

數學科教師共備手冊

高中課程

單元3

圓錐曲線



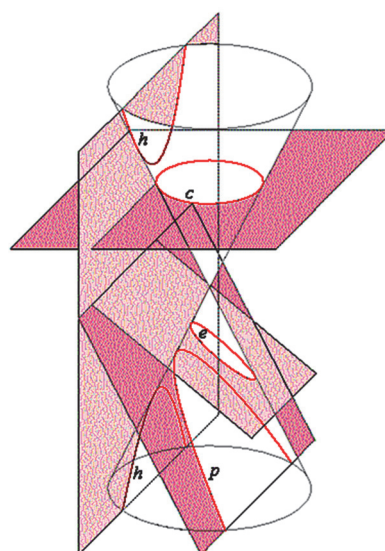
數學新世界

2018年12月 編印

一、反思問題

從歷史發展的角度，從切割圓錐看到截痕，從截痕看到曲線，從幾何角度探索出曲線的性質，後來看到行星繞太陽運行的軌道是橢圓形以及物體斜拋運動的軌跡是拋物線的實際應用，最後解析幾何將曲線以代數的型態呈現，二次曲線變成是圓錐曲線的同義詞，就讓我們用方程式的方式，來討論圓錐曲線的一些性質吧！

1. 使用相同的角度切出來的圓錐曲線的形狀，會因為圓錐頂角的大小而不同嗎？圓錐曲線形狀的相同或不同分別是什麼決定的呢？

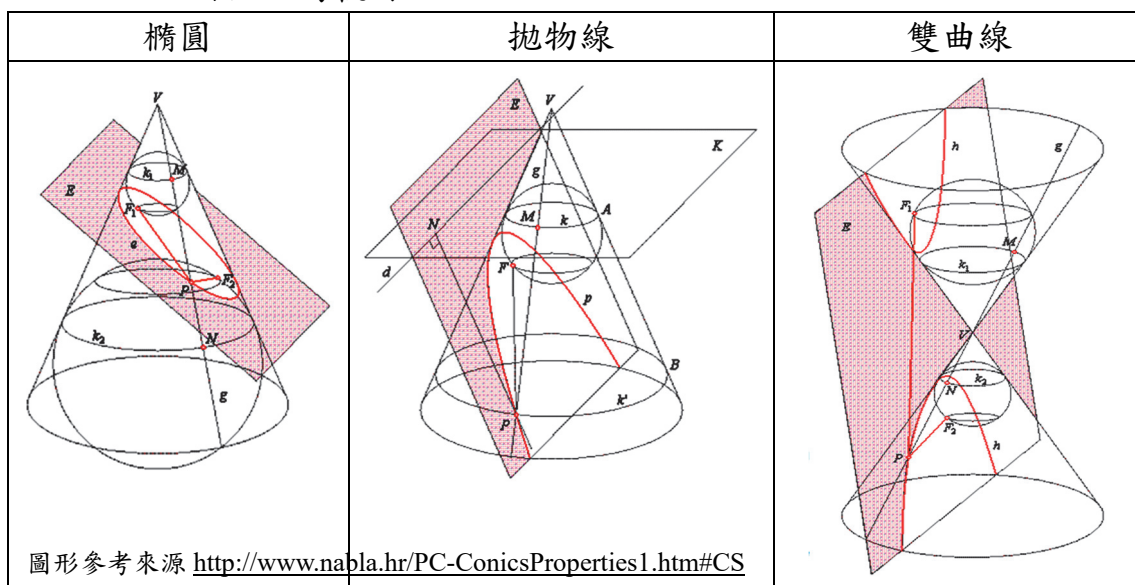


2. 下面圓錐曲線的幾何性質，我們可以利用下面的圖形讓學生看到，
問題是，為什麼會在圓錐內放顆球呢？

拋物線：在平面上，到“定點 F ”的距離與到“定直線 L ”的距離會相等之動點 P 的軌跡。

橢圓：在平面上，到兩定點 F_1, F_2 之“距離和”為一個常數之動點 P 的軌跡。

雙曲線：在平面上，到兩定點 F_1, F_2 之“距離差”為一個常數之動點 P 的軌跡。



3. 承第 2 題，課本將“定點”（其實，他應該被稱為內切球與截平面的切點才對）直接稱為“焦點”，為什麼呢？

焦點：平行光線投射於球面鏡或透鏡被反射或折射後所集聚的一點。
其中凹面鏡或會聚透鏡實際將光聚於一點，稱為「實焦點」；凸面鏡或發散透鏡使平行光看來像是發自一點，稱為「虛焦點」。

