

數學科教師共備手冊

高中課程

單元2

多項式函數



數學新世界

2018年10月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思問題

1. 從運算開始了有關數學知識的發展，一開始談的是計算，巧算，這個時候我們對一些已知數所形成的算式進行運算而得到心中的未知數。再來，心中的未知數被寫進算式中並以關係符號聯繫算式而形成方程式的型態，這時候，之前的計算與巧算變為解方程，也就是說，將未知數先當成一個數(先不論他是否真實存在)來做計算的各種算式的變形，最終得以掀開未知數的面紗或面臨要不要接受暫時只存在算式的虛擬世界中的對象。就你所知，請描述一些高中生可能或應該碰到的方程式。
2. 在探索方程式的解並進一步地獲得解集合時，我們感受到方程式與解集合的一體兩面，進而我們得以利用解析的方式將幾何與代數做有效統整，請列舉一些幾何與代數連結的方程式或圖形。
3. 在嘗試理解方程式的一些可能的解的過程中，我們開始嘗試利用變動的方式以及借用圖形的協助來幫助我們定位解的可能所在，這個時候，一個方程式裡面可能有許多未知數，我們可以先從一些未知數的變動來看剩下未知數的可能樣貌，例如：將 $y - x^2 = 0$ 轉換成 $y = x^2$ 來看，或者，將方程式 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 用 $y = x^2 + 3 - 1$ 來處理(引進新的未知數)，這個時候表面上我們是在解方程可是，就型態來講已經跨入函數的思維，試著分析函數跟方程式在思維上的不同以及各自的優缺點。

4. 國中階段我們會使用配方法寫出二次函數的標準式，當一般式改寫為標準式的時候我們看到一般式與標準式的主要相同之處為何？在應用上，我們如何使用這個性質？又，利用配方的方式將二次函數轉化為可以理解的函數的方法，也可以使用在三次函數嗎？
5. 函數圖形利用變化的觀點討論勘根、討論極值，甚至，討論均值定理(有些測速依據是利用均值定理)，這些討論和日後的微積分的學習息息相關，那麼，高中要如何以直觀的角度切入進而奠定學生往後的學習的基礎？
6. 將函數分類為奇函數和偶函數的最大好處是使用其對稱性，是不是函數同型具有點對稱或線對稱就是奇函數或偶函數？
7. 就多項式而言，我們是用函數的觀點來對一些基本的次方函數的組合作變數的變化與函數值的關係，在這樣的觀點底下，如何帶領學生看到在實數系中求根的窘境，以及在複數系中理解代數基本定理的存在！又，為什麼我們會在意多項式的最高次數？

8. 因式分解不論在方程式的求解獲多項式的求根都是數學思維的最核心精神，其中又以一次式的因式分解為終極目標，也因此，勘根定理，餘式定理，因式定理在處理多項式問題的重要性。那麼，在介紹這些問題的時候我們會引入綜合除法，請分析綜合除法就學習多項式的觀點下其是否有其必要性？
9. 我們談多項式的等式與不等式(或等方程與不等方程)我們會利用那些想法來解決這些問題？
10. 多項式函數是一種運算上最簡單的函數，有許多現象的圖形似乎都跟多項式的圖形相似，伽利略甚至把懸鍊線(catenary)誤認為拋物線，我們知道 Newton 與 Lagrange Interpolating 是一種可以精確通過特定值的一種函數模擬(有別於回歸的想法)，多項式在各個領域上的重要性不言可喻，就上述的兩種插植法，除了代數的證明或檢驗之外，有沒有更直觀的想法來說明並導出他們的公式？

二、試著撰寫下面名詞的核心概念

1. 多項式函數
2. 多項式方程式
3. 多項式不等式
4. 綜合除法
5. 極值
6. 奇函數與偶函數
7. 插值多項式
8. 共軛虛根
9. 勘根定理

三、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
多項式 函數			
多項式 方程式			
多項式 不等式			
綜合除法			
極值			
奇函數與 偶函數			
插值 多項式			
共軛虛根			
勘根定理			

四、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics 即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1)數學新世界-CA-多項式函數 入班教學 20180703 (南投縣普台高中)
 - (2)數學新世界-CA-插值法的想法 教師研習 20180626 (嘉義民生國中)
 - (3)數學新世界-CA 談數--20160128 玉里高中 多項式與多項式函數 1
 - (4)數學新世界-CA 談數學-20160128 玉里高中 多項式與多項式函數 2
 - (5)數學新世界-CA 談數學-20160128 玉里高中 多項式與多項式函數 3
 - (6)數學新世界-CA 談數學-20160129 玉里高中 多項式與多項式函數
- 2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。
- 3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、學習單：如附件。

