數學科教師共備手冊

高中課程

單元1

三角函數

數學新世界

2019 年 05 月 編修

教學共備 memo

一、 共備模式

（一） 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

（二） 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

（三） 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、 共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第 1 次反思單撰寫 2.CA 教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第 2 次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1. 編修單元學習單 2. 再次使用學習單教學

三、 共備紀錄表（參考版）

共備單元：______________________ **共備日期：**__________________

本次共備主持人：_______________ **共備紀錄：**__________________

🗐本次共備討論素材：

☐單元共備單
☐單元概念反思單
☐觀摩教學或研習影片（影片名稱：____________________________）
☐生根單元學習單（學習單名稱：_____________________________ ）
☐其他 ___________________________

🕮討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他

三角函數

設計：CA、陳梅仙
20190413

一、反思提問

1. 我們知道有三角學，以及，三角函數，這兩門數學主題有何異同之處？互相之間有包含關係嗎？他們主要處理的問題是什麼？每一個主題的核心知識又是什麼(用什麼手段來解決問題)？在高中階段，分別要介紹到哪裡才到位？

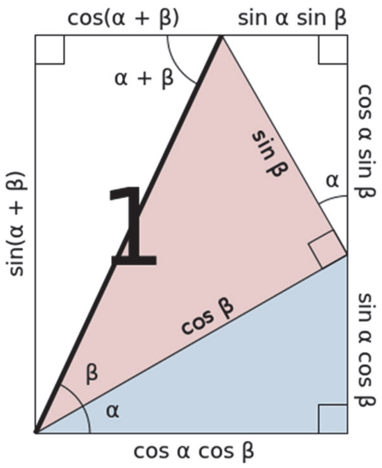
2. 三角函數，既然它標示著函數，那麼這些函數想要呈現的是什麼樣的變化關係呢？

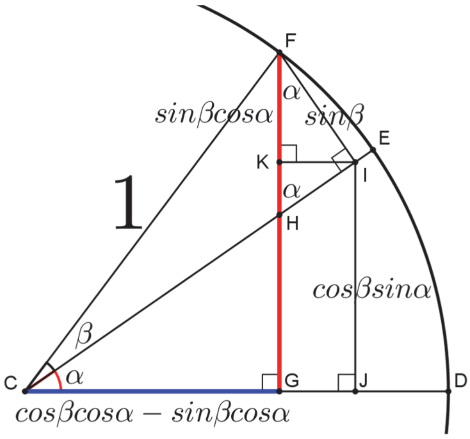
3. 在三角函數中，有人使用度(360 度)也有人使用徑度(π)的方式來表示一個角的大小，請分別說明使用這兩種方式的時機以及適切性！

4. 三角函數的名詞跟圓息息相關，為什麼會考慮到圓這個議題？這些名詞又是如何命名的？

5. 三角函數所有書本的定義都是：對邊比斜邊，對邊比鄰邊，鄰邊比斜邊，鄰邊比對邊，斜邊比鄰邊，斜邊比對邊。這種用比值的方式來定義函數的概念跟函數的變化本質似乎格格不入，這樣定義的優缺點何在？要怎麼說明這些定義的本質最能展現三角函數的本意？

6. 三角函數都不是線性函數，因此有必要引入和差公式，通常有許多方式可以介紹這些公式的來龍去脈，下面兩種介紹方式非常直觀好理解，可是又有些微的差別，請分析這些差別所呈現出來的意義，就教學以及後來的發展哪一種表示方式比較有利，原因何在？





7. 接上題，$a\sin\theta + b\cos\theta$ 的公式可以怎麼看？

8. 三角函數，其函數值有正有負，到底那是根據什麼想法或需求決定的？

9. 既然談到三角函數，那麼難免會考慮到各個函數在不同角度的變化，高中階段，我們通常利用函數圖形來做說明，可是，就變化的精確描述，還是以微分最為精準，在學過和角公式以及一些極限的概念之後，我們習慣用代數合併極限來求得微分，就理解而言，畫圖是最好的方式，可不可能用畫圖的方式來求三角函數的微分？

10. 我們學過勾股弦定理(畢氏定理)，一個△ABC 其對應邊的長度分別為 a、b、c，當∠C 為90°、小於90°、大於90°時，我們分別有：a 平方加 b 平方等於、大於、小於 c 平方的性質，那麼，大多少？小多少呢？可不可以用這個角度來談餘弦定理呢？怎麼談呢？

二、試著撰寫下面名詞的核心概念

1. 三角學
2. 三角函數
3. 單位圓對於三角函數的意義
4. 三角函數的正負數
5. 徑度(π)
6. 和角公式
7. 三角函數的合成
8. 餘弦定理
9. 三角函數的微分

三、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
三角學			
三角函數			
單位圓			
三角函數的正負數			
徑度			
和角公式			
三角函數的合成			
餘弦定理			
三角函數的微分			

四、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics 即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1) 數學新世界_CA 概念詮釋_三角函數的定義 20180710