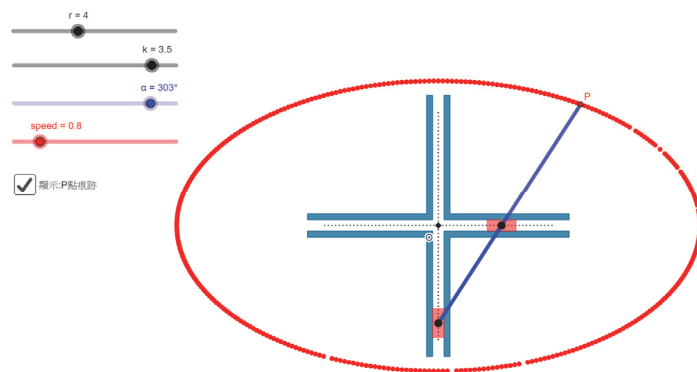
4. 將圓錐曲線的性質中的“定點”當成是“焦點”來思考時，我們可以怎麼將圓錐曲線畫出來呢？

5. 承第 2 題，課本將拋物線的“定直線”直接稱為“準線”，準線的意義是什麼？其它圓錐曲線有準線嗎？
可以參考的資料：Lecture L15 - Central Force Motion: Kepler's Laws

6. 持續受到地心引力的影響，拋出去的物體會以拋物線的態勢前進，那雙曲線呢？有辦法從力的角度來看雙曲線嗎？

7. 我們很熟悉圓、橢圓和拋物線，因為生活中很容易看得到，那雙曲線呢？哪裡看得到？被應用在哪裡呢？

8. 下面的作法可畫出橢圓，為什麼呢？



作者：官長壽圖形參考來源 <https://www.geogebra.org/m/j4jykcqe>

9. 比較圓方程式與橢圓方程式，請問，橢圓與圓有何關聯？又，圓的參數式與橢圓參數式又有何關聯？

10. 請介紹你是怎麼說明圖形的平移以及對應的方程式是如何表示的，你能不能利用相同的想法來詮釋圖形的旋轉？

二、試著撰寫下面名詞的核心概念

1. 圓錐截痕
2. 拋物線
3. 橢圓
4. 雙曲線
5. 焦點
6. 準線
7. 二次曲線
8. 二次曲線的平移與旋轉
9. 離心率

三、試著根據概念發展三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
圓錐截痕			
拋物線			
橢圓			
雙曲線			
焦點			
準線			
二次曲線			
二次曲線的 平移與旋轉			
離心率			

四、觀摩、討論&修改

1.參考影片

- (1) 數學新世界--CA--歐式與非歐幾何、圓錐曲線 教師研習 20181011 (雲林縣永年高中)
- (2) 數學新世界--CA 談數學--20180420 臺中市黎明國中 非歐幾何 圓錐曲線
- (3) 數學新世界--CA 談數學--20180420 臺中市黎明國中 圓錐曲線
- (4) 數學新世界--CA--圓錐曲線 入班教學 20180302 (臺中市黎明國中) PART1
- (5) 數學新世界--CA--圓錐曲線 入班教學 20180302 (臺中市黎明國中) PART2

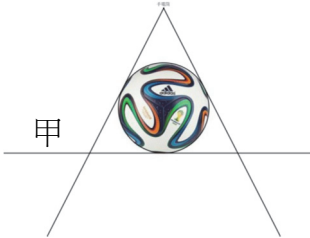
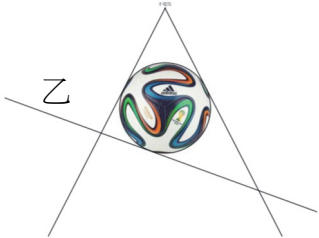
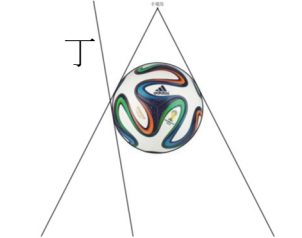
2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