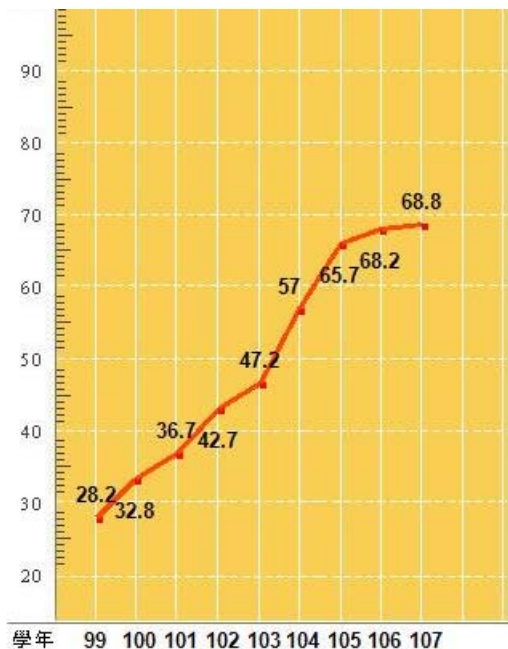
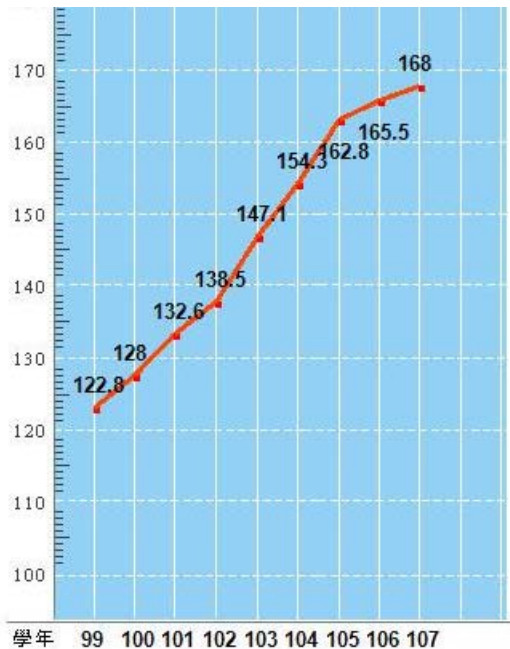


