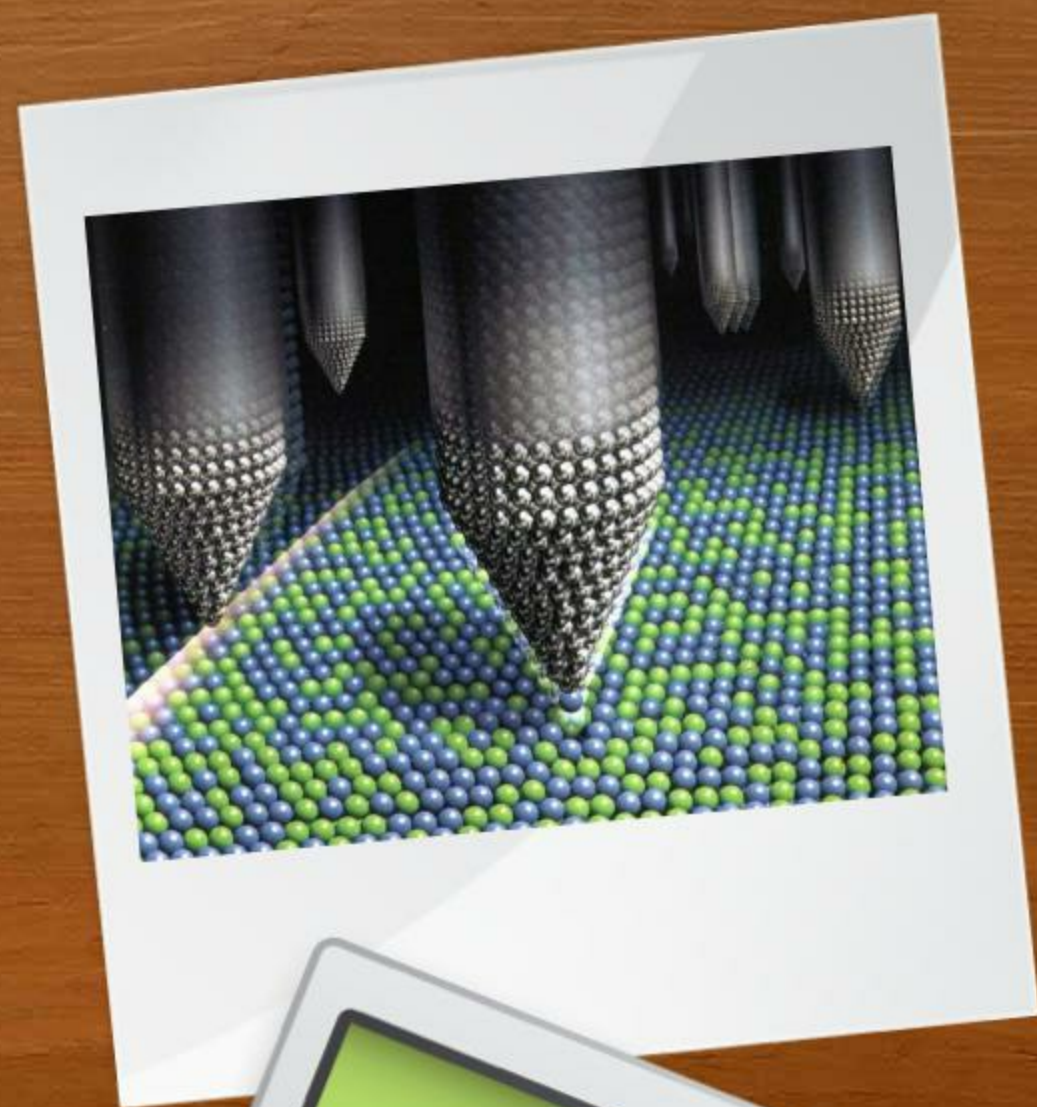
**CA語錄：** 等級相同時，晉級標準大，不容易晉級；數字相同時晉級標準小，愈容易晉級