(2) 數學新世界--CA--三角函數暨其正負號 入班教學 20180622 (臺中市黎明國中) PART1

(3) 數學新世界--CA--三角函數暨其正負號 入班教學 20180622 (臺中市黎明國中) PART2

(4) 數學新世界--CA--三角函數 入班教學 九年級 20180604 (彰化縣永靖國中) PART1

(5) 數學新世界--CA--三角函數 入班教學 九年級 20180604 (彰化縣永靖國中) PART2

(6) 數學新世界--CA--三角函數 入班教學 20180307 (屏東縣萬新國中) PART1

(7) 數學新世界--CA--三角函數 入班教學 20180307 (屏東縣萬新國中) PART2

(8) 數學新世界--CA--三角函數 入班教學 20180307 (屏東縣萬新國中) PART3

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

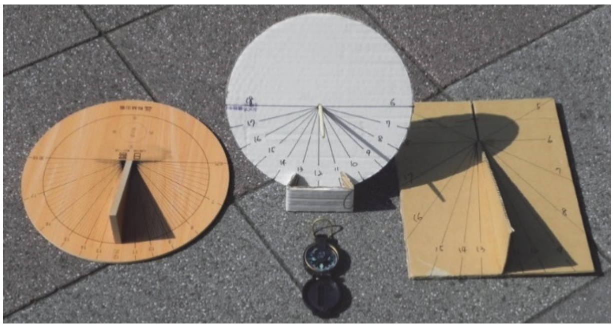
3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、學習單：如附件。

三角函數

設計：CA、陳梅仙
20190413

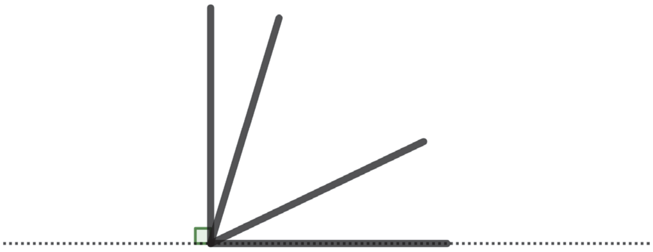
1. 古時候的人利用日晷來知道時間，日晷是怎麼讓古時候的人知道時間的呢？



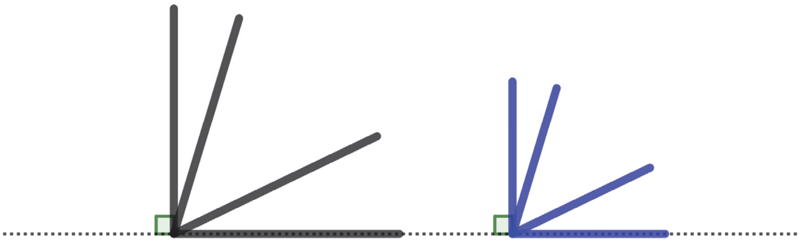
2. 在日正當中架設電線杆的時候，電線杆會從地面慢慢地被立直，過程中，我們會看到，電線杆越來越高，電線杆的影子也越來越短。

(1) 請畫出下面電線杆在不同位置的投影和高度。

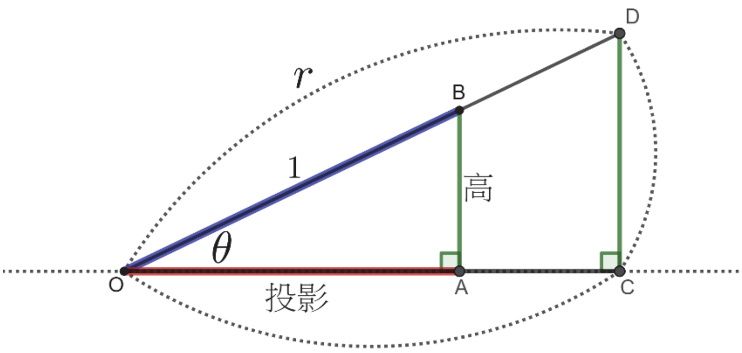
(2) 電線杆的高度和投影長度的改變是受到什麼的影響呢？



(3) 請畫出下面兩根電線杆在相同位置的投影和高度，長度不同的原因是什麼呢？



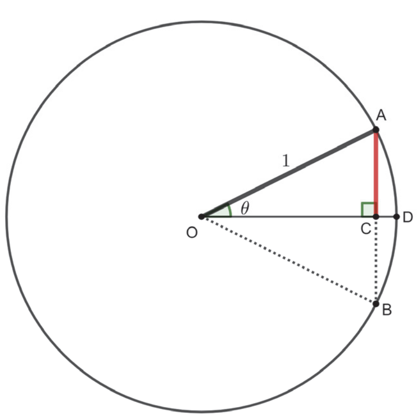
3. 從右圖我們可以看到電線杆越長，相同角度的投影和高度都會越長，請利用下圖的長度表現電線杆$\overline{OD}$的投影和高度各有多少？



