



2018.01.07 生根期中分享會

從教學者到設計者

過程中解開學生迷思概念

與學習困難的實務經驗

新竹市數學輔導團

竹蓮國小 彭旭田老師

已讀 09:59

題目	課程圖	1.你的圖解 2-	他的圖解作法	畫式與計算
1. 內層有學生 204 人... 男生人數對女生人數的比是 5:7... 問有多少人?		1. 204 人 是 總 數 2. 5:7 的 比	1. 男生人數是女生的 5/7 倍 2. 女生人數是男生的 7/5 倍	
2. 內層有男生 120 人... 這班男女生人數的比是 5:7... 這班人數共幾人?		3. 120 人 是 男 生 4. 5:7 的 比		

透過畫線段圖 然後要學生做分析 題目的數字是整理量?還是部份量? 不然學常看到數字就亂做, 且比這邊都是出部份比部份

已讀 09:49 你看第四版的 跟溫老師的 是不是很類似

已讀 09:50 基本的學習單 設計 可以簡單練習 好上手 配合

嗯嗯^^ 沒錯。

一般老師習慣 拿人家學習單直接用, 要能從學習單看 你沒有 學習單怎能無縫接軌?

其實, 如果沒有您的解釋, 我也是一般老師。

我是看到很好的學習單, 直接使用。

我找到之前的盲點了。(為什麼學生不會寫的問題)

10:01

我拉部份與整體 到時就是回到幾分之幾來看 就和以前學過的分數倍來通用

比值就是被數關係, 男生和女生的比值就是男生人數是女生人數的2倍

不然高年級只有前向除以後向 對比值沒感覺

你也是看到不錯的學習單就是直接使用遇到學生不會寫的問題嗎嗎??  
 分析溫美玉老師學習單特色, 在字裡行間短言片語彭彭師說了什麼?  
 老師說他看懂了? 也找到盲點了? 學習單究竟要看什麼?

- 你是怎麼設計學習單??
- 你學校有數學社群嗎?
- 你一個人設計的學習單比我們學校社群共備的還要多!
- 單兵作戰模式



NO: 12 NAME: 曾郁珊

2016.11.14 異分母加法

## 五上單元為何去回到四年級分數單元？

算式 1	算式 2
$\frac{4}{8} + \frac{3}{8}$	$\frac{2}{4} + \frac{3}{8}$

任務 1 將上圖算式畫在下圖，觀察兩個算式相同處？與不同處？

	
相同處	不同處
<div style="border: 2px solid red; padding: 5px;">都是用 <math>\frac{1}{8}</math> 來用單位計算。</div>	一個用 $\frac{1}{4}$ 當單位，一個用 $\frac{1}{8}$ 當單位計算。


## 單元的整合VS單元獨立教學？

任務 2:

Q1:[難易分析]這兩題哪一題比較難???(難的原因是??簡單的原因是??)

Q2:哪一題"比較好算"?, 哪一題比較不好算??不好算的原因是??

Q3:要讓不好算的那題變成比較好算的這種題目, 你發現可以怎麼做??(可畫圖說明)

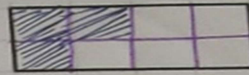
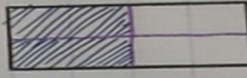
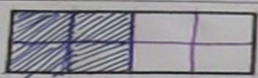
Q1	算式2, 因為2個分數單位都不同, 還要擴分, 比較難。但算式1都是同單位, 所以直接相加分子就可以了。
Q2	算式1好算, 算式2不好算, 因為算式1分母相加就好, 但算式2還要擴分才能計算, 比較麻煩, 所以算式1比較好算。
Q3	可以使用之前教的「擴分」來計算, 讓單位一樣, 例:  這樣就是同單位, 可以加減, 算式: $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

算式 1

$$\frac{4}{8} + \frac{3}{8}$$

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{8}$$

任務 1 將上圖算式畫在下圖，觀察兩個算式相同處？與不同處？



相同處

- 分母相同
- 區分界線一樣(都分成8格)

不同處

- 分母不一樣
- 區分界線不相同(一個是4,另一個是8)

任務 2:

Q1:[難易分析]這兩題哪一題比較難??(難的原因是??簡單的原因是??)

Q2:哪一題"比較好算"?, 哪一題比較不好算??不好算的原因是??

Q3:要讓不好算的那題變成比較好算的這種題目, 你發現可以怎麼做??(可畫圖說明)

Q1

簡單:算式 1, 分母一樣, 比較時很方便, 速度也很快。

難:算式 2, 分母不同, 算起來要先通分, 速度慢, 也很容易搞混。

Q2

好算:算式 1, 不需通分就可以直接加。

難算:算式 2, 需要先搞定分母(通分得)才能加起來。

Q3

使用通分


$$\frac{2}{4} + \frac{3}{8} \rightarrow \frac{4}{8} + \frac{3}{8} =$$

任務 2:

Q1:[難易分析]這兩題哪一題比較難???(難的原因是??簡單的原因是??)

Q2:哪一題"比較好算"?, 哪一題比較不好算??不好算的原因是??

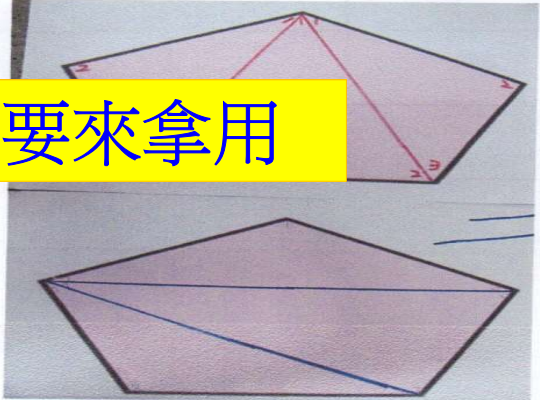
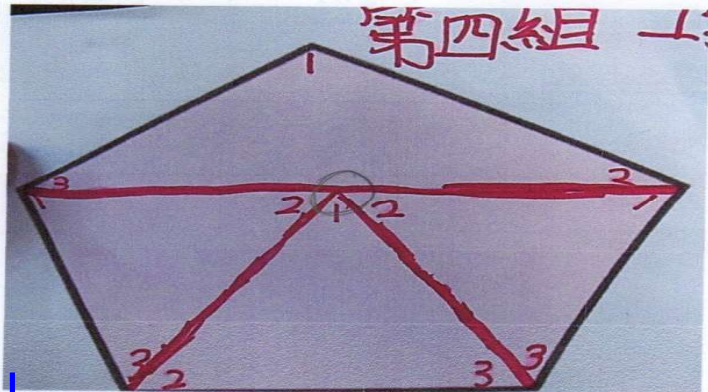

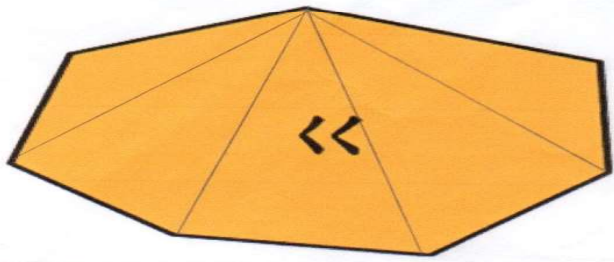
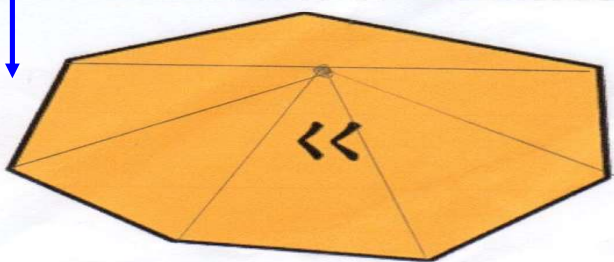
Q3:要讓不好算的那題變成比較好算的這種題目, 你發現可以怎麼做??(可畫圖說明)