班級： 座號： 姓名：

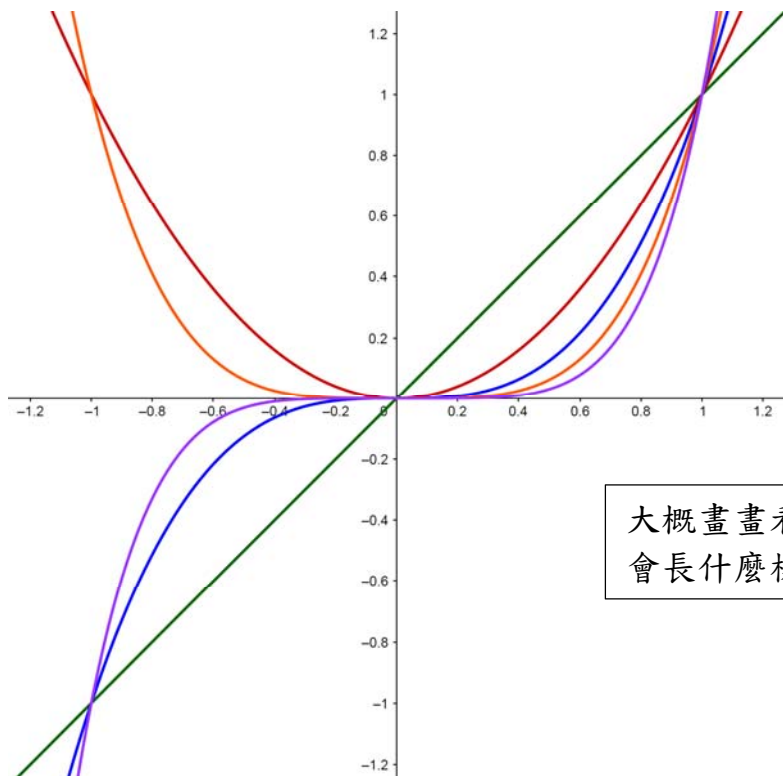
1. 下面是一個男學生從小學一年級到國中三年級身高和體重的紀錄圖

(1) 什麼時候身高長最快？你是怎麼看出來的？

(2) 什麼時候體重長最慢？你是怎麼看出來的？



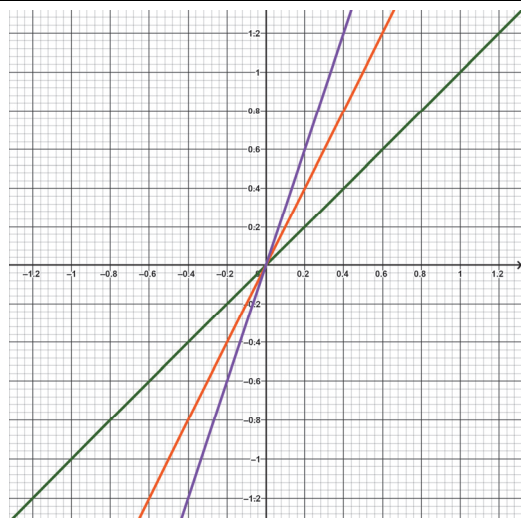
2. $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = x^2$ 、 $f_3(x) = x^3$ 、 $f_4(x) = x^4$ 、 $f_5(x) = x^5$ 分別是下面的哪個圖形呢？這些圖形一樣和不一樣的特徵是什麼呢？



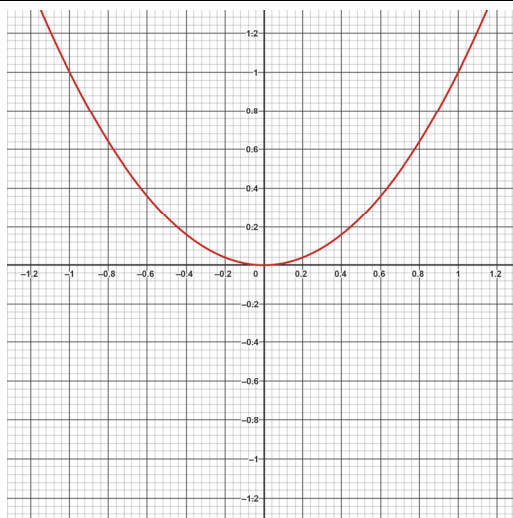
大概畫畫看，你覺得 $f_6(x) = x^6$ 會長什麼樣子呢？

3. 函數圖形的變與不變

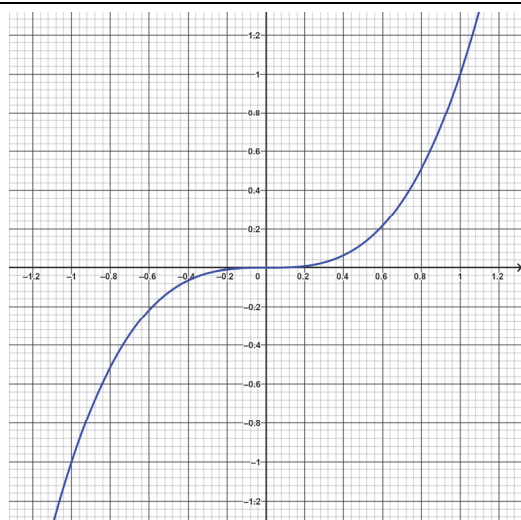
(1) 下圖有 $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = 2x$ 、 $f_3(x) = 3x$ ，請標示在圖形上。



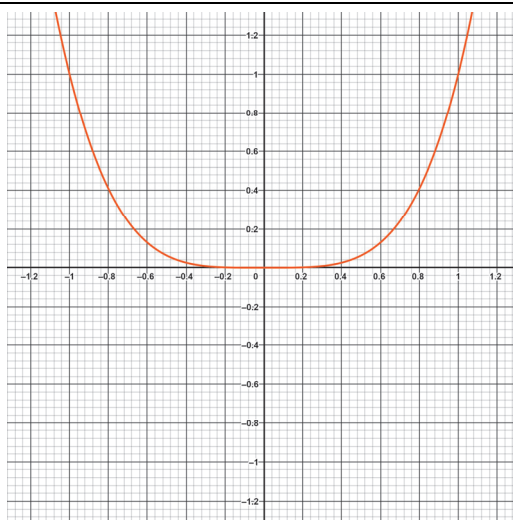
(2) 下圖是 $g_1(x) = x^2$ ，請畫出 $g_2(x) = 2x^2$ 、 $g_3(x) = 3x^2$