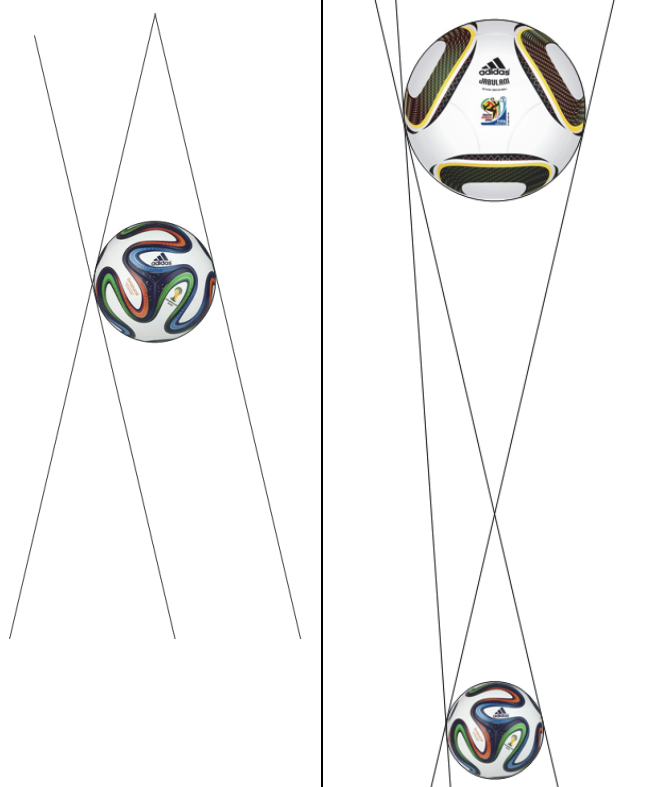
五、學習單：如附件。



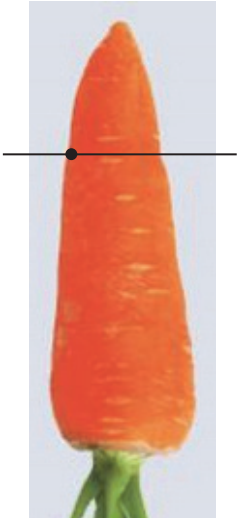
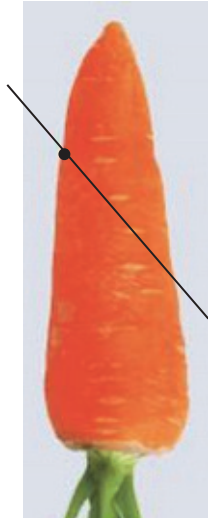
1. 將手電筒放置於球的正上方，做垂直照射，分別在甲、乙、丙、丁的位置放置一張白色厚紙板(或白板)，請在空白處，試著畫出在甲、乙、丙、丁處，球的投影圖形

甲 	乙 	丙 	丁 

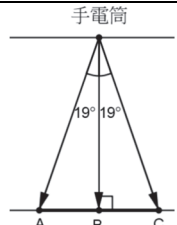
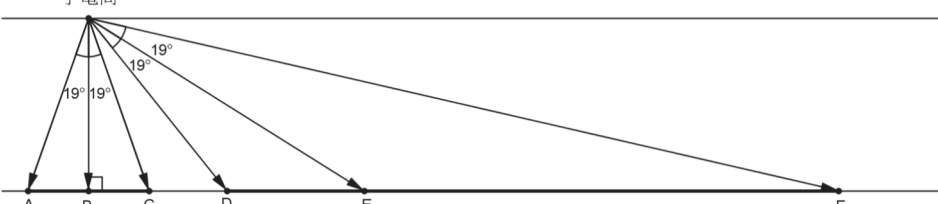
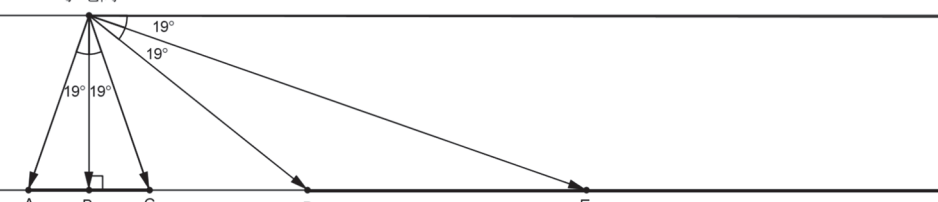
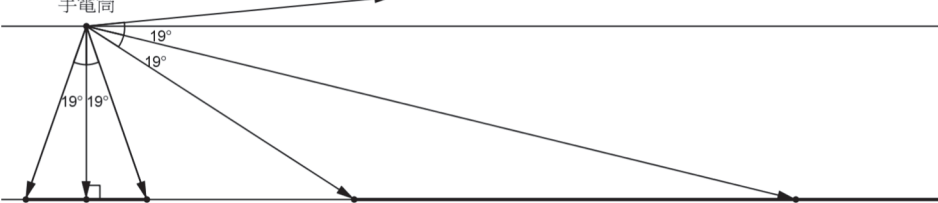
2. 想像光線逆向聚焦於發光處(手電筒)，我們仍可以看到球的投影圖形

可以逆向投影	無法逆向投影
	

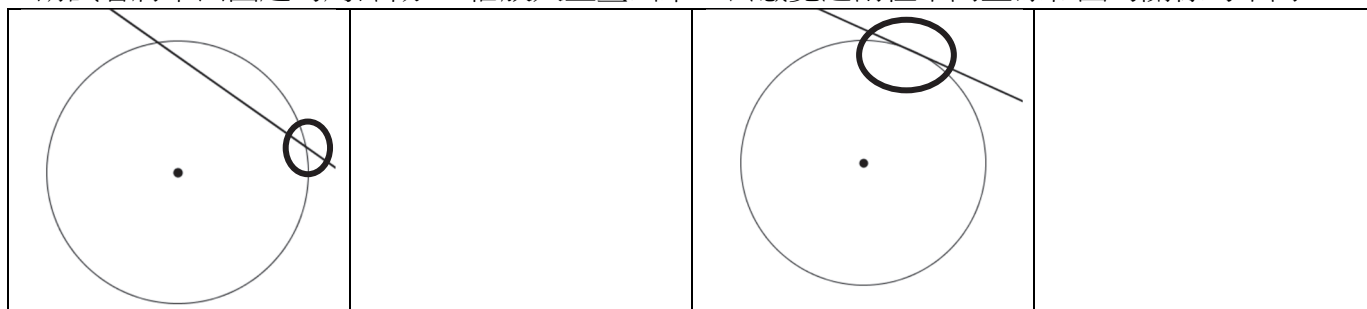
3.這是一根胡蘿蔔，下面有 4 種不同的切法，請你試著畫出截面圖形，並命名，請試著在最後一個胡蘿蔔畫出這 4 種不同切法，並標示出切法的不同