Q1	算式2, 因為2個分數單位都不同, 還要擴分, 比較難。但算式1都是同單位, 所以直接相加分子就可以了。
Q2	算式1好算, 算式2不好算, 因為算式1分母相加就好, 但算式2還要擴分才能計算, 比較麻煩, 所以算式1比較好算。
Q3	可以使用之前教的「擴分」來計算, 讓單位一樣, 例:  這樣就是同單位, 可以加減, 算式: $\frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$

內角和切法的想法要能形成公式，能從四邊形能到五邊形...  
 可以從同樣的想法一職推論下去，課本切法的方式是？  
 可以出現怎樣的規律一直推論下去(四邊形能到五邊形...)

## 迷思概念澄清

學過的數學要來拿用

	課本的切法	某同學的方法
		 <p>第四組</p>
切法的方式分析	從某一個頂點切到另一個頂點	雖然都是三角型，可是有一些三角的頂點，對到...  ...所以那幾個三角型不算
切法的應用		

時間有限無法呈現學生數學日記想法

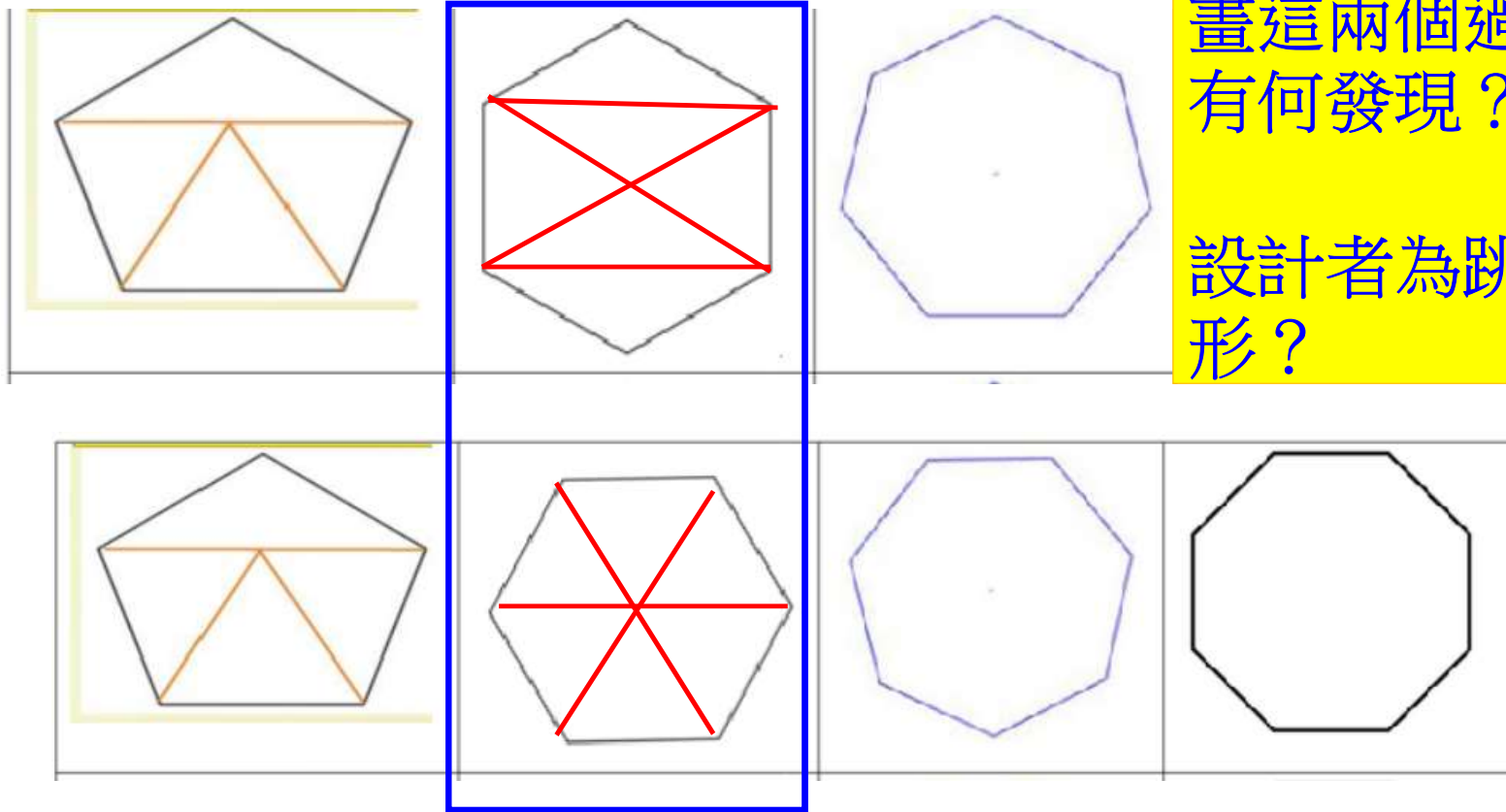
Q：五邊形畫完WHY不直接畫六邊形？

學生可能卡關的預測與模擬

畫畫看學生可能會怎麼畫？

畫這兩個過程中，有何發現？

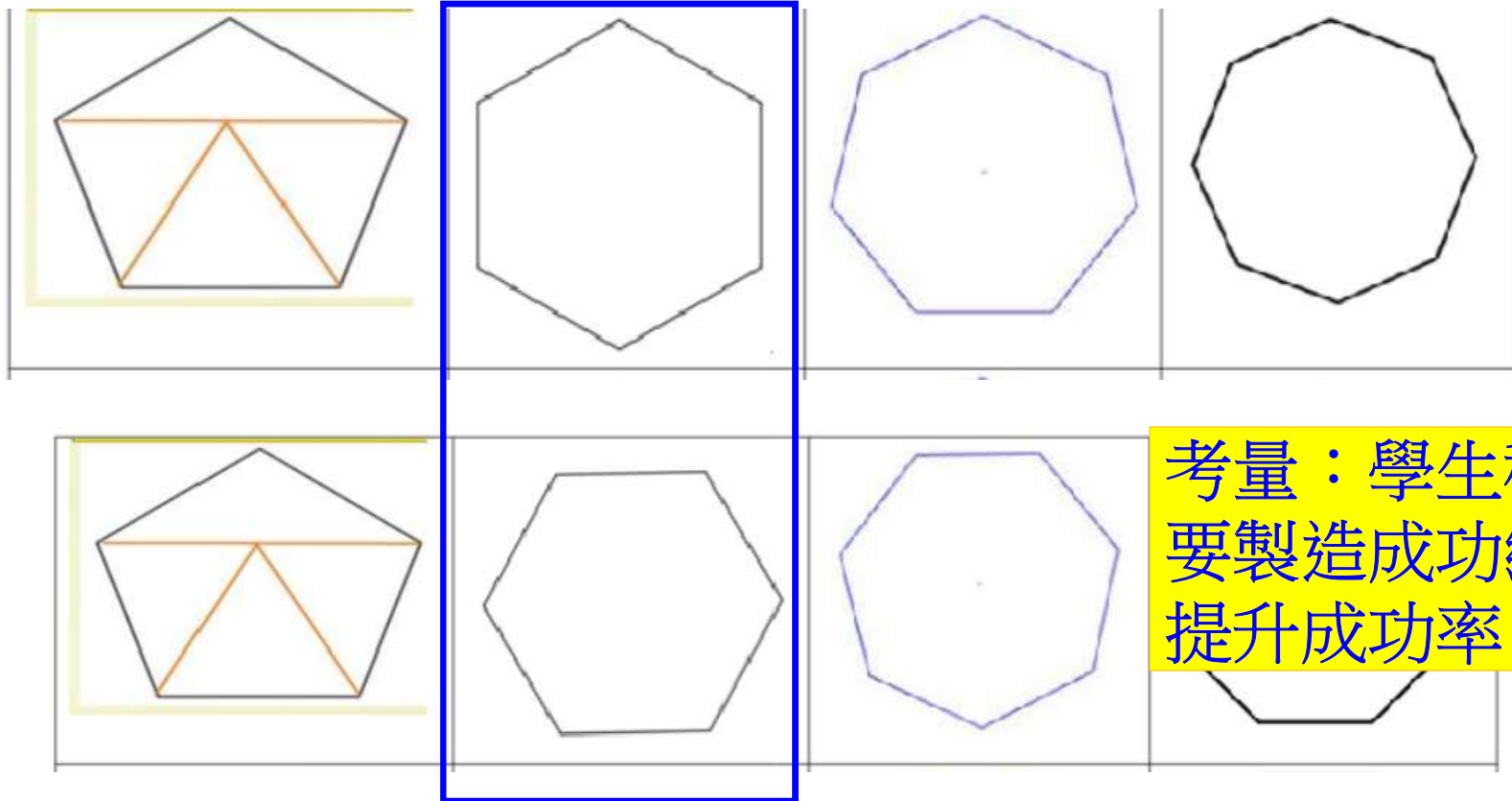
設計者為跳過六邊形？





學生可能卡關的預測與模擬

畫畫看學生可能會怎麼畫？



考量：學生程度弱  
要製造成功經驗  
提升成功率！

NO: 19 NAME: 劉郁臻

2017.10.18 比到比值與線段圖到算式

閱  
第 10.23

# 和課本有何不同？

題目

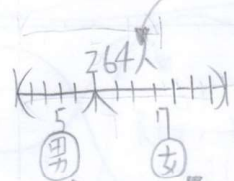
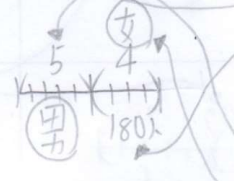
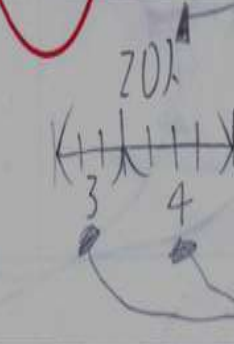

NO: 17 NAME: 黃建君

2017.10.18 比到比值與線段圖到算式

閱  
第 10.23

倍的描述用法

算式與計算

<p>1. 六年級有學生 264 人， 男生人數對女生 人數的比是 5:7， 男有多少人？</p>		<p>1. 264 人是整體量 2. 部分量：部分量</p>	<p>1. 男生人數是女生的 7 分之 5 倍 2. 女生人數是男生的 5 分之 7 倍</p>	<p><math>5+7=12</math> <math>264 \times \frac{5}{12} = 110</math> <math>264 \times \frac{7}{12} = 154</math></p>