# 課堂提問

是否數字愈大  
等級就會愈高？

或者說什麼時候數字  
愈小等級愈高呢？



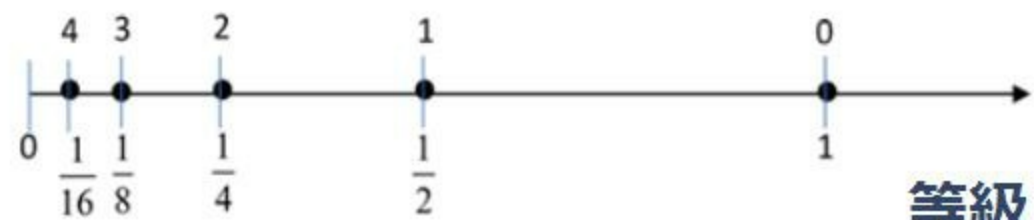
# 精密工業



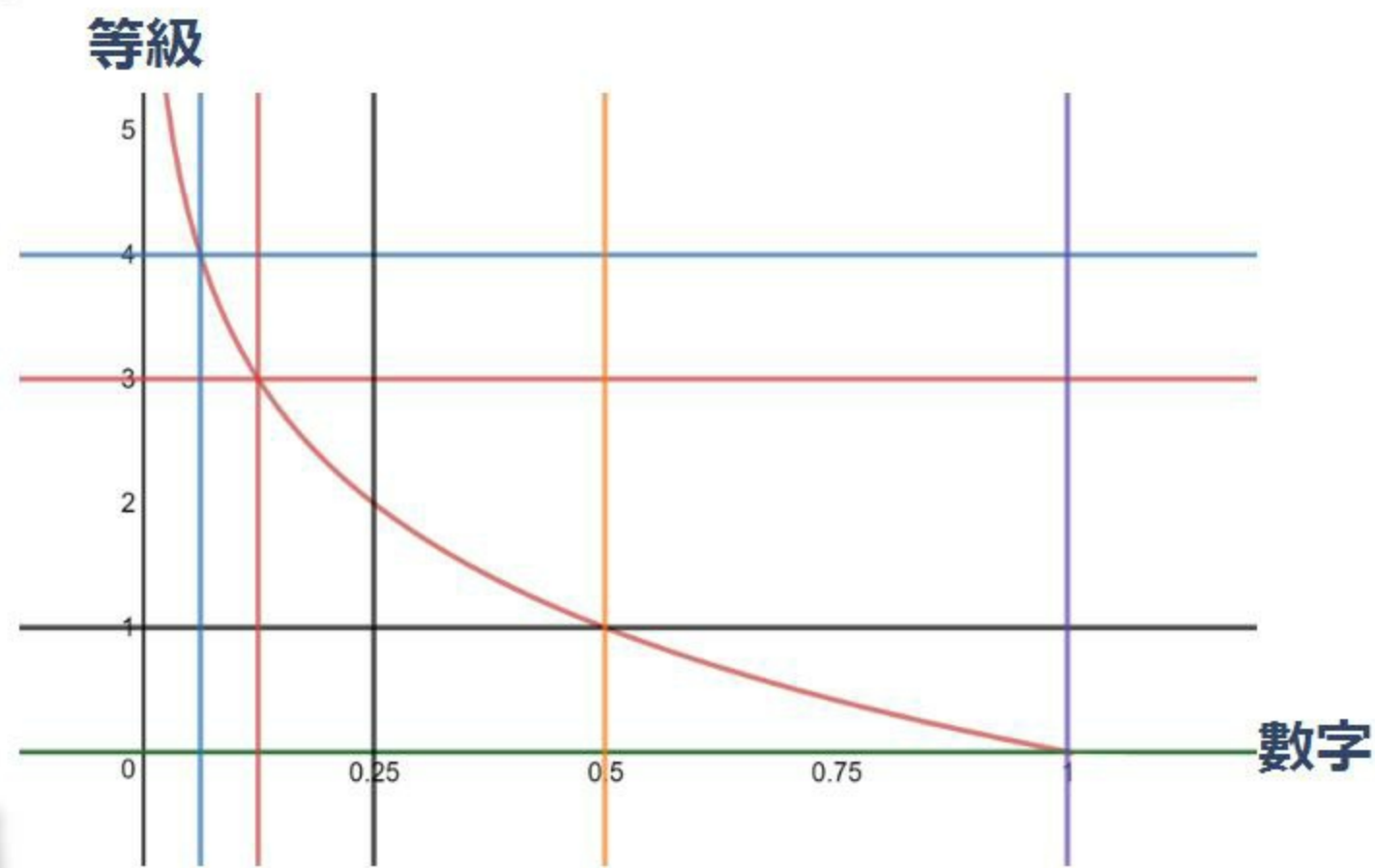
能做出愈小的愈厲害也愈強