(3) 下圖是 $h_1(x) = x^3$ ，請畫出 $h_2(x) = 2x^3$ 、 $h_3(x) = 3x^3$

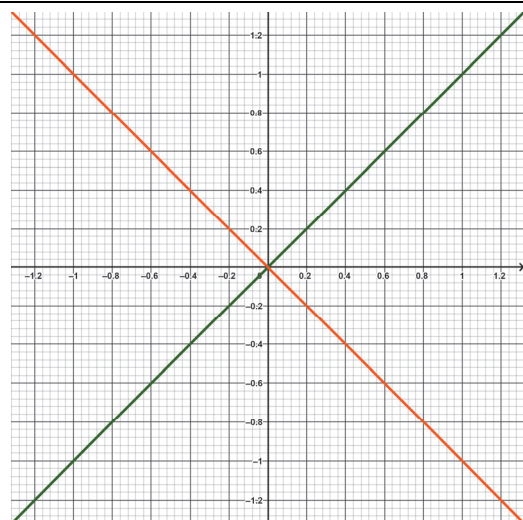


(4) 下圖是 $i_1(x) = x^4$ ，請畫出 $i_2(x) = 2x^4$ 、 $i_3(x) = 3x^4$

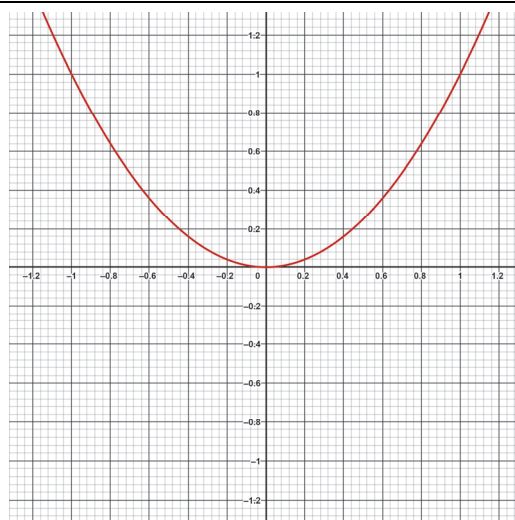


4. 函數圖形的變與不變

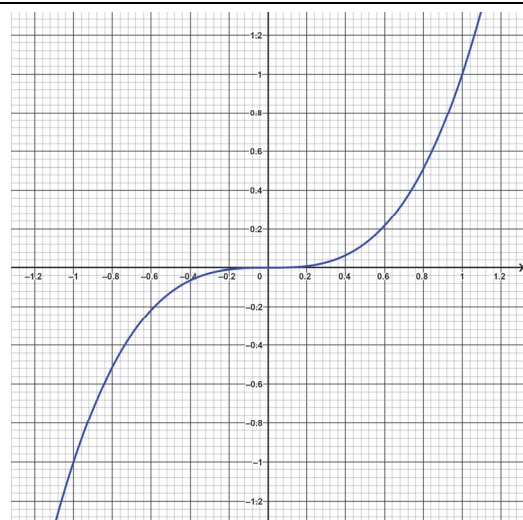
(1) 下圖 $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = -x$ ，請標示在圖形上。



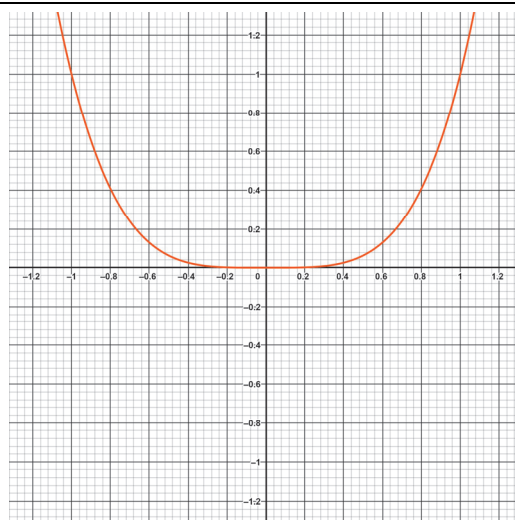
(2) 下圖是 $g_1(x) = x^2$ ，請畫出 $g_2(x) = -x^2$ 、 $g_3(x) = -1/2x^2$