<p>2. 六年級女生有 180 人， 男生人數對女生人數 比是 5:4， 男生有多少人？</p>		<p>1. 180 人是部分量 2. 部分量 部分量</p>	<p>1. 男生人數是女生人數的 5 倍 2. 女生人數是男生人數的 4 倍</p>	<p><math>180 \div 4 \times 5</math> <math>= 45 \times 5 = 225</math> <math>5:4 = \square:180</math> 男: <math>180 \times \frac{5}{4}</math></p>
<p>3. 六年忠班有 20 人， 近視與沒近視的比值是 3/4， 近視與沒有近視人數有幾人？</p>		<p>1. 20 人是整體量 2. 部分量 部分量</p>	<p>1. 近視人數是沒近視的 3 分之 4 倍 2. 沒近視人數是近視人數的 4 分之 3 倍</p>	<p><math>3+4=7</math> <math>20 \times \frac{3}{7} = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}</math> <math>20 \times \frac{4}{7} = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}</math> 近: 全 <math>\Rightarrow \square:20 = 3:(3+4)</math> 沒: 全 <math>\Rightarrow \square:20 = 4:(3+4)</math></p>
<p>近視與全班人數比值是 3/7</p>		<p>近: 全 <math>\Rightarrow \square:20 = 3:(3+4)</math></p>	<p>近: 全 <math>\Rightarrow \square:20 = 3:(3+4)</math></p>	<p><math>20 \times \frac{3}{7}</math></p>

# 為何要有線段圖？

題目	線段圖	分析說明	倍的描述用法	算式與計算
----	-----	------	--------	-------

女生是男生的5分之七倍  
男生是女生的七分之五倍

男生人數對女生  
人數的比是5:7  
男有多少人？

男生對女生人數  
比值是5/7

264人

1. 264人是整體量

2. 部分量:部分量

2. 女生人數是男生的5分之7倍

1. 男生人數是女生人數的5/7倍

2. 女生人數是男生人數的7/5倍

$180 \div 4 \times 5$

$= 45 \times 5 = 225$

$5:4 = \square:180$

男:  $180 \times \frac{5}{4}$

男 |-----| 1 (整体)