# 同理複製先前的方式

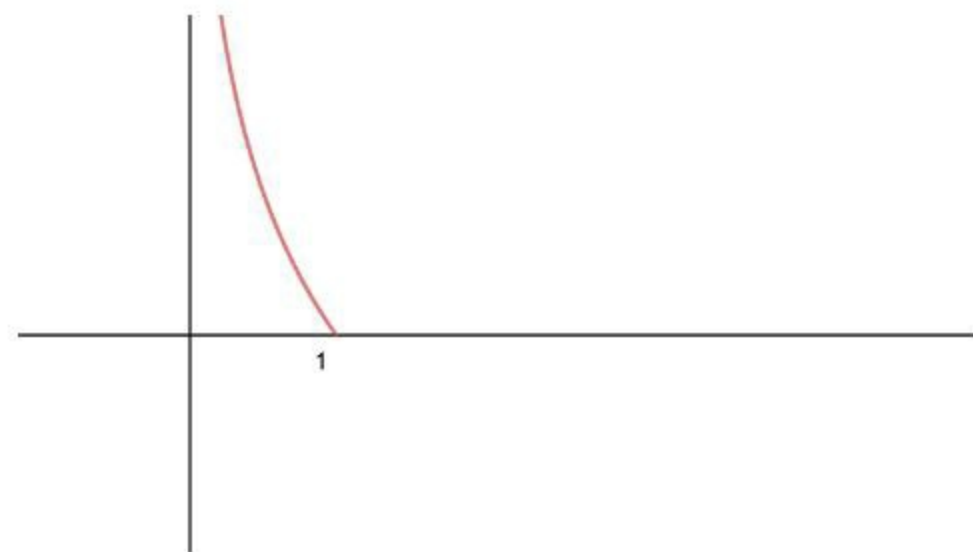


試畫出以  $\frac{1}{2}$  為晉級單位  
數字 1,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{16}$   
的等級圖