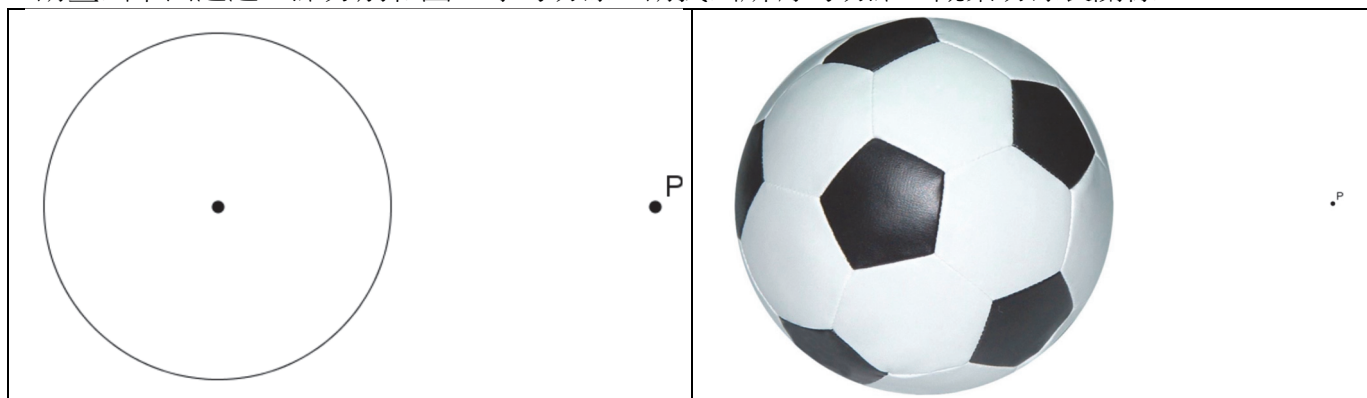
4.下面是手電筒從垂直照射，慢慢改變照射角度之後的投影，請你試著將投影的圖形畫出來