女 |-----|  $1 \frac{2}{5}, \frac{7}{5}$

基準量與比較量

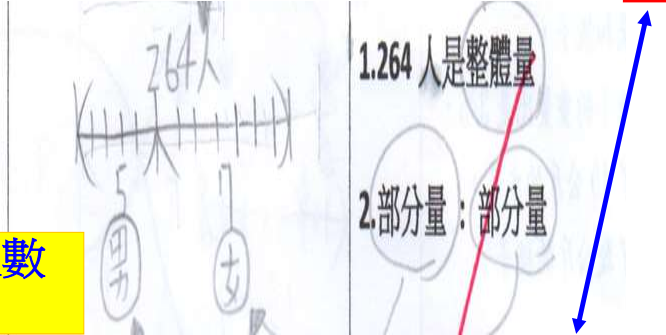
# 為何要有線段圖？

題目	線段圖	分析說明	倍的描述用法	算式與計算
----	-----	------	--------	-------

女生是男生的5分之七倍  
男生是女生的七分之五倍

男生人數對女生  
人數的比是5:7  
男有多少人？

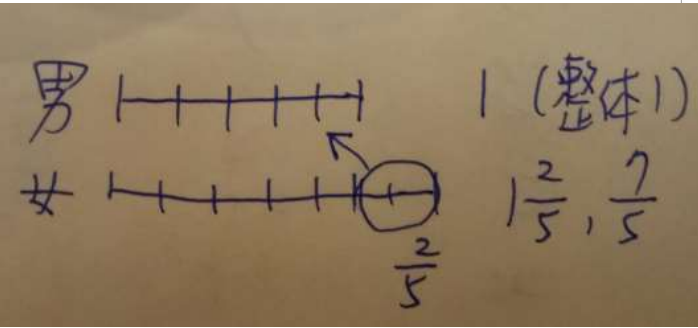
男生對女生人數  
比值是5/7



2. 女生人數是男生的5分之7倍

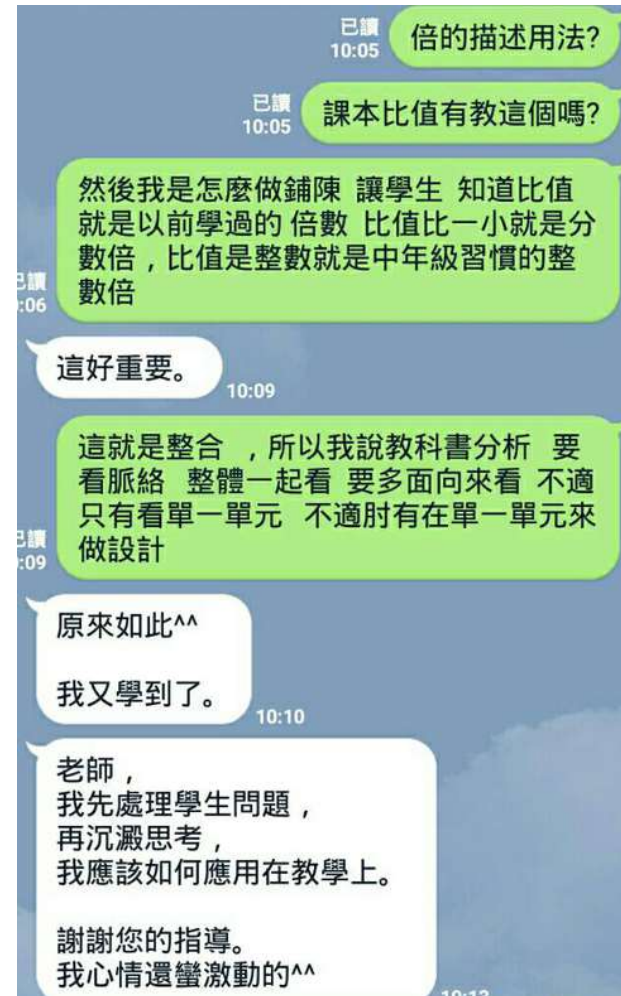
1. 男生人數是女生人數的5/7倍	$180 \div 4 \times 5$
2. 女生人數是男生人數的7/5倍	$= 45 \times 5 = 225$

5:4 = □:180  
男:  $180 \times \frac{5}{4}$



基準量與比較量

橋接與鷹架



座號: 18 姓名: [redacted]

2016.10.27 兩個分母的共同倍數

通分之後的共同分母是左分母與右分母的共同倍數，利用公倍數完成下表，共分母請找出最小的公倍數。

## 倍數判定法 想法起源

左分母	右分母	共同分母 (通分)	左分母	右分母	共同分母 x (通分)
3 1,3	6 1,,2,3,6	6	2 1,2	3 1,3	6
4 1,2,4	12 1,2,3,4,6,12	12	4 1,2,4	5 1,5	20
8 1,2,4	24 1,2,3,4,6,8,12,24	24	7 1,7	8 1,2,4	56
5 1,5	15 1,3,5,15	15	8 1,2,4,8	9 1,3,9	72
12 1,2,3,4,6,12	15 1,3,5,15	60	7 1,7	11 1,11	77
舉例 5,15	舉例 10,25,10	舉例 10	舉例 11	舉例 12	舉例 12

利用上表列出的因數，分析 左分母數字與右分母數字，和共同分母之間的關係

為何只要一個變，另一外堤卻是兩個都要變的原因??

① ~~兩個都要變~~

只要左、右分母是對方的倍數，就只需要把一方的數字就換，或是左分母和右分母兩個都只相差1就兩個都要換。

EX:  $\begin{matrix} \text{左} & \text{右} \\ 2 & 3 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2 \times 2 = 4 \\ 3 \times 2 = 6 \end{matrix}$

EX:  $\begin{matrix} \text{左} & \text{右} \\ 2 & 3 \end{matrix} \rightarrow 2 \times 3 = 6$

② ~~一個變~~

只要左、右分母是對方的倍數，就只需要把一個小的再乘個數就可以。

EX:  $\begin{matrix} \text{左} & \text{右} \\ 3 & 6 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 3 \times 1 = 3 \\ 3 \times 2 = 6 \end{matrix}$

倍數

2017.09.14 最小公倍數與質因數乘式的概念

NAME: [REDACTED]



**兩數相乘必為兩數的公倍數**

1. 利用畫畫看，判斷是否為左右兩數的公倍數，在表格中打圈或x，在說明處簡單說明
2. 不能省略的數字把它框起來，

		左 42	右 30	說明	
順序	兩數相乘 質因數乘式	$2 \times 3 \times 7$	$2 \times 3 \times 5$		
一	$\cancel{2} \times \checkmark 2 \times \checkmark 3 \times 3 \times 5 \times \checkmark 7$	○	○	$\textcircled{2}$ , 公倍數	✓
二	$\cancel{2} \times \cancel{2} \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$	×	×	$\textcircled{2} \textcircled{2}$ ,	×
三	$\cancel{2} \times \boxed{2} \times \cancel{3} \times \checkmark 3 \times 5 \times \checkmark 7$	○	○	$\textcircled{3}$ ,	✓
四	$\cancel{2} \times \boxed{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 5 \times 7$	×	×	$\textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{3}$	×
五	$\cancel{2} \times \boxed{2} \times \cancel{3} \times \boxed{3} \times \cancel{5} \times \checkmark 7$	○	×	$\textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{5}$	×
六	$\cancel{2} \times \boxed{2} \times \cancel{3} \times \boxed{3} \times \boxed{5} \times \cancel{7}$	×	○	$\textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{7}$	×
<p>在兩數相乘後的公倍數中，在最後的乘式裡劃掉多餘的數字                      達到最小的公倍數 <math>\cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times 5 \times 7</math></p>					

N

1. 把上一張學習單的畫畫看結果畫在底下兩小題裡
2. 把公因數圈出來再上下比對

總共有 6 個數字相乘，那些數字要劃掉?

$$2 \times 2 \times \cancel{3} \times 3 \times 5 \times 7$$

$$\boxed{2 \times 3 \times 7}$$

$$\boxed{2 \times 3 \times 5}$$

總共有 7 個數字相乘那些數字要劃掉?

$$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times \cancel{7} \times 11$$

$$\boxed{2 \times 3 \times 7}$$

$$\boxed{2 \times 7 \times 11}$$

[我的發現]在比對課本的圈法和我們兩數相乘之後劃掉的部分，

A. 那些要保留?

不是公因數的數  
 $\wedge$   
 兩數

B. 哪些是部分保留?

是兩數公因數的  
 數!!!

保留部分的數字有何共通特性?

是兩數的公因數

小柏文的疑惑:圈起來的重複數字為何只寫一次??試著幫助她舉例說明:

某  
 卷

起來有點是合體?! 所以只寫一次?!

我覺得已經有共同的數所以只寫一次吧!

不然重複寫會.....不是最小公倍?!