(3) 下圖是 $h_1(x) = x^3$ ，請畫出 $h_2(x) = -x^3$ 、 $h_3(x) = -1/2x^3$

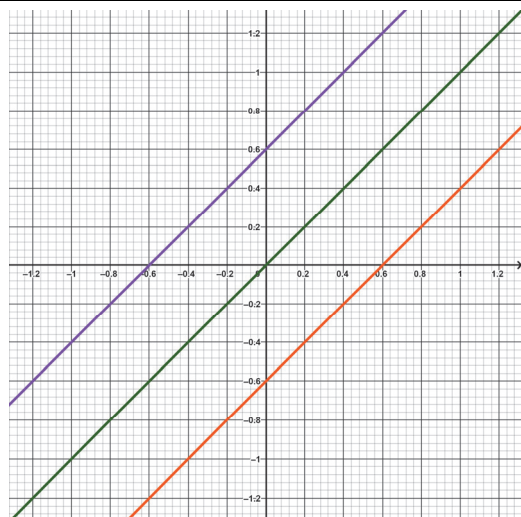


(4) 下圖是 $i_1(x) = x^4$ ，請畫出 $i_2(x) = -x^4$ 、 $i_3(x) = -1/2x^4$

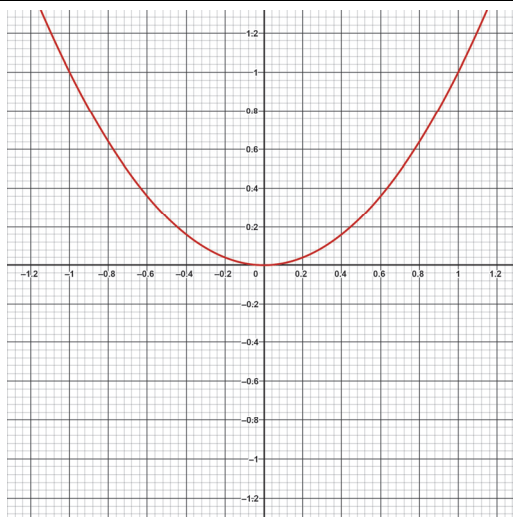


5. 函數圖形的變與不變

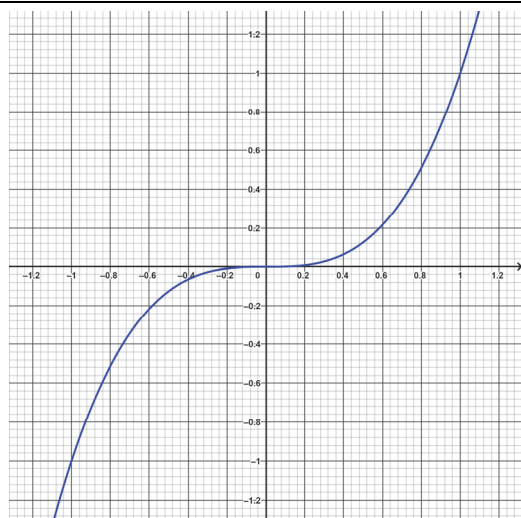
(1) $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = x - 0.6$ 、 $f_3(x) = x + 0.6$ ，請標示圖上。



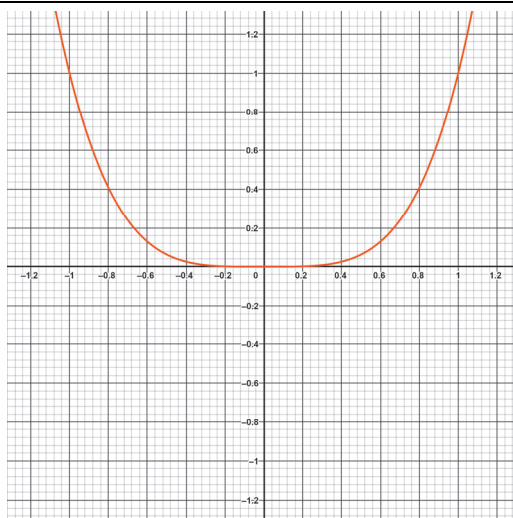
(2) 下圖是 $g_1(x) = x^2$ ，請畫出 $g_2(x) = (x - 0.6)^2$ 、 $g_3(x) = (x + 0.6)^2$