4. 上面的題目我們看到單位長度的厲害與好算，因此，我們利用「單位圓」來描述因為角度的變化會造成那些長度的改變並作命名。

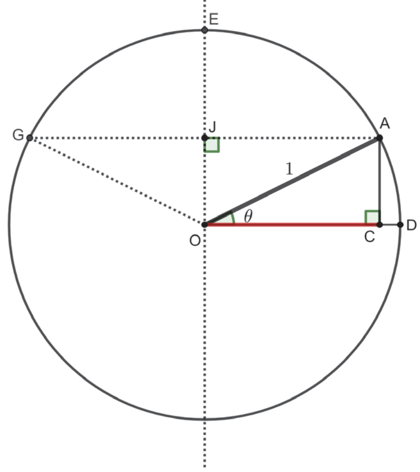
(1) 正弦函數：sinθ

單位圓角度θ所正對到的弦長(高)



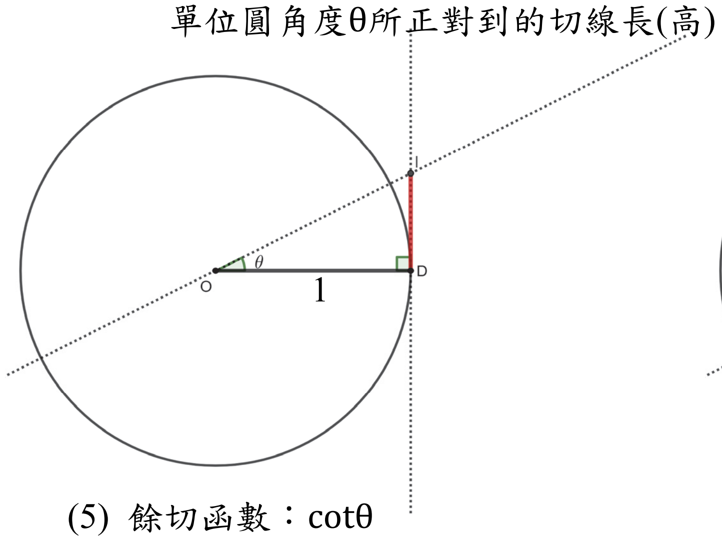
(2) 餘弦函數：cosθ

單位圓角度θ的餘角所正對到的弦長(投影)



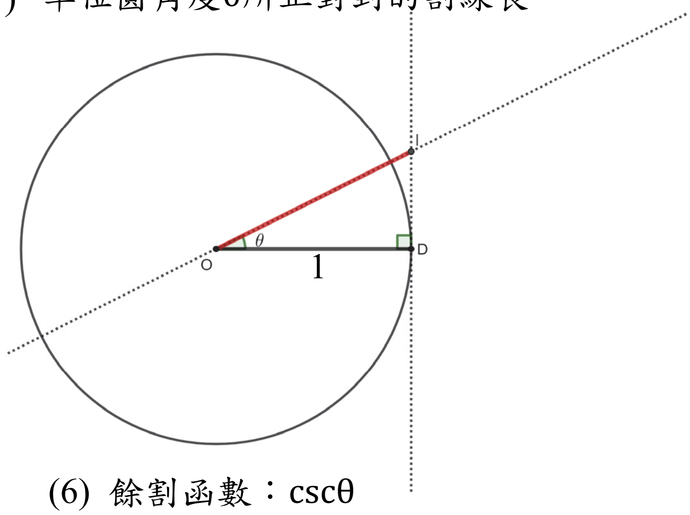
(3) 正切函數：tanθ

單位圓角度θ所正對到的切線長(高)



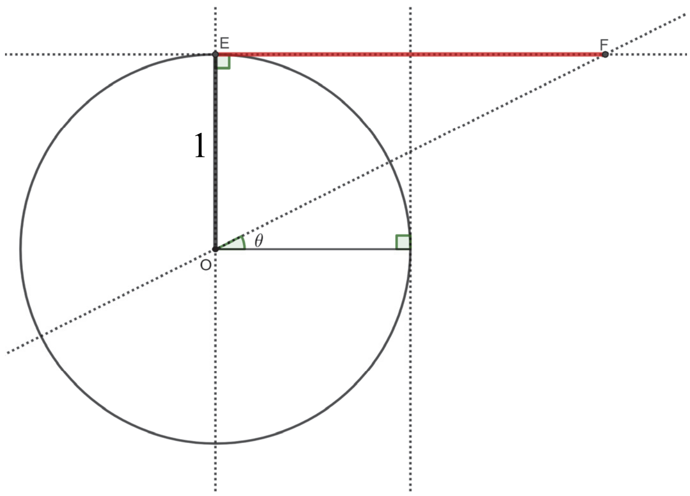
(4) 正割函數：secθ

單位圓角度θ所正對到的割線長



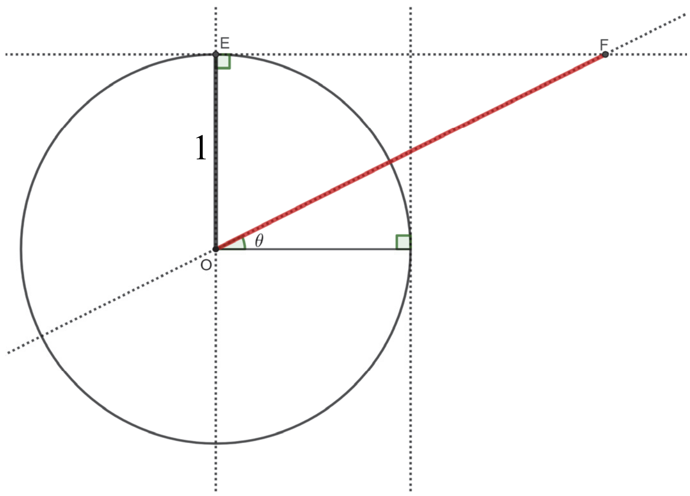
(5) 餘切函數：cotθ

單位圓角度θ的餘角所正對到的切線長(高)