\*利用我的發現來推論最小的公倍數

$$2 \times 3 \times 7$$

$$2 \times 2 \times 5 \times 7$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7$$

說明:

$$7 \times 13 \times 13 \times 13 \times 11$$

$$13 \times 11 \times 19$$

$$7 \times 13 \times 13 \times 11 \times 13 \times 11 \times 19$$

說明:



## 和課本有何不同？

題目

1. 六年級有學生 264 人，  
男生人數對女生  
人數的比是 5 : 7，  
男有多少人？



2. 六年級女生有 180 人，  
男生人數對女生人數  
比是 5 : 4，  
男生有多少人？

1. 六年級有學生 264 人，  
男生人數對女生  
人數的比是 5 : 7，  
男有多少人？

2. 六年級女生有 180 人，  
男生人數對女生人數  
比是 5 : 4，  
男生有多少人？

順序	兩數相乘 質因數乘式	左 42	右 154 <sup>28</sup>	說明
一	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$	○	○	少一個二, 可以是公倍數
二	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$	×	×	少兩個二, 不能是公倍數
三	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$	×	×	少一個三, 不能是公倍數
四	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$	○	○	少一個七, 可以是公倍數
五	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$	×	×	少二個七, 不能是公倍數
六	$2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$	○	×	少一個二, 只可以是42的倍數

在兩數相乘後的公倍數中, 在最後的乘式裡劃掉多餘的數字  
達到最小的公倍數  $2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

2017.09.14標準分解到最小公倍數的設計 (約6分鐘)  
<https://youtu.be/e88YfcZelBo>

Handwritten notes on a chalkboard illustrating the process of finding the Least Common Multiple (LCM) of 42 and 154.

Initial prime factorizations:

- $2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$
- $2 \times 3 \times 7 \times 11$

Comparison and selection process:

- Identified prime factors: 2, 3, 5, 7, 11
- Decisions: "保留哪個?" (Which one to keep?) and "如何保留?" (How to keep?)
- Final LCM calculation:  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$
- Alternative calculation:  $2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$
- Final result:  $2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$

在分解的乘式裡 · 打勾

$$2 \times 3 \times 5$$

$$2 \times 3 \times 5$$

$$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Diagram showing the decomposition of  $2 \times 3 \times 5$  into  $2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$ . The original factors are circled in red. The decomposition is shown with purple highlights on the extra 2 and 3, and a purple box around the 5 and 7. Checkmarks are placed above the 2s, 3s, 5, and 7.

先畫掉多餘數字  
(紫色螢光筆劃掉)

$$2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

Diagram showing the decomposition with the extra 2 and 3 crossed out with purple lines. Checkmarks are placed above the 2s, 3, 5, and 7.

$$2 \times 3 \times 5 \times 7$$

Diagram showing the final prime factorization with all extra numbers removed. Checkmarks are placed above the 2, 3, 5, and 7.

$2 \times 3 \times 5$	$\begin{array}{ccc} \star & \star & \star \\ 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \\ \star & & \star \end{array}$	$2 \times 3 \times 7$
○	$\begin{array}{ccc} \star & \star & \star \\ 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \\ \star & & \star \end{array}$	○
○	$\begin{array}{ccc} \star & \star & \star \\ 2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \\ \star & & \star \end{array}$	○
X	$2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7$	X

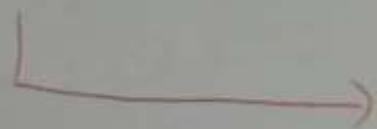
$2 \times 3 \times 7$	$2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7$	$2 \times 3 \times 5$
X	$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✓
✓	$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	X
✓	$2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 7$	✓
✓	$2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5 \times 7$	✓
✓	$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✓
✓	$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✓

$$\begin{array}{l} 2 \times 3 \times 5 \\ 2 \times 3 \times 7 \end{array} \rightarrow$$

兩枚相乘

$$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

縮水 ↓ 如何省?  
省略 ↓ 要去掉誰? 誰要保留?



$$2 \times 3 \times 5 \times 7$$

省一省劃劃看

	$2 \times 3 \times 5$	$2 \times 3 \times 7$	備註
$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✗	✗	保留 7
$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✗	✓	保留 5
$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✓	✓	省去 3
$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✓	✓	去掉 2
$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7$	✓	✓	同時去掉 2x3

2017 09 15 兩個標準分解式直接寫最小公倍數(直接用倍數來看)

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$$



$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$$

1/11

2017 09 15 兩個標準分解式直接寫最小公倍數(直接用倍數來看)  
<https://youtu.be/SAlon7uK3n0>

順序	兩數相乘 質因數乘式	左 42 2×3×7	右 154 2×7×11	說明
一	<del>2</del> ×2×3×7×7× <del>11</del>	○	○	少一個二, 可以是公倍數
二	<del>2</del> × <del>2</del> ×3×7×7× <del>11</del>	×	×	少兩個二, 不能是公倍數
三	2× <del>2</del> × <del>3</del> ×7×7× <del>11</del>	×	×	少一個三, 不能是公倍數
四	2×2× <del>3</del> × <del>7</del> ×7× <del>11</del>	○	○	少一個七, 可以是公倍數
五	2×2×3× <del>7</del> × <del>7</del> × <del>11</del>	×	×	少兩個七, 不能是公倍數
六	2×2×3×7× <del>7</del> × <del>11</del>	○	×	少一個七, 只能是42的倍數

在兩數相乘後的公倍數中, 在最後的乘式裡劃掉多餘的數字  
 達到最小的公倍數  $2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$

Handwritten notes on a chalkboard:

- Initial product:  $2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$
- Diagram showing the removal of extra factors:  $(2) \times 5$  and  $(7) \times 11$  are boxed and crossed out.
- Final LCM:  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$
- Handwritten questions: "1. 保留哪個?", "2. 如何保留?", "(全部? 部份?)"
- Other notes: "乘式 ×  $2 \times 3 \times 7$ ", "2.  $2 \times 7 \times 11$ ", "2.  $2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$ ", "2.  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11$ "

## 課本的方式

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11 \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$$

公因數

剩下的 (互質)

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$$

由小寫到大

## 我的方式：倍數判定

$$\begin{array}{l} 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \\ 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 7 \times 11 \end{array}$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 7 \times 11$$

就像叫牌：2至少要兩個才能是公倍數

## 課本的方式

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$$

除以最大公因  
數之後互質

$$2 \times 5$$

$$3 \times 7$$

$$5 \times 11$$

$$2 \times 3 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 = 69300$$

公因數

剩下的 (互質)

三數若求最小公倍數  
互質部分有2個有共同因  
數就要要繼續除下去

## 我的方式：倍數判定

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$$

$$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 13860$$

$$13860 \text{ 除以 } 60 = 231$$

$$13860 \text{ 除以 } 126 = 110$$

$$13860 \text{ 除以 } 330 = 42$$

2017 09 16 三數球最小公倍數，  
課本方法不能通用，用倍數判定法更簡單  
[https://youtu.be/qth5e\\_Krz0k](https://youtu.be/qth5e_Krz0k)



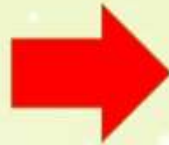
兩數相乘為兩數的公倍數  
EX :  $42 \times 35$  是 42 與 35 的倍數