照射方式	投影圖形
手電筒  垂直照射	
手電筒 	
手電筒 	
手電筒 	

5.請試著將下面圈起的局部做 10 倍放大並畫出來，去感覺這兩種不同直線和圓的關係的不同

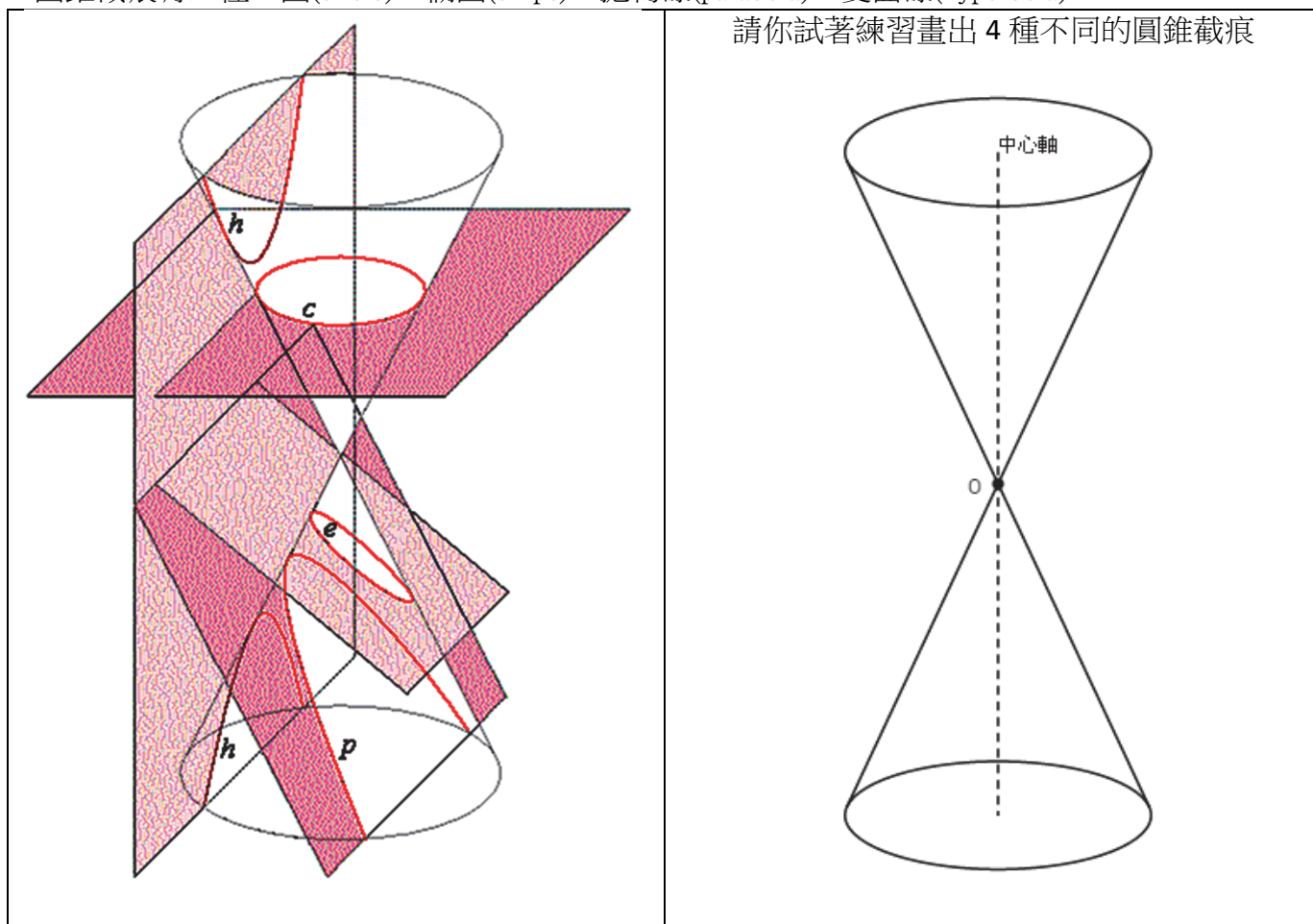


6.請畫出下面通過 P 點分別和圓、球的切線，請找出所有的切點，觀察切線長關係



7.圓錐截痕有四種：圓(circle)、橢圓(ellips)、拋物線(parabola)、雙曲線(hyperbola)

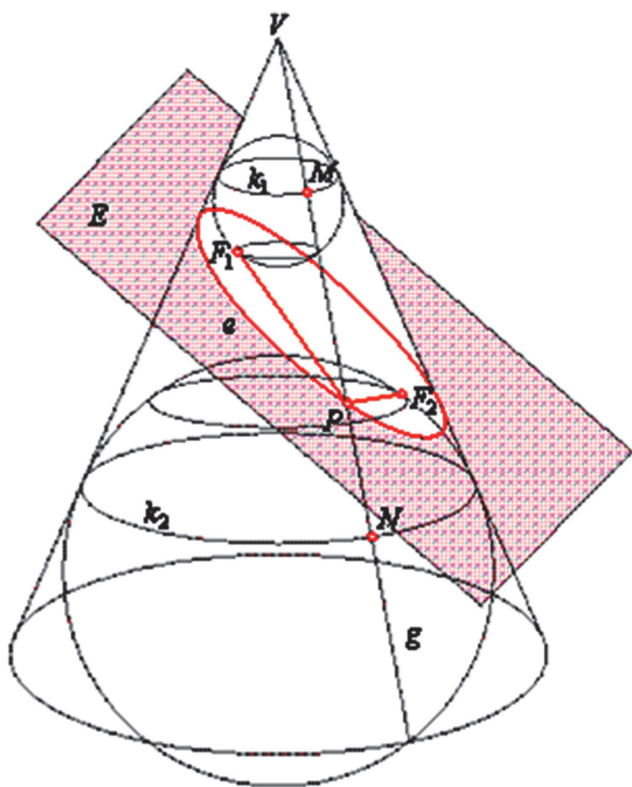
請你試著練習畫出 4 種不同的圓錐截痕



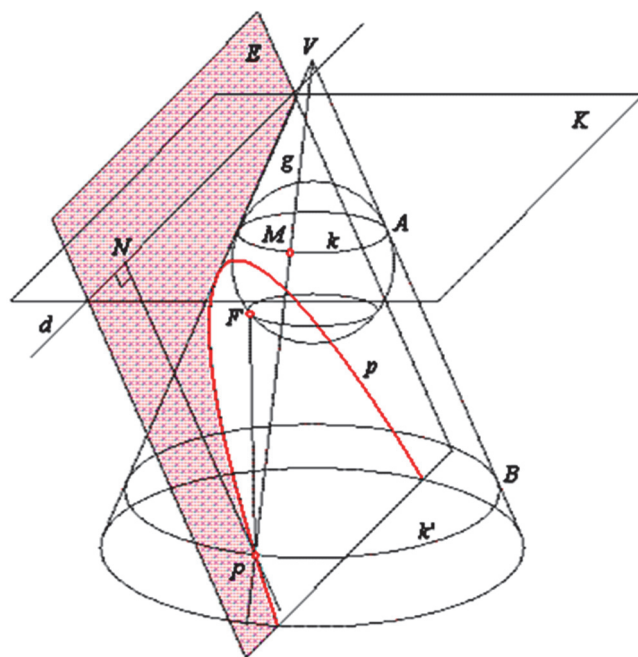
圖形參考來源 <http://www.nabla.hr/PC-ConicsProperties1.htm#CS>