(3) 下圖是 $h_1(x) = x^3$ ，請畫出 $h_2(x) = (x - 0.6)^3$ 、 $h_3(x) = (x + 0.6)^3$

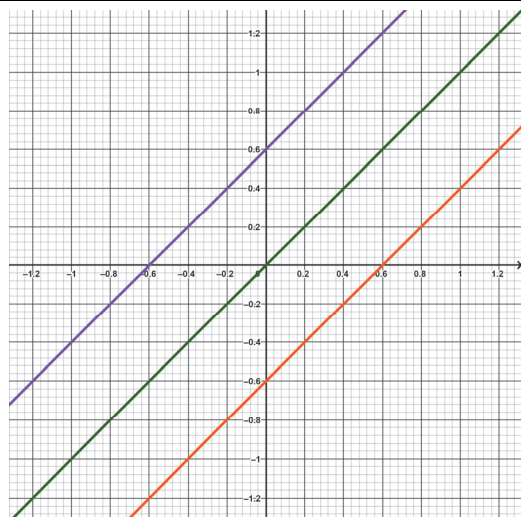


(4) 下圖是 $i_1(x) = x^4$ ，請畫出 $i_2(x) = (x - 0.6)^4$ 、 $i_3(x) = (x + 0.6)^4$

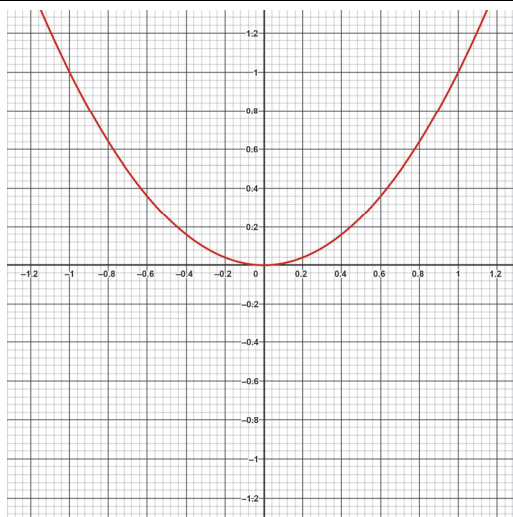


6. 函數圖形的變與不變

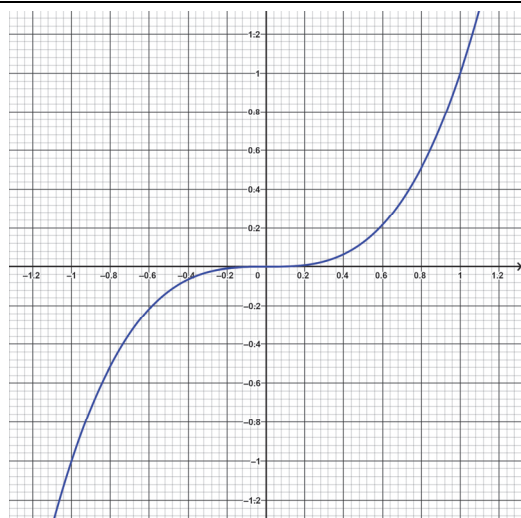
(1) $f_1(x) = x$ 、 $f_2(x) = x - 0.6$ 、
 $f_3(x) = x + 0.6$ ，請標示圖上。



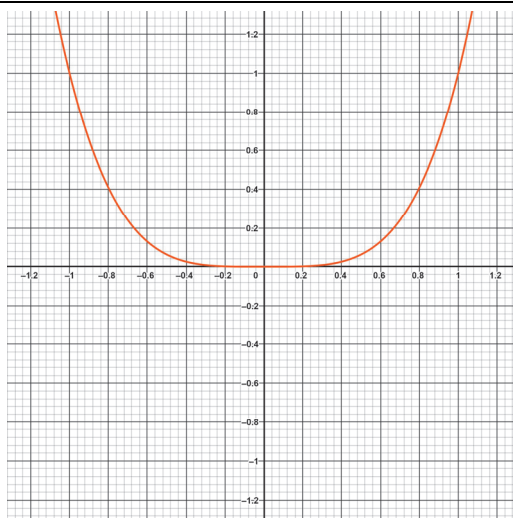
(2) 下圖是 $g_1(x) = x^2$ ，請畫出
 $g_2(x) = x^2 - 0.6$ 、
 $g_3(x) = x^2 + 0.6$