題

兩數相乘為兩數的公倍數  
還有比兩數相乘  $42 \times 35$  小的公倍數是多少？

$$2 \times 3 \times 5$$

$$2 \times 3 \times 7$$



兩數相乘為兩數的公倍數  
 $2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7$



$$2 \times 3 \times 5 \times 7$$

	$2 \times 3 \times 7$	$2 \times 3 \times 5$	說明
<del><math>2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7</math></del>	○	○	
<del><math>2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7</math></del>	○	○	
<del><math>2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7</math></del>	X	X	
<del><math>2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7</math></del>	X	X	
<del><math>2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7</math></del>	X	X	
<del><math>2 \times 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7</math></del>	X	X	
$2 \times 3 \times 5 \times 7$			

## 回家作業：比對

2017.09.15 從乘式中直接寫最小公倍數  
先圈圈看，兩種方式分別說明如何寫？

**課本做法**

左數:  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

右數:  $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

最小公倍數

**倍數判定法**

左數:  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

右數:  $2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$

最小公倍數

# 分數除法倒數乘公式推導

三個推導算式中學生  
可能卡關的預測與模擬

$$\frac{9}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{9 \times 7}{4 \times 7} \div \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = (9 \times 7) \div (4 \times 5) = \frac{9 \times 7}{4 \times 5} = \frac{9}{4} \times \frac{7}{5}$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} \div \frac{5 \times 7}{5 \times 8} = (3 \times 8) \div (5 \times 7) = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7}$$

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} \div \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = (3 \times 5) \div (2 \times 4) = \frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

共備時有老師說:過去推導(推導A)後面的出現交換律學生覺得難以理解, 所以那樣先用交換律(下圖推倒B紅色框框處) ... , 但暑假後我再看, 我認為即使B也沒有那麼簡單...

•

$$\text{A } \frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{4 \times 5}{7 \times 5} = (3 \times 7) \div (4 \times 5) = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4}$$

$$\text{B } \frac{3}{5} \div \frac{4}{7} = \frac{3 \times 7}{5 \times 7} \div \frac{5 \times 4}{5 \times 7} = (3 \times 7) \div (5 \times 4) = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4}$$

**現象、過程、動機與慣性**

學生的疑惑：為何交換律只移動分母不移動分子？


$$\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4 \times 5}{7 \times 5} \div \frac{9 \times 7}{5 \times 7} \rightarrow \frac{4 \times 5}{1 \times 7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 9} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$$

教學反思：

老師知道容易以為學生也知道，  
老師能夠看到也容易以為學生能像他那樣看到

**現象、過程、動機與慣性**

不用交換律：分子分母都留在原地

$$\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4 \times 5}{7 \times 9} \div \frac{9 \times 7}{5 \times 7}$$

交換律：只交換分母位置

$$\frac{4 \times 5}{1 \times 7} = \frac{4 \times 5}{7 \times 9}$$

交換律：分子分母同時都換位置

和原算式比對

$$\frac{4 \times 5}{9 \times 7} = \frac{4}{9} \times \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{4}{7} \div \frac{9}{5}$$

$$\frac{4 \times 5}{7 \times 9} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9} \Leftrightarrow \frac{4}{7} \div \frac{9}{5}$$

$$\frac{5 \times 4}{7 \times 9} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{9} \Leftrightarrow \frac{4}{7} \div \frac{9}{5}$$

$$\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4 \times 5}{7 \times 9} \div \frac{9 \times 7}{5 \times 7}$$

$$= (4 \times 5) \div (9 \times 7) = \frac{4 \times 5}{7 \times 9}$$

①  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$

②  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$

$$\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{9}$$

子與分母交換律的各種情形，當學生觀察之後發現而形成精簡的計算公式來說，上下調換相對較簡單的規律，就能有計算上的需求（簡便）。

逆時針調換

上下調換

順時針調換

①  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4}{9} \times \frac{5}{7}$

②  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$

$\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{9}$

The chalkboard shows three examples of fraction division. The first example, labeled ①, shows the division  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5}$  being converted to multiplication  $\frac{4}{9} \times \frac{5}{7}$ . A green arrow points from the denominator 7 of the first fraction to the denominator 9 of the second fraction, and another green arrow points from the numerator 9 of the second fraction to the numerator 4 of the first fraction. Below this, a red equation shows the same operation with a blue bar over the 7 in the denominator and a blue square over the 9 in the numerator, illustrating the 'counter-clockwise' rule. The second example, labeled ②, shows  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$ . A green arrow points from the denominator 7 of the first fraction to the denominator 9 of the second fraction, and another green arrow points from the numerator 9 of the second fraction to the numerator 4 of the first fraction. Below this, a red equation shows the same operation with a blue bar over the 7 in the denominator and a blue square over the 9 in the numerator, illustrating the 'vertical' rule. The third example shows  $\frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{5}{7} \times \frac{4}{9}$ . A green arrow points from the denominator 7 of the first fraction to the numerator 5 of the second fraction, and another green arrow points from the numerator 9 of the second fraction to the numerator 4 of the first fraction. Below this, a red equation shows the same operation with a blue bar over the 7 in the denominator and a blue square over the 9 in the numerator, illustrating the 'clockwise' rule.



## 現象、過程、動機與慣性看學生思考模式

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} \div \frac{5 \times 7}{5 \times 8} = (3 \times 8) \div (5 \times 7) = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7}$$

通常倍數會放在右邊，但這  
卻放在左邊

擴分時分子與分母同乘以某數，  
教學者以為學生對於擴分比交換律更熟悉，  
我們以為 $5 \times 7 = 7 \times 5$ 可以利用擴分來幫助理解，  
但卻因為學生的慣性是擴分要乘在右邊  
不符合學生思考慣性，故仍較難理解

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{8} = \frac{3 \times 8}{5 \times 8} \div \frac{5 \times 7}{5 \times 8} = (3 \times 8) \div (5 \times 7) = \frac{3 \times 8}{5 \times 7} = \frac{3}{5} \times \frac{8}{7}$$

先處理交換律

乘式拆開

$$\frac{9}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{9 \times 7}{4 \times 7} \div \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = (9 \times 7) \div (4 \times 5) = \frac{9 \times 7}{4 \times 5} = \frac{9}{4} \times \frac{7}{5}$$

先處理交換律

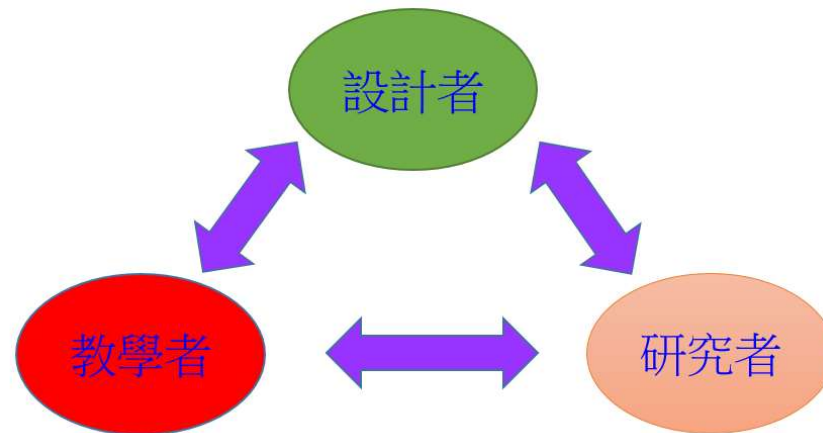
乘式拆開

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} \div \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = (3 \times 5) \div (2 \times 4) = \frac{3 \times 5}{2 \times 4} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2}$$

