

數學科教師共備手冊

國中課程

單元 10

證明與推理



數學新世界

2018年10月 編印

📖 教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

| 單元共備單 | 觀摩教學知能影片 | 學習單實踐教學 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 共備前 | 共備前 | 共備前 |
| 單元共備單反思 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 第 1 次反思單撰寫 2. CA 教學或教專研習影片觀摩 3. 撰寫觀摩影片記錄 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 撰寫與編修單元學習單 2. 確立學習單教學脈絡與設計想法 3. 使用學習單教學 |
| 共備 | 共備 | 共備 |
| <ol style="list-style-type: none"> 1. 討論單元共備單 2. 釐清數學概念知識 3. 確立單元教學脈絡 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 討論觀摩影片記錄 2. 釐清數學概念知識 3. 確立單元教學脈絡 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 分享教學心得感想 2. 討論觀課記錄 3. 發想概念發展教學設計 |
| 共備後 | 共備後 | 共備後 |
| <ol style="list-style-type: none"> 1. 核心概念細部分析 2. 概念發展的教學脈絡細部調整 3. 嘗試概念發展的教學 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 第 2 次反思單撰寫 2. 編修單元學習單 | <ol style="list-style-type: none"> 1. 編修單元學習單 2. 再次使用學習單教學 |

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

單元共備單

單元概念反思單

觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

生根單元學習單（學習單名稱：_____）

其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他

證明與推理

一、單元名稱：證明與推理

二、反思提問：

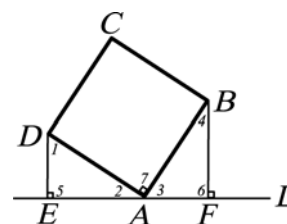
1. 什麼是定義？什麼是定理？什麼是公理？什麼是性質呢？這些名詞之間有何異同之處呢？

在證明平行四邊形對角相等時，我們可以說因為這是平行四邊形，所以對邊會等長，再透過三角形全等得證嗎？

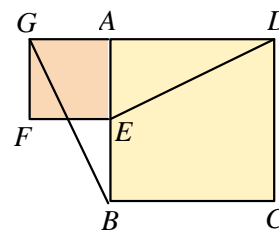
2. 證明與推理被課本設計成一個單元來進行教學，其實，我們教學中不斷地在使⽤著證明與推理，也就是說，證明與推理素養的養成應該就在平常的數學學習中，那，證明與推理素養的核心本質是什麼呢？請您試著舉例說明。

3. 下面的題目，感覺上，老師都已經知道如何證明的情況下來教學生寫證明，怎麼說明可以讓題目有動態的感覺，讓學生先有感覺的猜測，再進入證明呢？

(1) 已知：如圖，已知 $ABCD$ 是正方形， A 在 L 上， $\overline{DE} \perp L$ ， $\overline{BF} \perp L$ ，垂足分別為 E 、 F ($\overline{AE} \neq \overline{AF}$)。
求證： $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ 。



(2) 已知：如右圖，四邊形 $ABCD$ 及四邊形 $AEFG$ 皆為正方形。
求證： $\overline{DE} = \overline{BG}$ 。



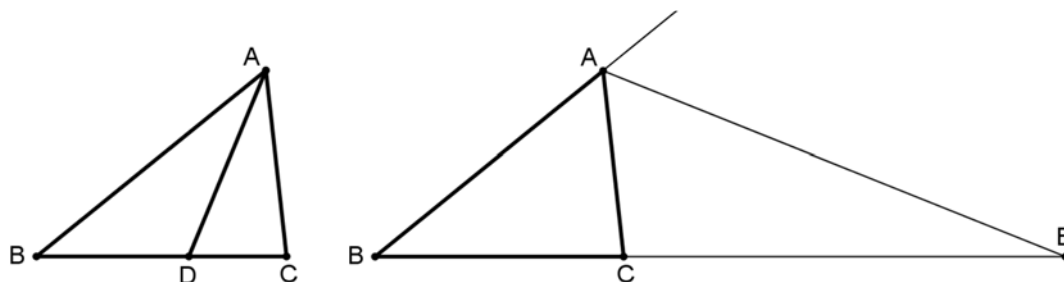
4.幾何證明的核心手段是什麼呢？試試下面幾道題目，你可以找到幾種方法解題？

(1)已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線與 \overline{BC} 交於D點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$

此題是內分比，課本是透過面積關係進行證明，有沒有別的方法呢？

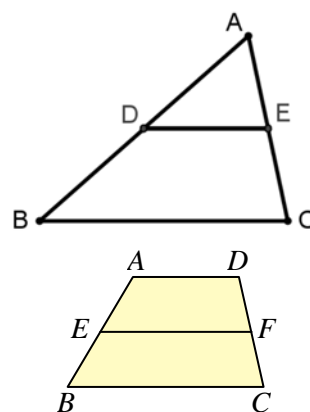
那，外分比 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$ 呢？可以有相同的方法嗎？