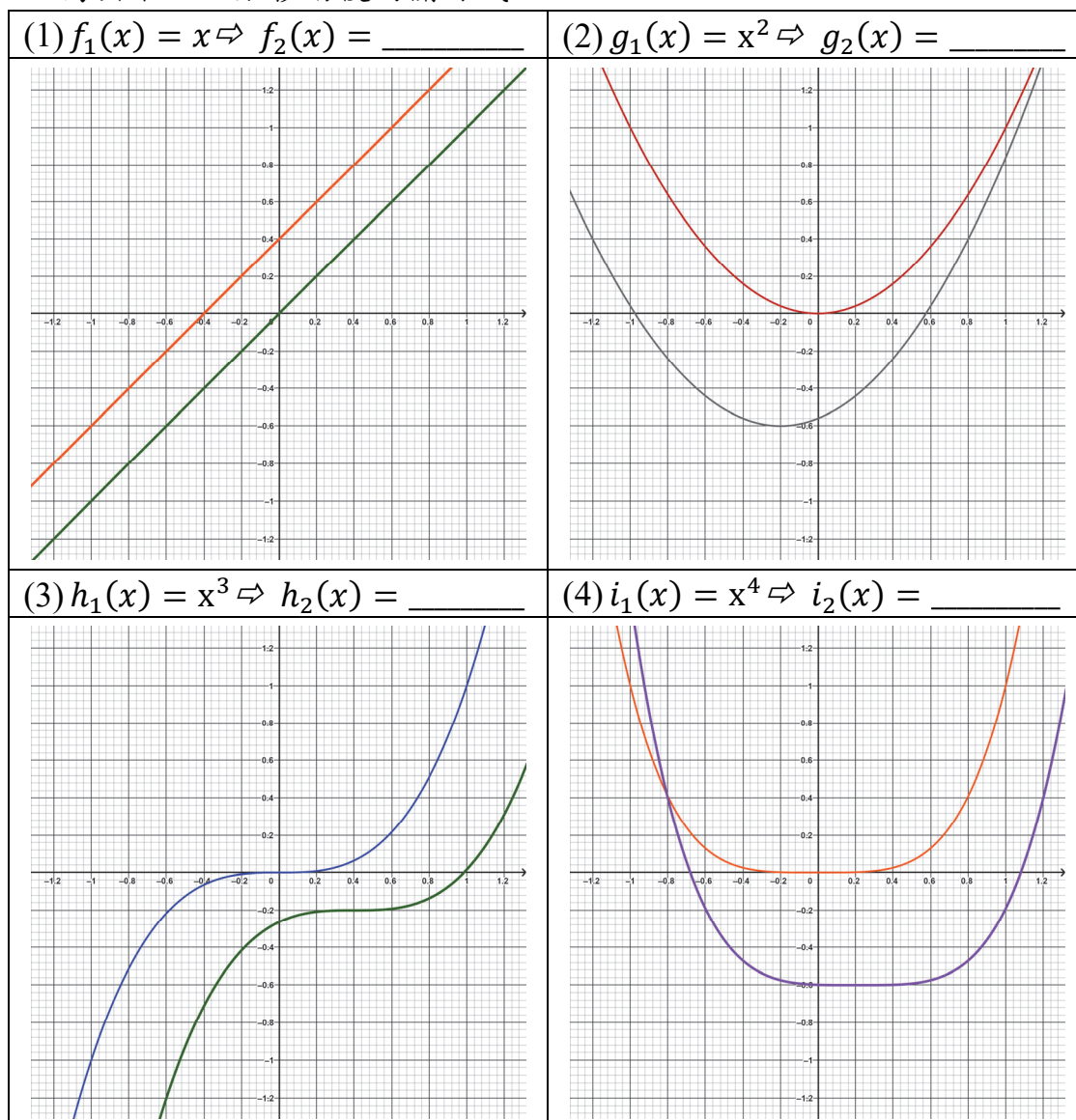
(3) 下圖是 $h_1(x) = x^3$ ，請畫出
 $h_2(x) = x^3 - 0.6$ 、
 $h_3(x) = x^3 + 0.6$