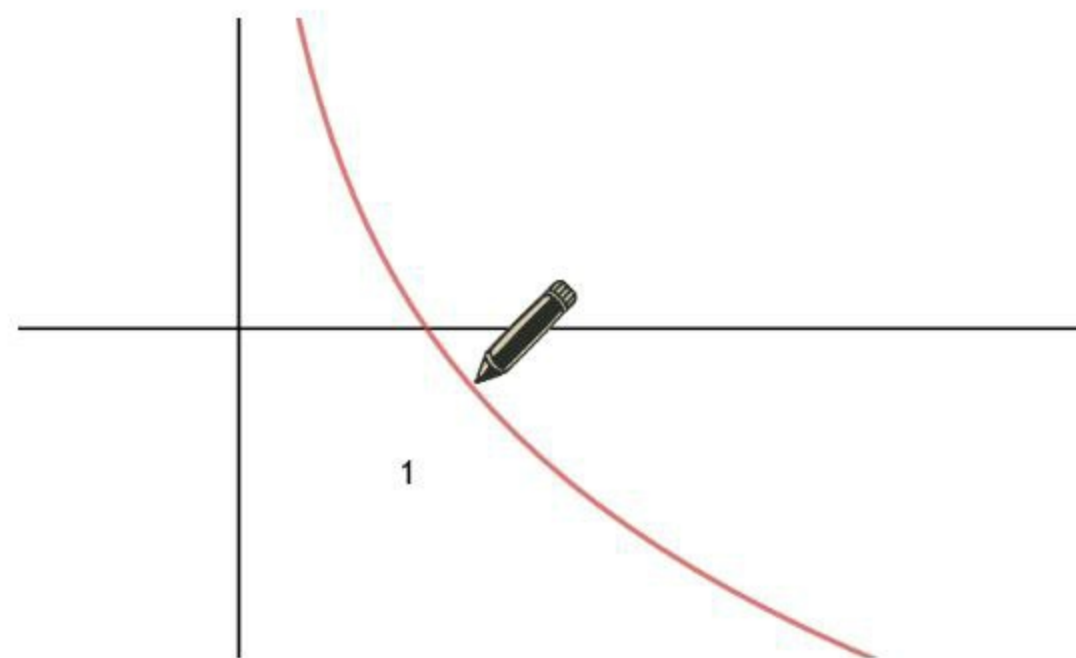


CA語錄：數字愈小，等級愈高

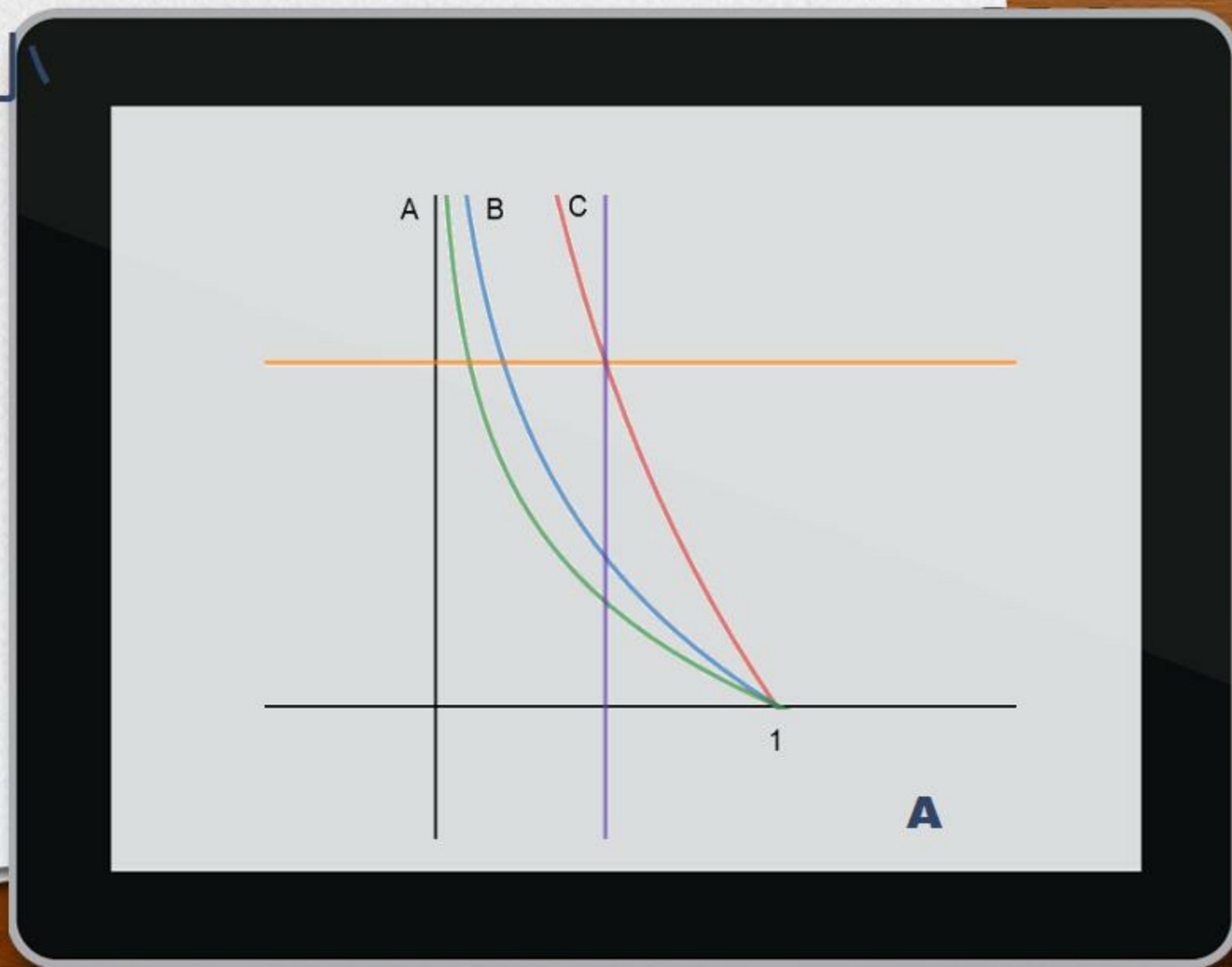
由圖可看出晉級標準  
小於1



數字比1大時，它的等級  
變成負的，圖形順勢畫下  
來即可



觀察**A**、**B**、**C**三個圖形，比較它們晉級標準的大小



# 教學活動三

## 對數符號 的引入

### 對數函數

$$\text{等級} = \log_{\substack{\text{晉級} \\ \text{標準}}} \text{數字}$$

"以 2 為晉級標準，16 的等級是 4"  $\Leftrightarrow 4 = \log_2 16 \Leftrightarrow 2^4 = 16$

"以 5 為晉級標準，125 的等級是 3"  $\Leftrightarrow 3 = \log_5 125 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

"以  $\frac{1}{3}$  為晉級標準， $\frac{1}{9}$  的等級是 2"  $\Leftrightarrow 2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

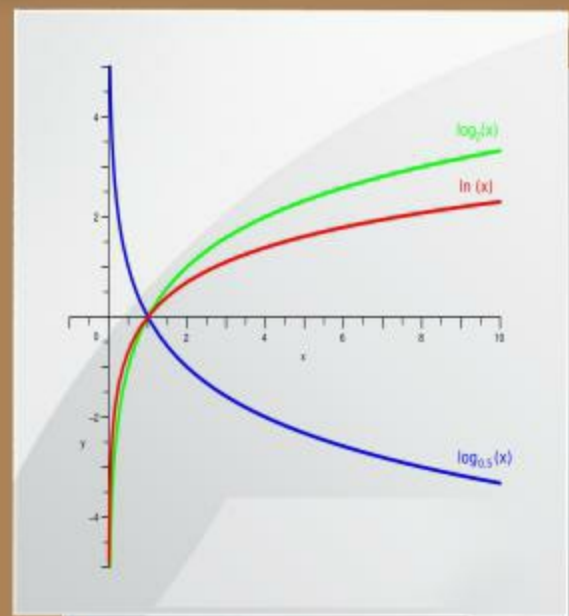
結合前面等級概念及上述例子，能引導學生做出

5

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

**這個結論**

# 筆記 學習單



求出下列各式的  $x$  值

(1)  $\log_{\sqrt{2}} x = 0$

(2)  $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{1}{2}$

(3)  $\log_{\sqrt{2}} x = -2$