乘式拆開，同時以交換律互換分母

# 從教學...到設計...到研究

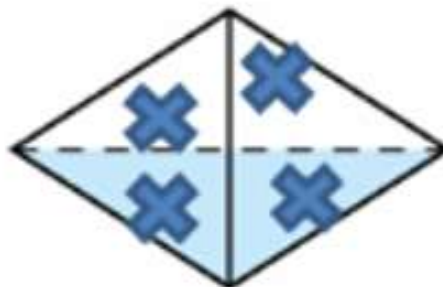
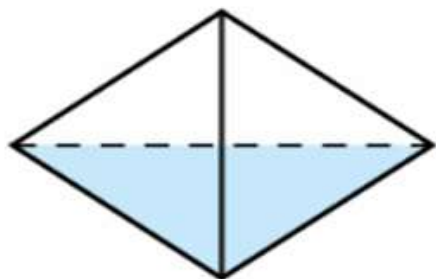
- 可以怎麼幫助學生過度？
- 學生不會是否教學過程中少了什麼？
- 設計的橋接活動可以幫助的原因是？不能的原因是？



三 應用題：

教學者看到的四個面和學生不同

- (1) 正四面體共有幾個邊？若各個邊的總和為 180 公分，它的一個邊長是幾公分？



學生看到的四個面如打X處

①

$$\frac{9}{5} = 9 \div 5 = 9 \times \frac{1}{5}$$

②

$$a \div (b \div c)$$

$$= a \div b \times c$$

$$\text{ex: } 8 \div (4 \div 2) = 8 \div 4 \times 2$$

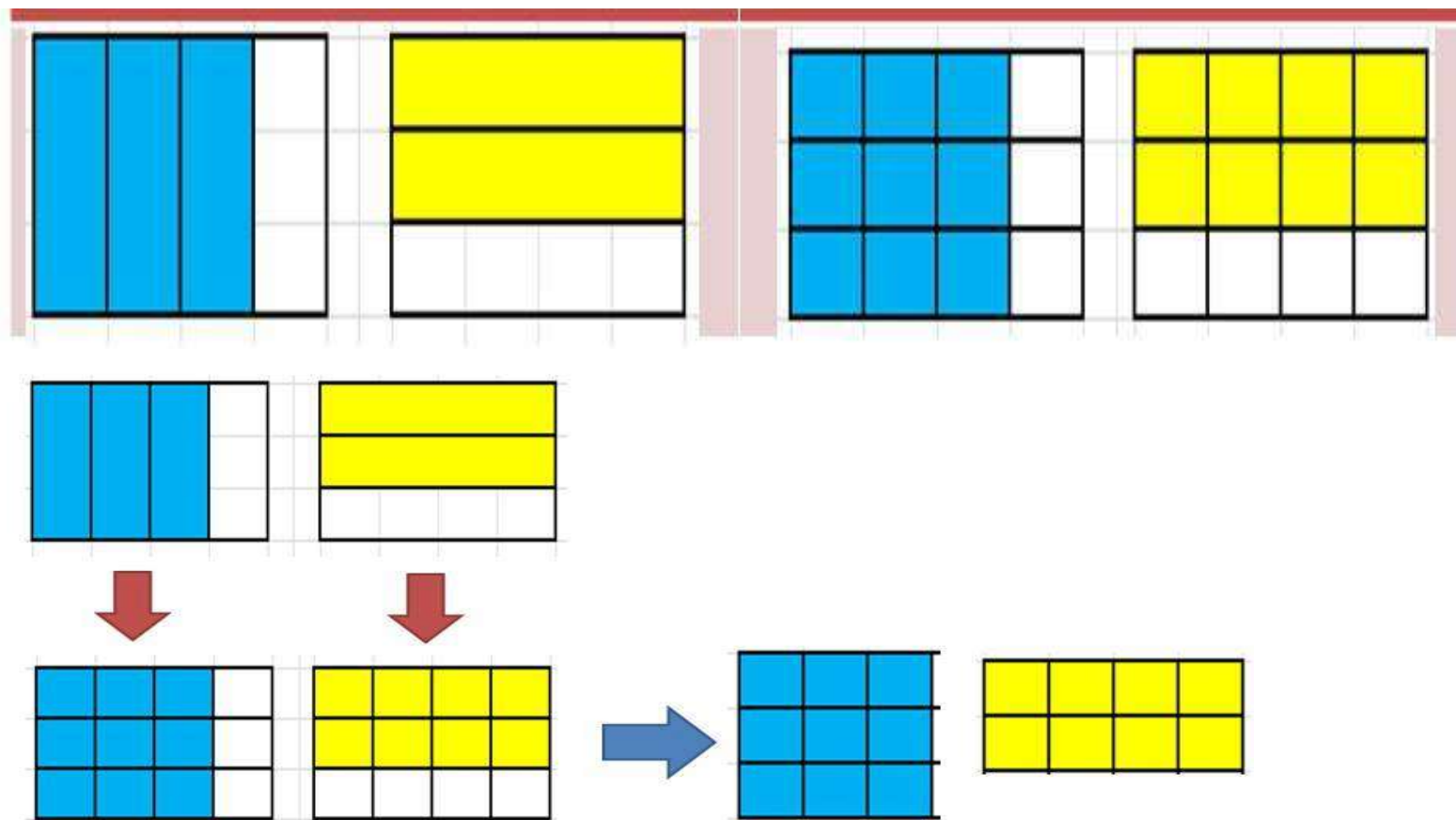
$$\therefore \frac{4}{7} \div \frac{9}{5} = \frac{4}{7} \div (9 \div 5)$$

$$= \frac{4}{7} \div 9 \times 5$$

$$= \frac{4}{7} \times \frac{1}{9} \times 5 = \frac{4}{7} \times \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} & \frac{3}{5} \div \frac{7}{8} \\ &= \frac{3}{5} \div (7 \div 8) \\ &= \frac{3}{5} \div 7 \times 8 \\ &= \frac{3}{5} \times 8 \div 7 \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{8}{7} \end{aligned}$$

藍色是黃色的幾倍?左邊是3除以2?右邊是8除以9? 為何左邊是不能寫3除以2?右邊可以是8除以9?





A: 不對, 因為分母大分子就多, 但是一片很小, 分母小分子就少但是片很大, 如果是  $\frac{2}{3}$  變成  $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}$  ... 也不會變多它只會變小片但沒變多。

[問題一]

小強說: 當分子與分母同時成一個數時, 分子分母都變大了, 所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎?  
 正確, 雖然分子和分母變大, 但是圖形不會變大

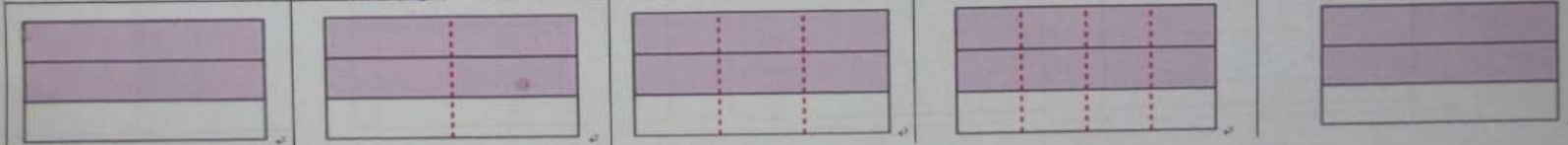
小強說: 當分子與分母同時成一個數時, 分子分母都變大了, 所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎?  
 不對, 因為分更多的話那個份量只會更少