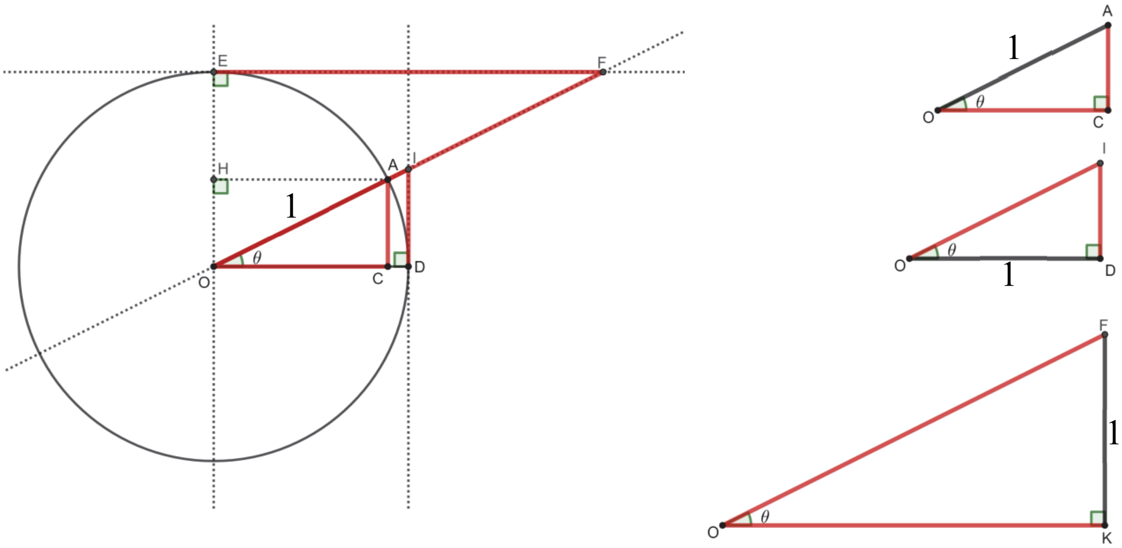


(6) 餘割函數：cscθ

單位圓角度θ的餘角所正對到的割線長



5. 請你將第 4 題的 6 個三角函數標記在下圖中正確的線段位置。



6. 請利用上面的圖形寫出下面三角函數的值

(1) $\sin 30^\circ =$ ______、$\cos 30^\circ =$ ______、$\tan 30^\circ =$ ______

(2) $\cot 30^\circ =$ ______、$\sec 30^\circ =$ ______、$\csc 30^\circ =$ ______

(3) $\sin 60^\circ =$ ______、$\cos 60^\circ =$ ______、$\tan 60^\circ =$ ______

(4) $\cot 60^\circ =$ ______、$\sec 60^\circ =$ ______、$\csc 60^\circ =$ ______

(5) $\sin 45^\circ =$ ______、$\cos 45^\circ =$ ______、$\tan 45^\circ =$ ______

(6) $\cot 45^\circ =$ ______、$\sec 45^\circ =$ ______、$\csc 45^\circ =$ ______

7. 請在第 5 題找出**直角三角形**，並利用畢氏定理寫出這 6 個三角函數彼此之間會有哪些關係式？

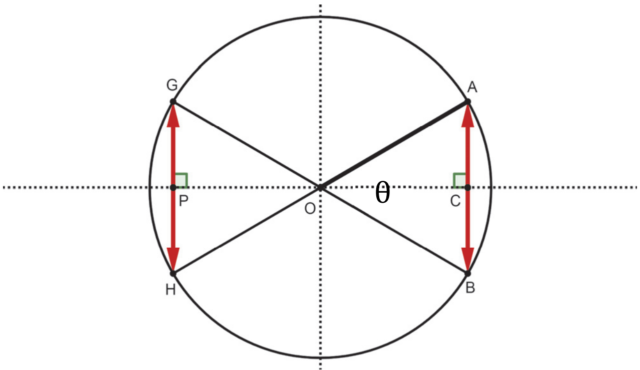
8. 請在第 5 題找出**相似形**，並利用邊長成比例的關係寫出這 6 個三角函數彼此之間會有哪些關係式？