8.當我們在圓錐中塞球(內切球)可以看到圓錐曲線的性質

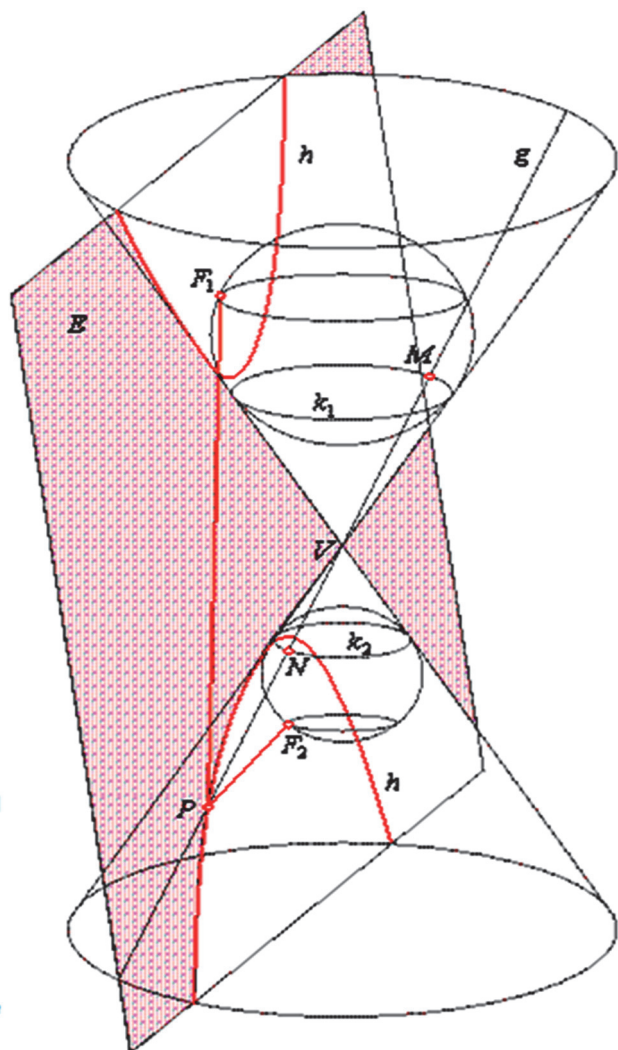
(1)橢圓



(2)拋物線



(3)雙曲線



(1)橢圓

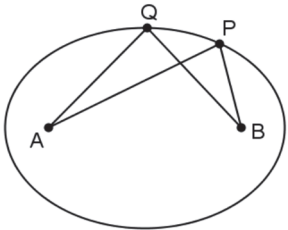
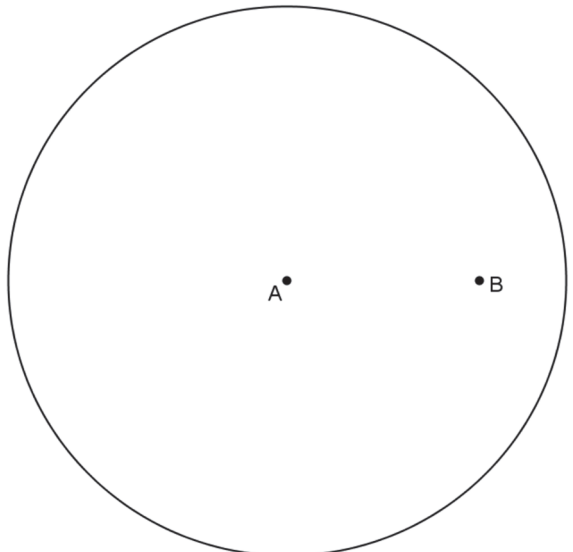
上面的球切平面 E 於 F_1 點，下面的球切平面 E 於 F_2 點，請觀察 $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ 的性質

(2)拋物線

球切平面 E 於 F 點，請觀察 $\overline{PF}$ 和 $\overline{PN}$ 的關係

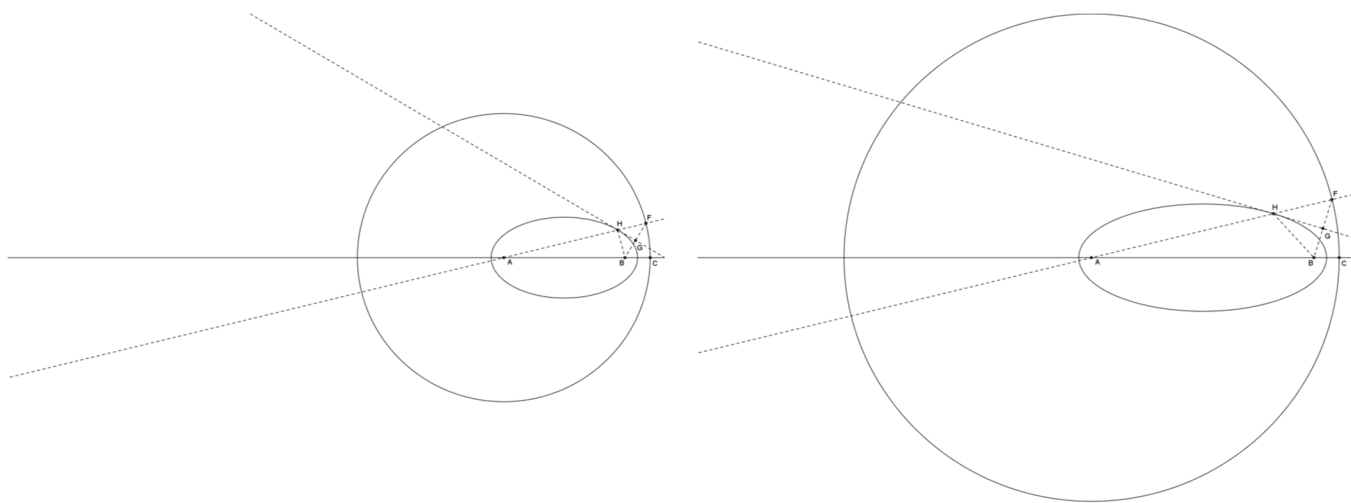
(3)上面的球切平面 E 於 F_1 點，下面的球切平面 E 於 F_2 點，請觀察 $\overline{PF_1} - \overline{PF_2}$ 的性質