(2)已知： $\triangle ABC$ 中，D 為 \overline{AB} 中點，E 為 \overline{AC} 中點。

求證：(1) $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

此題課本是利用平行線截比例線段與其逆敘述的性質來證明，如果撇開課程的順序，我們還可以怎麼證明此題？



(3)已知：如右圖，梯形 ABCD 中， $\overline{AD} // \overline{BC}$ ，E、F

分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的中點。

求證： $\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 。

此題和(2)是相同類型的題目，但是課本採用的方法與(2)不同，課本採用切割拼成三角形的型態後完成證明，有沒有可以更直觀可以一以貫之的想法呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

定義

定理

性質

公理

證明

推理

輔助線

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

| 概念 | 認知 | 形成 | 使用 |
|-----|----|----|----|
| 定義 | | | |
| 定理 | | | |
| 性質 | | | |
| 公理 | | | |
| 證明 | | | |
| 推理 | | | |
| 輔助線 | | | |

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1)數學新世界--CA--談定義與性質 教師研習 20171114 (嘉義市南興國中)

PART1

(2)數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 九年級推理證明 PART 1

(3)數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 九年級推理證明 PART 2

(4)數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 教學共備 推理證明

(5)數學新世界--CA--三角形三心推理證明 教師研習 20171120 (臺中市大德國中)

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中九年級教材

證明與推理

1.放學回家後，曉華和媽媽的對話。

曉華：媽媽！媽媽！我這次數學考很好喔！

媽媽：考幾分？

曉華：70分！

第1、2題參考來源：鄭惠珊、吳淑娟

媽媽：70分而已？！

你覺得曉華和媽媽誰比較有道理？

2.晚餐後，小民和媽媽的對話。

媽媽：你今天在學校乖嗎？

小民：有啊！我很乖！

媽媽：可是你在家都不聽話，在學校會乖？

(1)媽媽可以用小民在家裡的表現來檢查小民在學校乖不乖嗎？

(2)小民怎麼說服媽媽他在學校有乖呢？

(3)媽媽該怎麼反駁小民，才可以說小民在學校不乖呢？

3.找出下面每個小題錯誤的理由並作正確修正

(1)多項式 $\frac{4x+3}{2}$ 可被化簡為 $2x+3$ 。

(2)方程式 $3x+1=6$ 經過等量公理，等號兩邊同除以2的運算可以化簡為 $x+1=2$ 。

(3)因為 $3x-1>6$ 可以得到 $3x>6$ ，因此，不等式 $3x-1>6$ 和 $3x>6$ 的會有相同的解。

(4) 2×10^{-3} 這個數字是負數。

(5)三個邊長是5、6、8的三角形是銳角三角形。

(6) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 9$

(7) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x-3)$

(8) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

4. 試著說說看

(1) 已知 $a > b$ ，所以 $a^2 > b^2$ 嗎？

(2) 已知 x 這個數字是個正整數，那麼 $4x+3$ 這個數字會是 2 的倍數嗎？

(3) 已知 x 這個數字是個偶數，那麼 $(3x+2)^2$ 這個數字會是個奇數還是偶數呢？

(4) 若 a 是正整數，且 a 除以 3 餘 2，則 a 會是偶數還是奇數呢？

5. 證明題 part1

(1) 已知：直角三角形的三邊長為 7、 b 、 c (b 、 c 為正整數)，其中 c 為斜邊長。

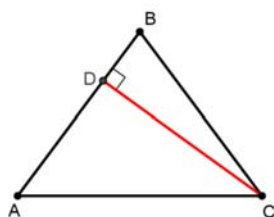
求證： $(c+b)$ 是 49 的因數。

(2) 已知： a 、 b 均為奇數。

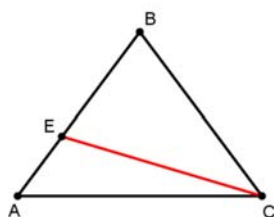
求證： ab 為奇數。

6. 畫出全等和相似

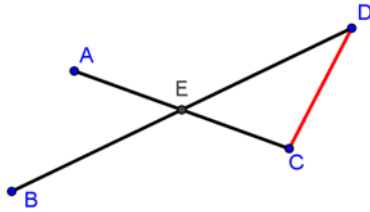
(1) 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 、 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，請試著利用三角形全等性質畫出會和 \overline{CD} 一樣長的線段，並說明相等的理由。