9. 我們知道角度的大小會影響三角函數的值的大小，在這裡我們想進一度理解角度的大小會如何影響著三角函數的值的正負號。

(1) 正弦函數：sinθ

以半徑為基準來看sinθ的方向

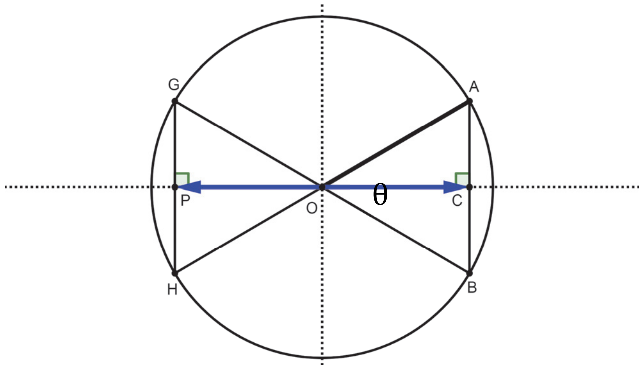
請標記當角度的位置不同時sinθ的正負



(2) 餘弦函數：cosθ

以半徑為基準來看cosθ的方向

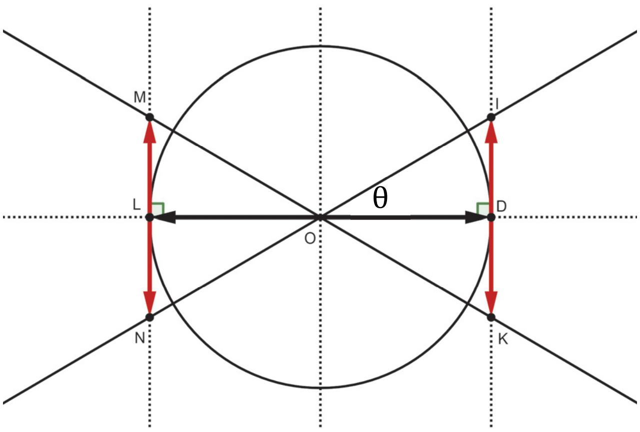
請標記當角度的位置不同時cosθ的正負



(3) 正切函數：tanθ

以 x 軸為基準來看tanθ的方向

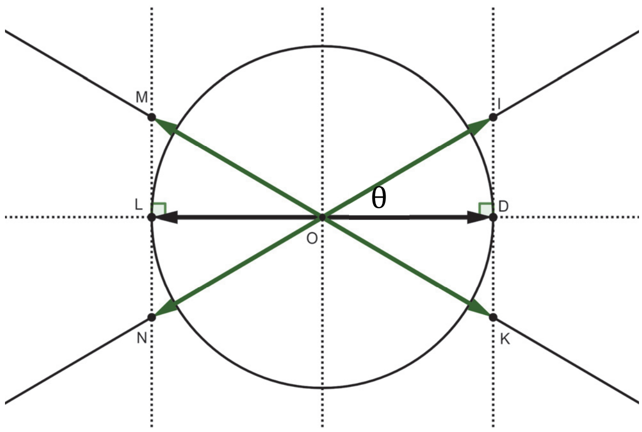
請標記當角度的位置不同時tanθ的正負



(4) 正割函數：secθ

以 x 軸為基準來看secθ的方向

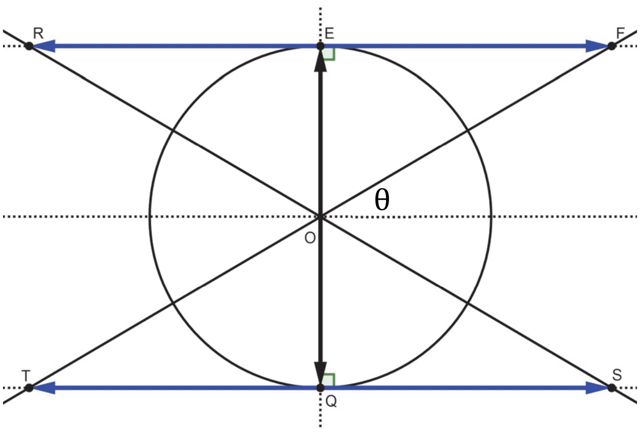
請標記當角度的位置不同時secθ的正負



(3) 餘切函數：cotθ

以 y 軸為基準來看cotθ的方向

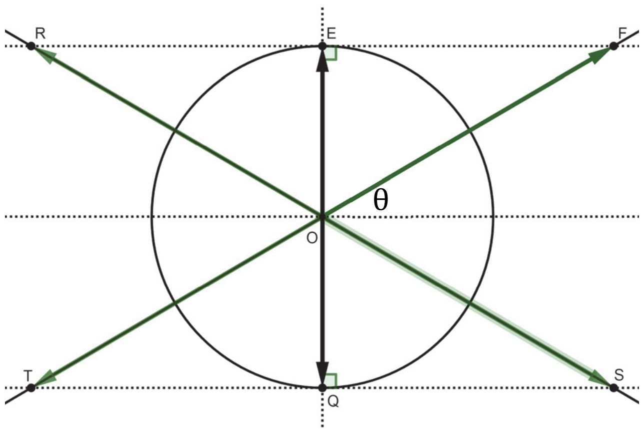
請標記當角度的位置不同時cotθ的正負



(4) 餘割函數：cscθ

以 y 軸為基準來看cscθ的方向

請標記當角度的位置不同時cscθ的正負



10. 請模仿(1)並利用第 8 題的圖形寫出下面的答案。

(1) $\sin(180° - \theta) = \sin\theta$、$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$、$\sin(-\theta) = \sin\theta$