(4)  $\log_x 49 = 2 \quad (x > 0)$

(5)  $3^x = 7$



## CA語錄：統整結論

對於數字，不同教育階段的學生應有不同的感知與發展，從不同的數字表徵方式來得知數字的大小並操作數字的四則運算。

國小  $\Rightarrow$  依數字位數的長短（位址、位值、單位），將數字書寫下來，寫愈長數字愈大；或者將數字讀出來，從讀出的單位可知道數的大小。

國中  $\Rightarrow$  將數字以科學記號  $a \times 10^n$ （ $1 \leq a < 10$ ,  $n$ 為整數）表徵，以10進位的指數型態感受數字的大小，或者，我們說以10為晉級門檻，依等級的 $10^n$ 小來看數字的大小。

高中  $\Rightarrow$  用對數函數  $\log_a x$ ，來看數字 $x$ ，以 $a$ 為晉級門檻（基底）時的等級，且透過函數圖形，觀察同晉級標準（基底）之下，數字變動時的等級變化；不同晉級標準（基底）之下，數字變動時晉級的難易程度。

聽聽同學的現  
身說法吧!

ACTION!

When? Why? How? WHERE? WHEN? What? HOW? Why? WHAT? Why? When?  
WHAT? WHERE? When? HOW? WHO? WHY? When? WHAT? Why? When?  
When? WHO? WHERE? WHEN? WHAT? Why? When? WHAT?  
WHERE? WHO? WHERE? WHAT? WHEN? What? HOW?  
When? Why? HOW? where? Where? WHERE? When? What? What? WHERE? WHEN? WHY?  
Why? HOW? where? WHERE? When? What? What? WHERE? WHEN? HOW? When? WHY? When? HOW? WHAT? Why?

***THANK YOU  
FOR BEING HERE***

**感謝您的蒞臨指導**