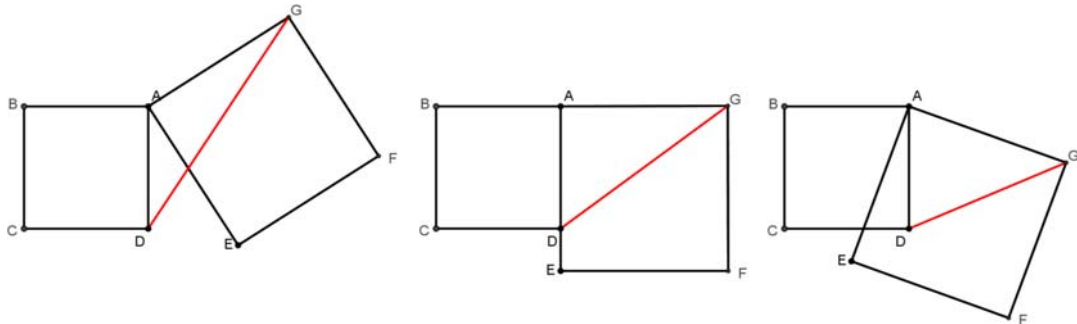
(2) 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，請試著利用三角形全等性質畫出會和 \overline{CE} 一樣長的線段，並說明相等的理由。



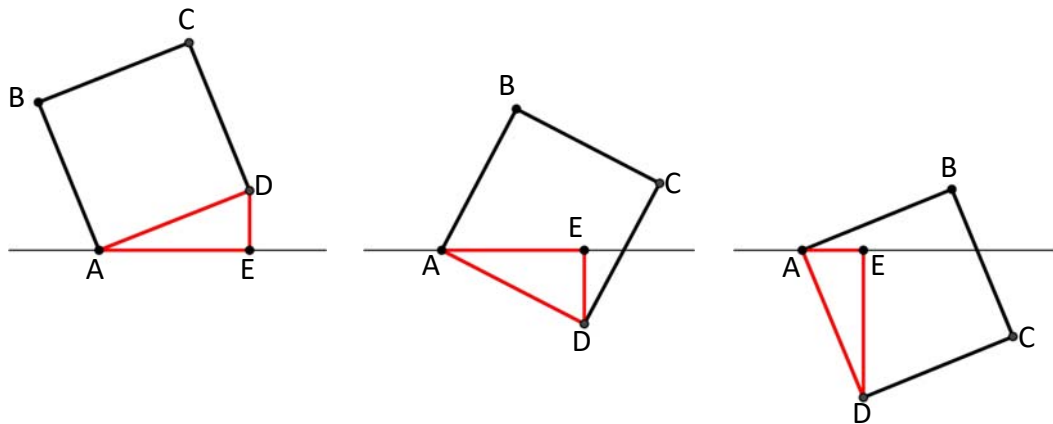
(3) 如圖， $\overline{AE} = \overline{CE}$ 、 $\overline{BE} = \overline{DE}$ ，請試著利用三角形全等性質畫出會和 \overline{CD} 一樣長的線段，並說明相等的理由。



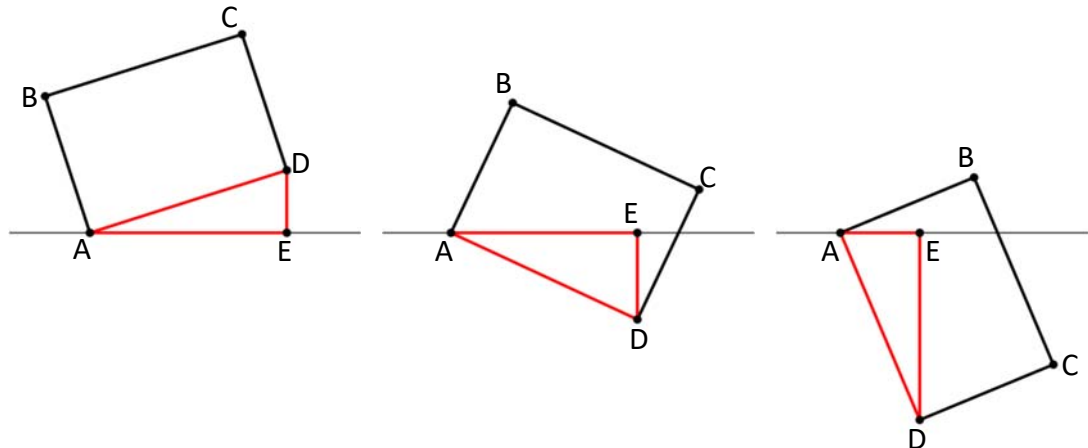
(4) 如圖，四邊形 ABCD 及四邊形 AEFB 皆為正方形，請試著利用三角形全等性質畫出會和 \overline{DG} 一樣長的線段，並說明相等的理由。