(2) $\cos(180° - \theta) =$ ____、$\cos(180° + \theta) =$ _____、$\cos(-\theta) =$ ____

(3) $\tan(180° - \theta) =$ ____、$\tan(180° + \theta) =$ _____、$\tan(-\theta) =$ ____

(4) $\cot(180° - \theta) =$ ____、$\cot(180° + \theta) =$ _____、$\cot(-\theta) =$ ____

(5) $\sec(180° - \theta) =$ ____、$\sec(180° + \theta) =$ _____、$\sec(-\theta) =$ ____

(6) $\csc(180° - \theta) =$ ____、$\csc(180° + \theta) =$ _____、$\csc(-\theta) =$ ____

11. 請模仿(1)並利用第 8 題的圖形寫出下面的答案。

(1) $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$、$\sin(90° + \theta) = -\cos\theta$

(2) $\cos(90° - \theta) =$ ____、$\cos(90° + \theta) =$ ______

(3) $\tan(90° - \theta) =$ ____、$\tan(90° + \theta) =$ ______

(4) $\cot(90° - \theta) =$ ____、$\cot(90° + \theta) =$ ______

(5) $\sec(90° - \theta) =$ ____、$\sec(90° + \theta) =$ ______

(6) $\csc(90° - \theta) =$ ____、$\csc(90° + \theta) =$ ______

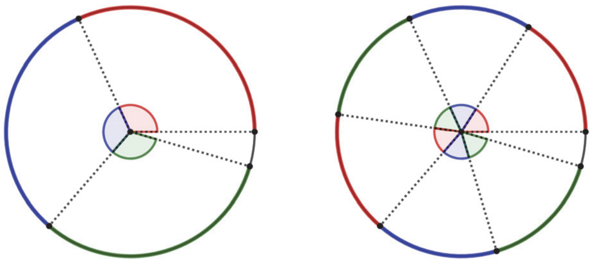
12. 我們知道角度的改變會影響三角函數的值的變化，我們也知道使用單位圓以半徑為基準就可以直接從長度看到三角函數的值，**但是**，角度的單位是度度量，三角函數的值是半徑量，如果我們想透過畫圖來表現三角函數的**形狀**，角度和三角函數的值就必須使用相同的單位來進行度量，否則，圖形所呈現的**比例**關係就會因為單位使用的不同而無法定形。那麼，角度有機會使用半徑來度量嗎？單位圓中什麼樣的長度變化和角度的變化剛好是等比例關係呢？