(4) 下圖是 $i_1(x) = x^4$ ，請畫出
 $i_2(x) = x^4 - 0.6$ 、
 $i_3(x) = x^4 + 0.6$

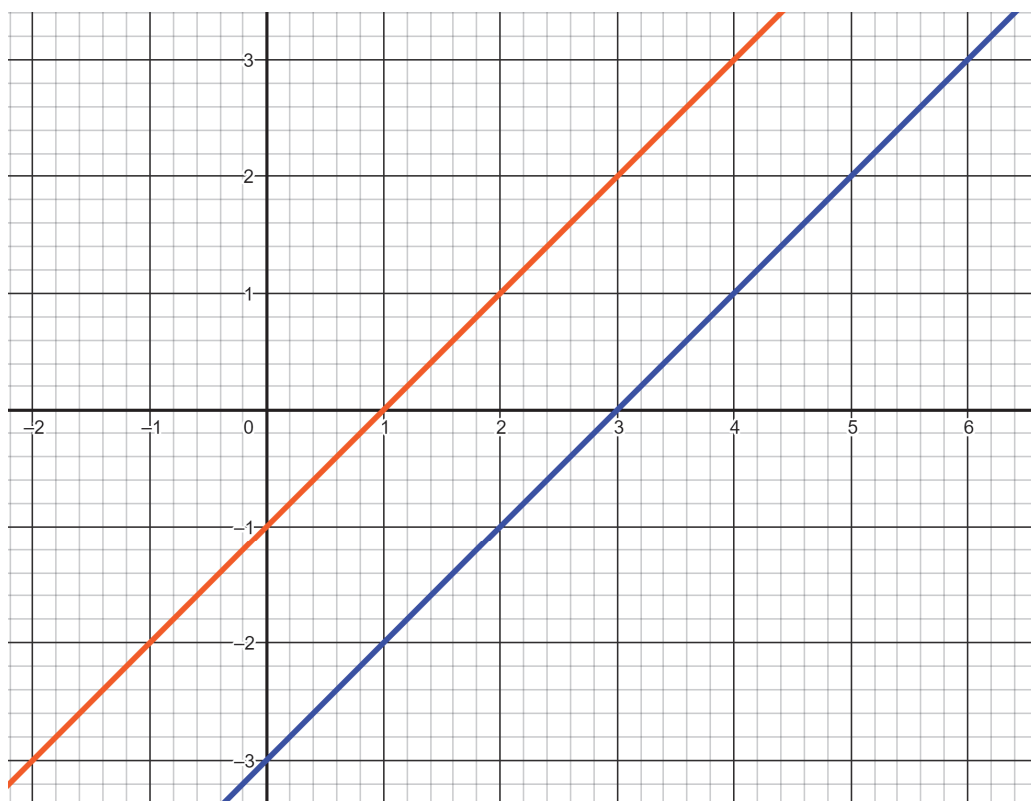


7. 寫出下面函數移動後的關係式

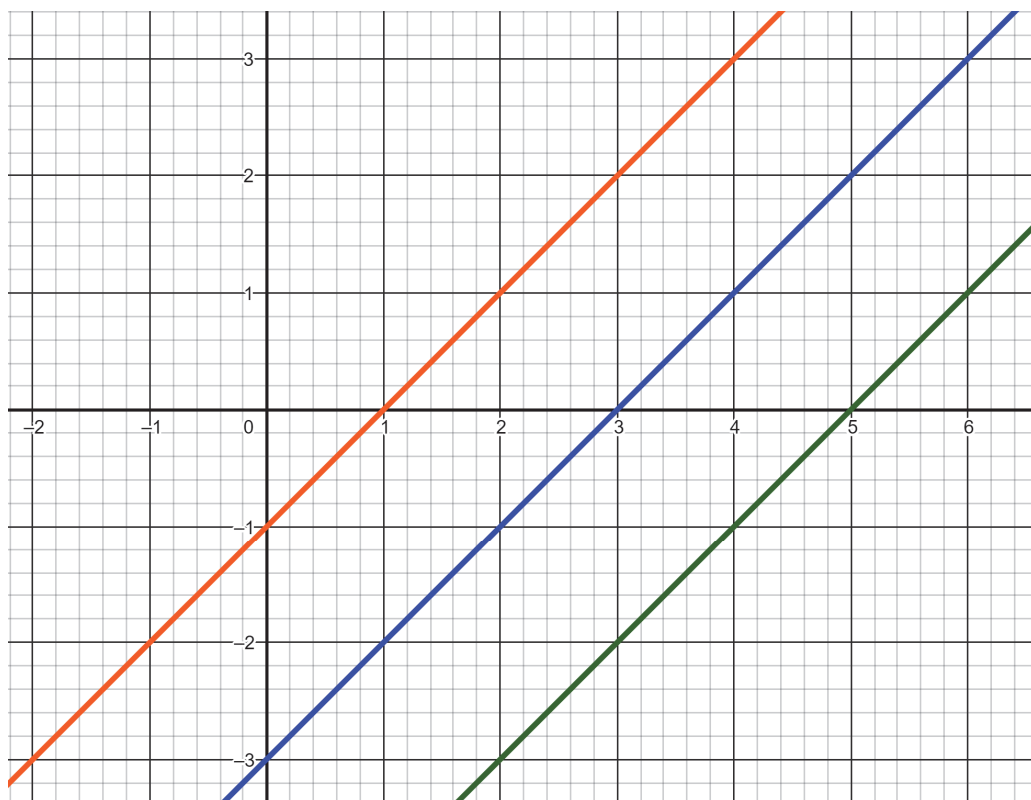


8. 請畫出下面的函數圖形

(1) $f(x)=(x-1)(x-3)$



(2) $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)$



數學新世界教師種子生根計畫-重要連結

生根計畫網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>



數學新世界 FB 社團

<https://www.facebook.com/groups/nhmath>

CA 行程表

<https://goo.gl/a6YNxW>



生根計畫官方 LINE

<https://line.me/R/ti/p/%40uje9883i>



Tel: 04-7232105 ext.3288

E-mail: nhmath@nhmath.com

Address: 彰化縣彰化市進德路 1 號數學系

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>