小強說: 當分子與分母同時成一個數時, 分子分母都變大了, 所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎?  
 錯, 因為它只是繼續切, 讓等份變更多, 但實際上並沒有讓分子和分母變大, 所以他說的是錯的。

小強說: 當分子與分母同時成一個數時, 分子分母都變大了, 所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎?  
 不正確, 整個分數變大等於分的東西變小。

四下等值分數直接延伸  
學五上擴分

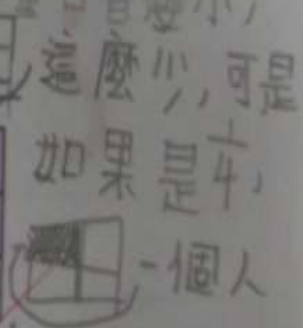
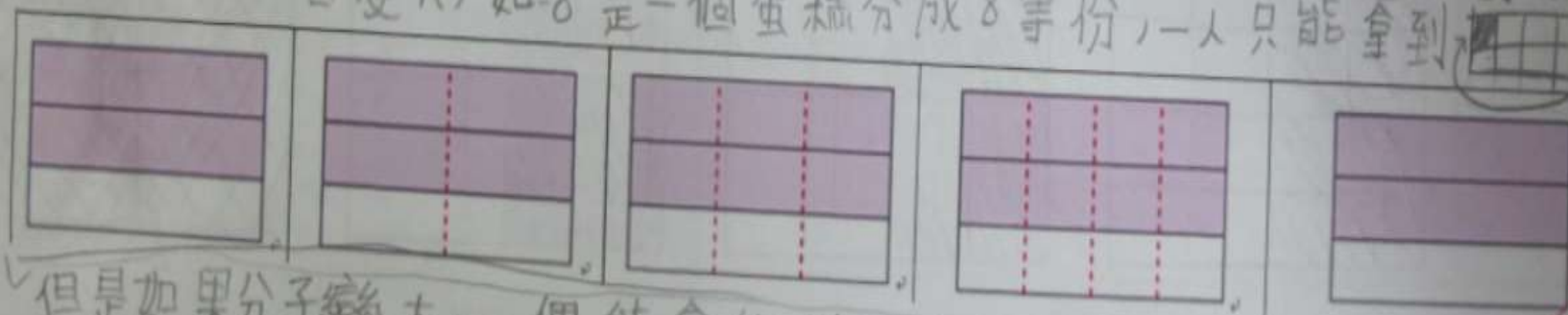
不正確, 因為雖然都有變大, 但面積沒有變大  
 不正確, 因為他只是越切越多但他沒有越加越多所以不正確。



[問題一]

小強說:當分子與分母同時成一個數時,分子分母都變大了,

所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎? 不正確,因為分母變大,所以一個人的份量也會變小,相對的,分子也會變大,如 $\frac{1}{8}$ 是一個蛋糕分成8等份,一人只能拿到



但是如果分子變大,一個能拿的份量就越多,所以分母和分子同時變大時,分母讓份量變少,分子讓你拿多一塊,就互相補回來,所以不會變大。

這麼少,可是如果是 $\frac{1}{4}$ ,一個人就能拿到很多,所以分母越大,份量越少

小強說:當分子與分母同時成一個數時,分子分母都變大了,所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎?

錯,因為它只是繼續切,讓等份變更多,但實際上並沒有讓分子和分母變大,所以他說的是錯的。



變大了，  
正確嗎？

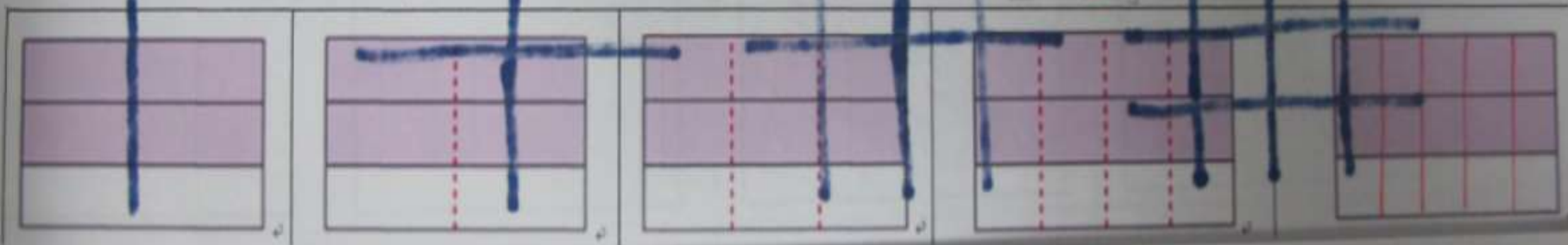
否，因為他們是等值，不是越來越大。

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{12} \quad \frac{10}{15} \quad \frac{2}{3}$$

【問題一】 乘

小強說：當分子與分母同時成一個數時，分子分母都變大了，  
所以整個分數也跟著變大。對於小強的說法你認為正確嗎？

A: 不正確，因為等值分數(2)只是「分數不同」，不是「數量不同」。



不正確，因為雖然<sup>份數</sup>都有變大，但面積沒有變大！

1. 對折過程中，你發現份數的有何變化與改變??

「份量沒改變，但我發現：  
對折愈多次，『分數』的數字愈大。」

2. 第四次對折，如果你不動手折的話你能預測推出表格中的  
“塗色部分份數”與全部份數多少?(你怎麼知道的?)

只要：

$$\frac{8}{16} \times 2 = \frac{16}{32}$$

( $\frac{8 \times 2}{16 \times 2}$ )

看前面的分數(有規律性。Ex:  $\frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{2}{4}$ )

四年級提前學習五年級擴分

寫錯沒關係嗎?

學生先建構基本概念，

後面在做算式紀錄的澄清

3. 折越多次會切分越小，折越多次時份數的數量越多，

如果要透過算式你怎麼算?? (利用觀察表格對折之與原圖形的比較後)

擴分真正核心概念來自於等值（面積不變），不是只有摺紙看到越變越多，否則學生容易以為擴分數字擴大就變大

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} = \frac{32}{64} = \frac{64}{128} \dots$$

雖然數字越來越大，等份也越來越多，但它們面積一樣大。

## 疑問:學生程度好才有辦法探究?

	本校	全市國小
二年級	7.41%	3.86%
三年級	6.19%	3.39%
四年級	8.6%	7.87%
五年級	23.4%	16.42%
六年級	35.51%	16.09%

\*數學不合格率

25  
0:05

因為不知道你是怎麼讓學生操作，你操作完會問學生一些相關問題嗎，比如一些相關提問？還是只是操作完就結束？另外操作你有讓學生知道要觀察啥？

25  
0:07

操作完，有搭配學習單的問題讓他們寫？操作中觀察到的，比如相關表格紀錄？操作結束之後有從表格中去觀察現象，嘗試發現關係嗎？還是只有操作而已？

旭田講的，「記錄」「嚐試發現關係」，這種能力真的距離他們好遠。當然前面一兩個可以，但大部分...

有相對好的設計學生也可以探究

# 成功經驗有何重要性?

學生

1. 學到數學知識之外更重要的是...  
相信自己也能做到...[心理層面]
2. 成功經驗的複製與轉移

老師?



1. 老師也需要成功的經驗...(要問什麼?怎麼問?)
2. 製造學生成功經驗
3. 簡化活動難度與適時的教學介入(引導)