13. 左圖是用**直徑**來測量圓周長，可以量出 3.14 次，也就是 **π** 次。

(1) 右圖是用**半徑**來測量圓周長，可以量出_____次，也就是_____次。

(2) 左圖的每個角度大約幾度？會□大於□等於□小於 120 度。

(3) 右圖的每個角度大約幾度？會□大於□等於□小於 60 度。

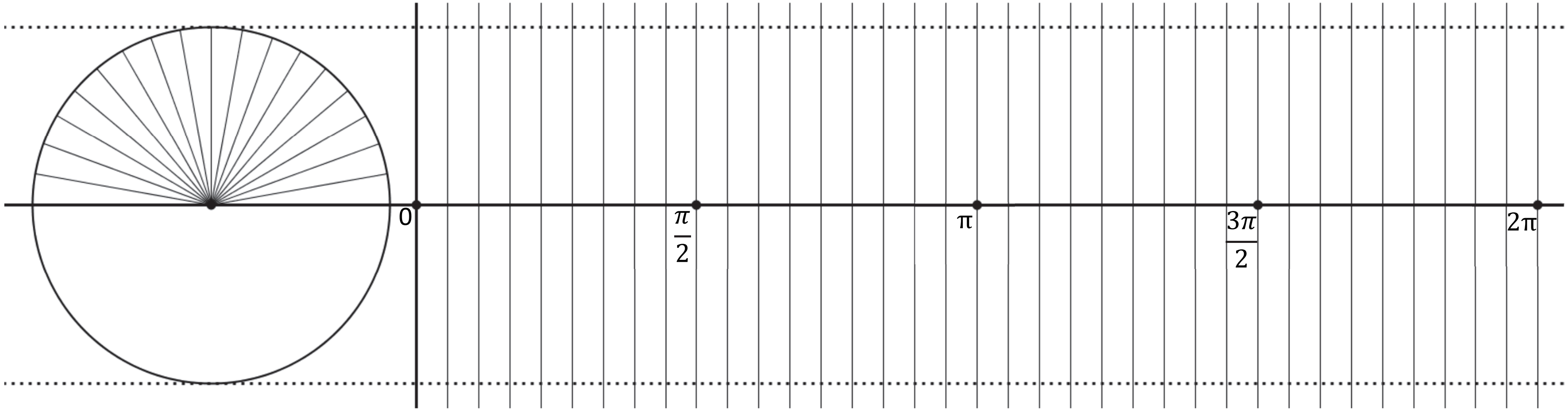


14. 度度量和弳度量(用半徑的長來測量圓心角所對的弧長)的對照表。

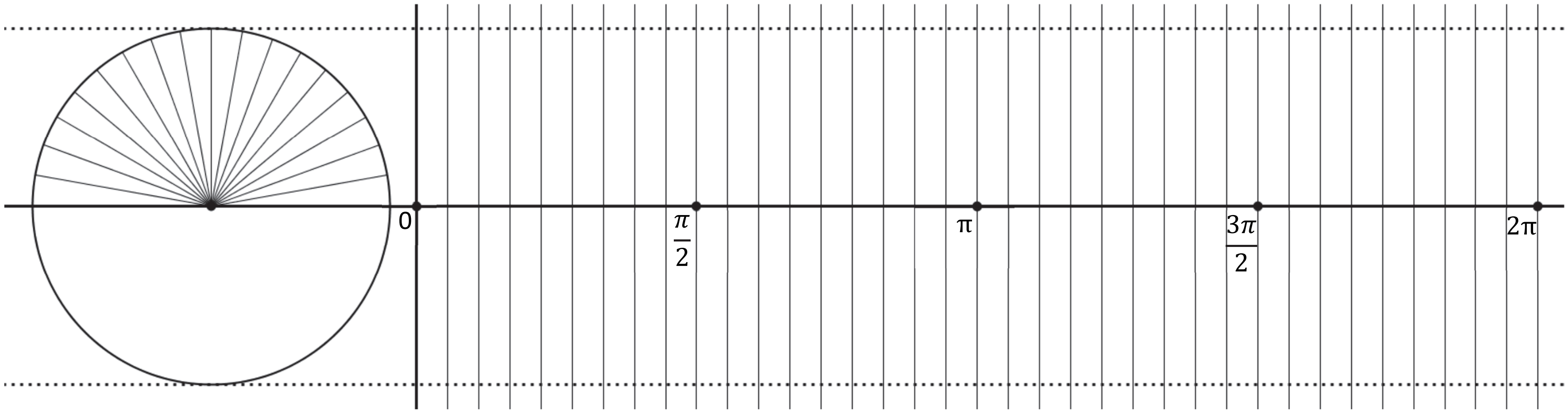
度度量	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
弳度量	0						$\frac{\pi}{2}$						π