8. 橢圓和參考圓

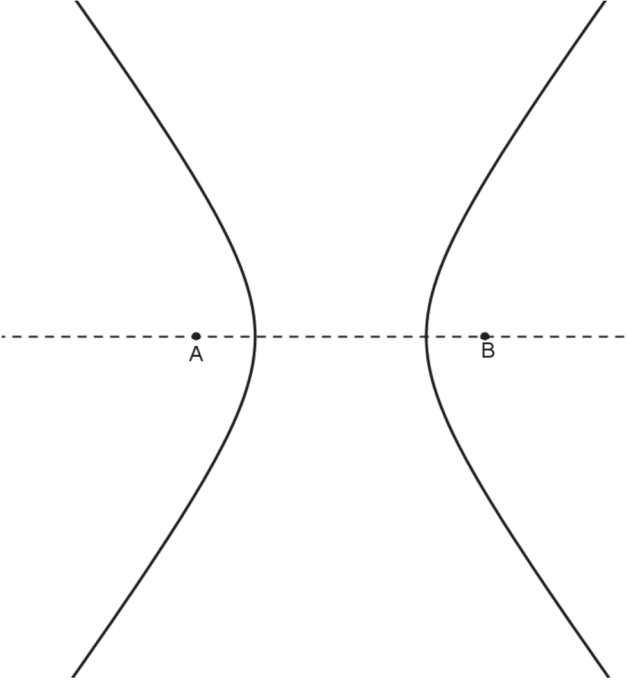
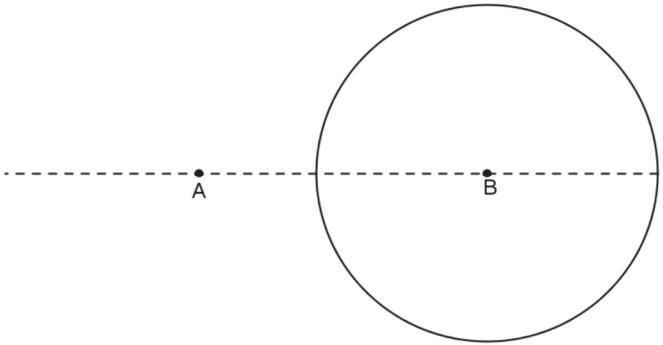
(1) 我們知道橢圓上的點到 A、B 兩個固定點的距離和會相等，請利用距離和的相等，以 A 為圓心，距離和為半徑畫出參考圓	(2) 這是橢圓的參考圓，試著利用參考圓和 A、B 兩個固定點畫出橢圓
	

(3) 請觀察上面的圖形，說明為何我們會想要將 A、B 兩個固定點稱為焦點(光的聚集處)
提示：尋找反射鏡面

(4) 觀察下面 4 個圖形的變化，當我們將焦點 A 不斷的拉離 B 點，你可以看到什麼？從 B 點發射出去的光，經過反射鏡面跑去哪裡了？



10. 雙曲線和參考圓

(1) 我們知道雙曲線上的點到 A、B 兩個固定點的距離差會相等，請利用距離差的相等，以 B 為圓心，距離差為半徑畫出參考圓	(2) 這是雙曲線的參考圓，試著利用參考圓和 A、B 兩個固定點畫出雙曲線
	

(3) 請觀察上面的圖形，說明為何我們會想要將 A、B 兩個固定點稱為焦點(光的假聚集處)
提示：尋找反射鏡面

11. 圓錐曲線的應用

(1) 如果我們希望從 P 點講出口的話都可以反射回來給自己聽到，甚至更清楚了，我們應該設計出什麼樣的反射面呢？ 	(2) 如果我們希望從 P 點講出口的話都可以反射出去讓位在 Q 點人聽到，甚至更清楚了，我們應該設計出什麼樣的反射面呢？  
--	--