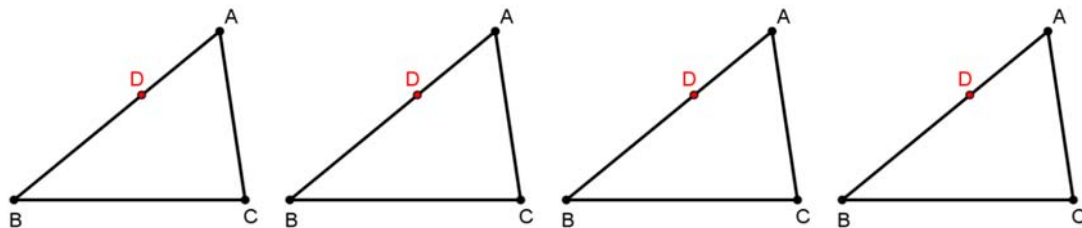
(5) 如圖，四邊形 ABCD 為正方形，請試著利用三角形全等性質畫出會和 $\triangle ADE$ 全等的三角形，並說明全等的理由。



(6) 如圖，四邊形 ABCD 為長方形，請試著利用三角形相似性質畫出會和 $\triangle ADE$ 相似的三角形，並說明相似的理由。



(6)如圖，請試著通過 D 點，利用三角形 AA 相似性質，畫出會和 $\triangle ABC$ 相似的三角形，總共有 4 種畫法喔，試著全部找出來！

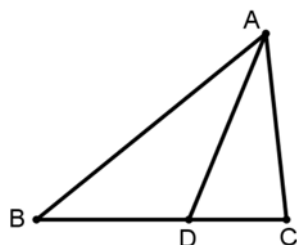


7.證明題 part2

(1)已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線與 \overline{BC} 交於 D 點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$

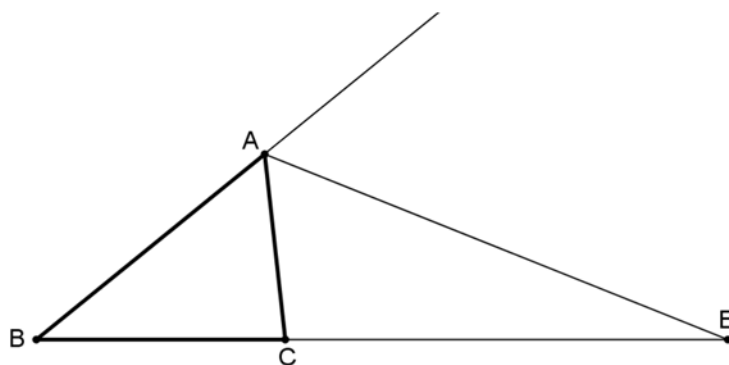
提示：請利用平行線創造出相似三角形。



(2)已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的外角平分線與 \overline{BC} 的延長線交於 E 點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$

提示：請利用平行線創造出相似三角形。

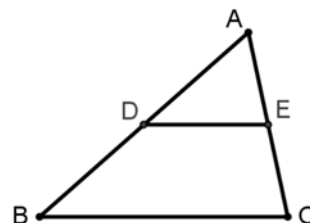


(3)已知： $\triangle ABC$ 中，D 為 \overline{AB} 中點，E 為 \overline{AC} 中點。

求證：(1) $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

提示：(1)一樣高就會是平行線

(2)利用相似三角形

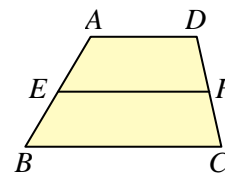


(4) 已知：如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} // \overline{BC}$ ， E 、 F 分別為 \overline{AB} 、 \overline{CD} 的中點。

求證： $\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 。

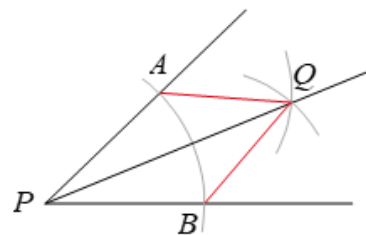
提示：(1) 一樣高就會是平行線

(2) 利用相似三角形



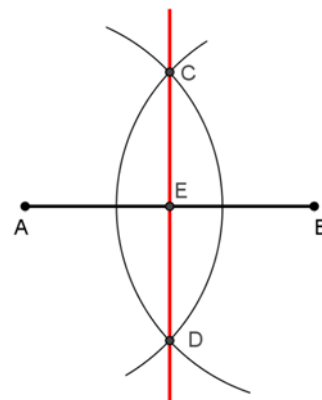
(5) 右圖使用尺規作圖畫 $\angle APB$ 的角平分線 \overrightarrow{PQ} ，請證明這樣的作圖可以讓 $\angle APQ = \angle BPQ$ 。

提示：利用全等三角形



(6) 右圖使用尺規作圖畫 \overline{AB} 的垂直平分線 \overline{CD} ，請證明這樣的作圖可以讓 $\overline{AE} = \overline{BE}$ 且 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 。

提示：利用全等三角形



重行樸實數學路
發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>