(3)如果我們想設計一個反設計鏡面，讓在 P 點所發出去的光可以直直的射向遠方，方便我們辨識天上的星星，我們應該設計出什麼樣的反射面呢？

• P

(4)如果我們想設計一種鏡面，讓照射進來的光可以完全發散出去，這樣不想被拍照的時候就很好用啦，我們應該設計出什麼樣的反射面呢？

• P

12.生活實際應用(參考資料：建國中學數學教師黃世穎的生活中的圓錐曲線)

(1)加泰隆尼亞音樂宮(橢圓環繞音效)



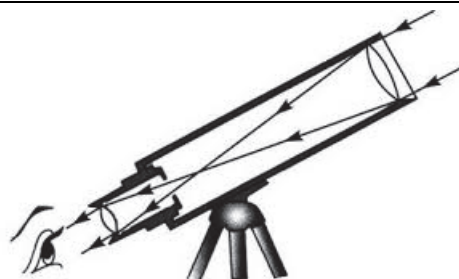
(2)路思義教堂(拋物雙曲面)



(3)小叮噹馬克斯威爾通話器(拋物線)

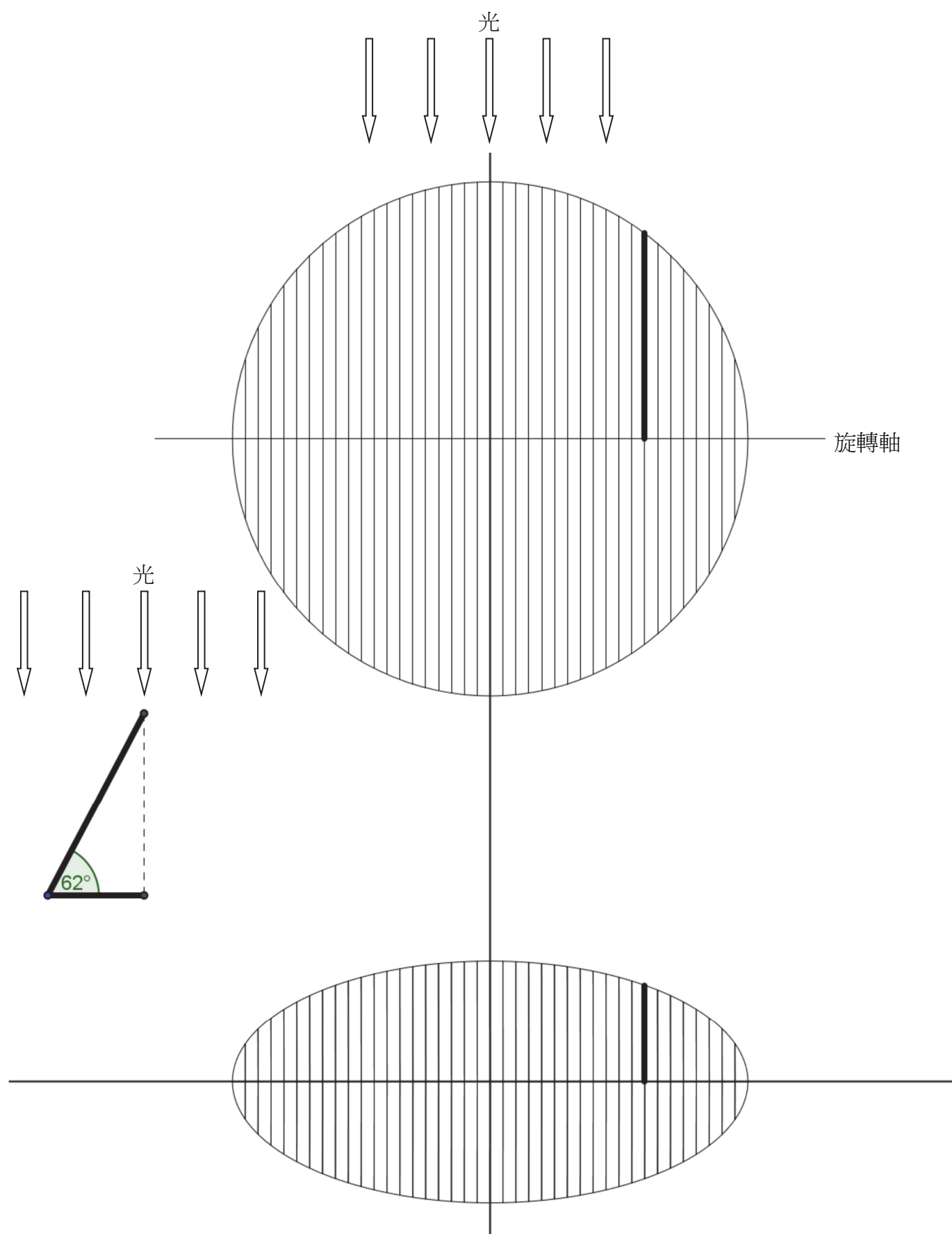


(4)天文望遠鏡(拋物線)



13. 橢圓面積

圓盤旋轉 62° 後可以得出下方的橢圓投影，試著猜猜看橢圓面積的計算式會是什麼？



重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>