15. 請問「弳度 1」和「60 度」的弧長，誰比較長？

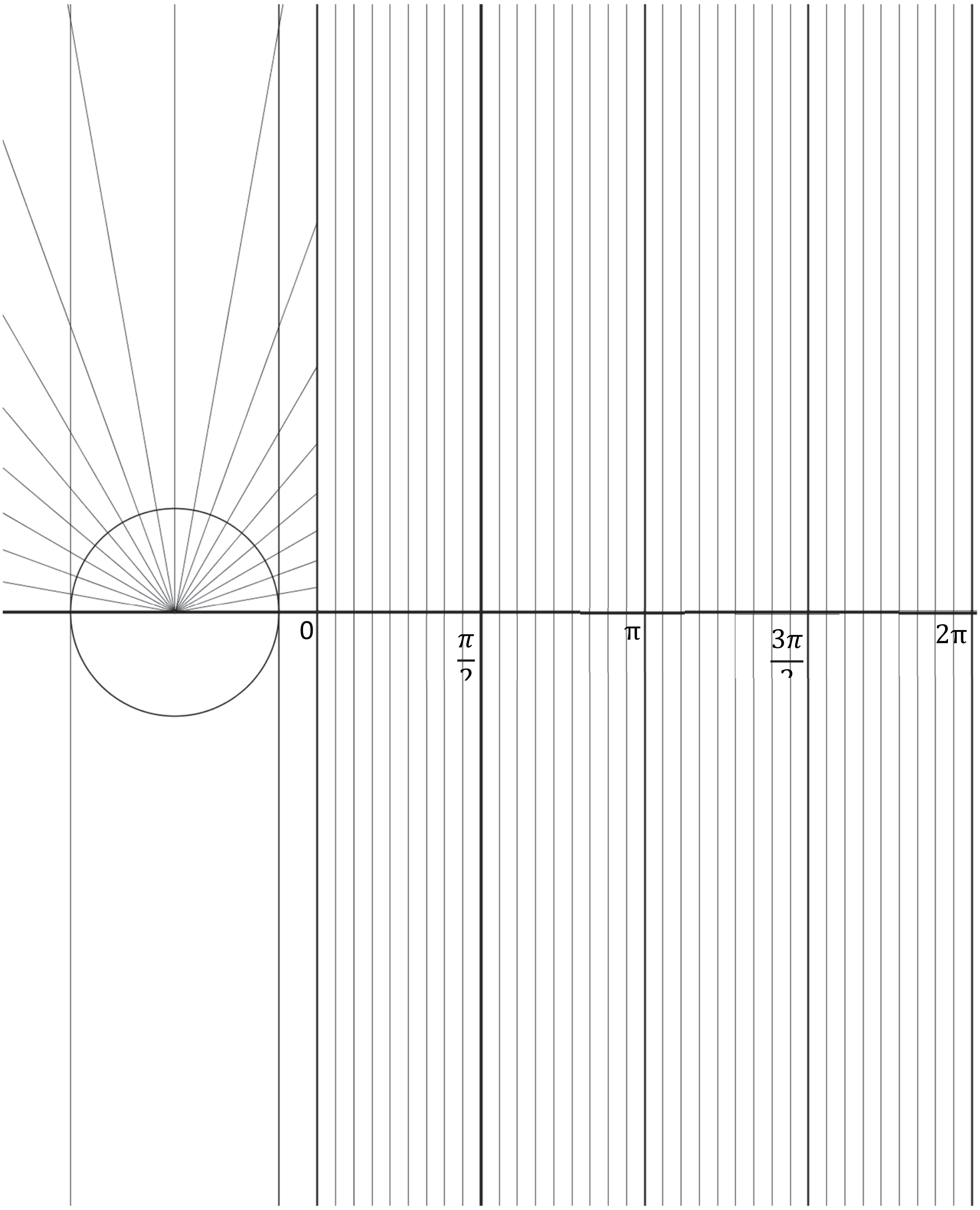
16. 請利用左方的單位圓畫出**正弦函數sinθ**的函數圖形。



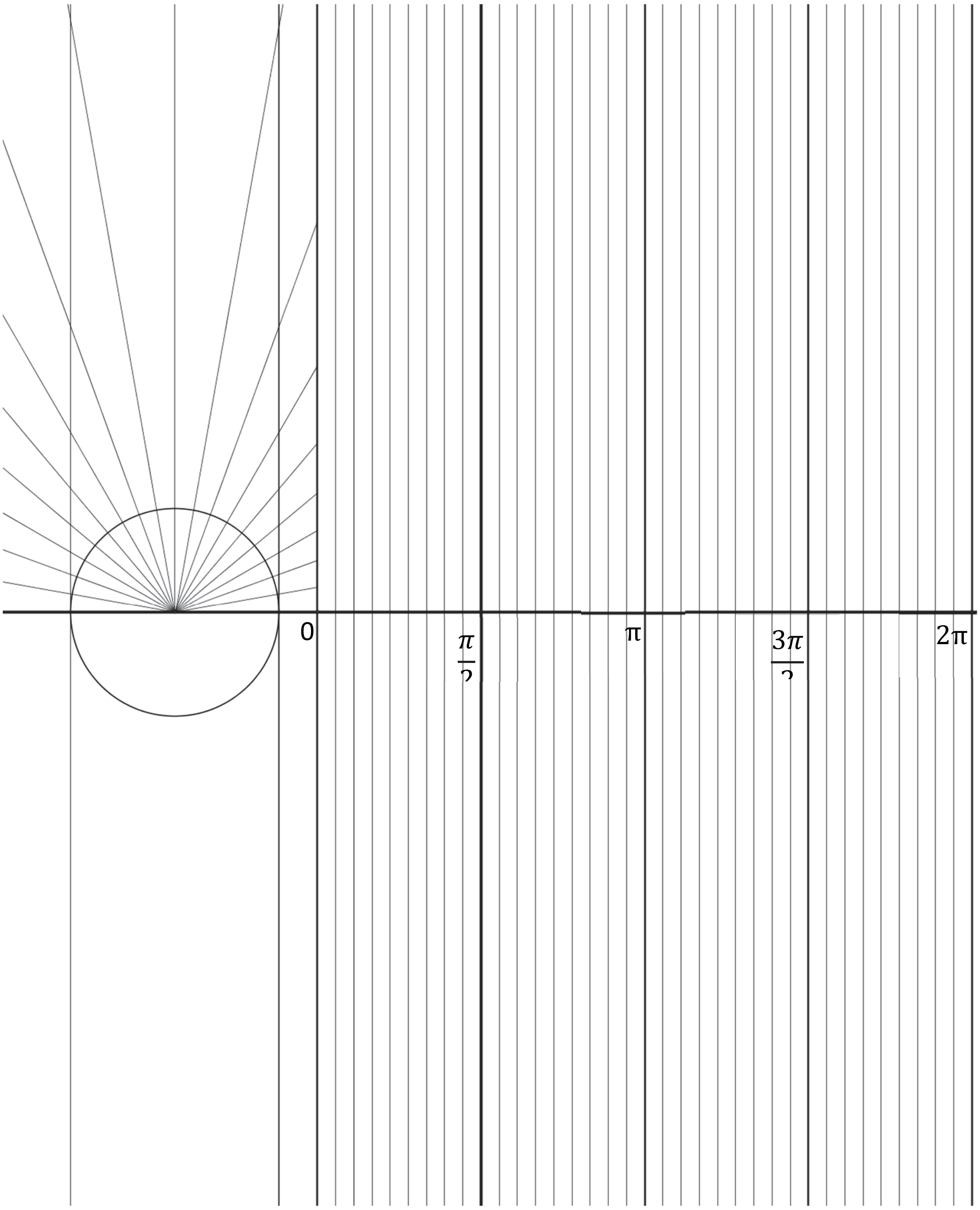
17. 請利用左方的單位圓畫出**餘弦函數cosθ**的函數圖形。



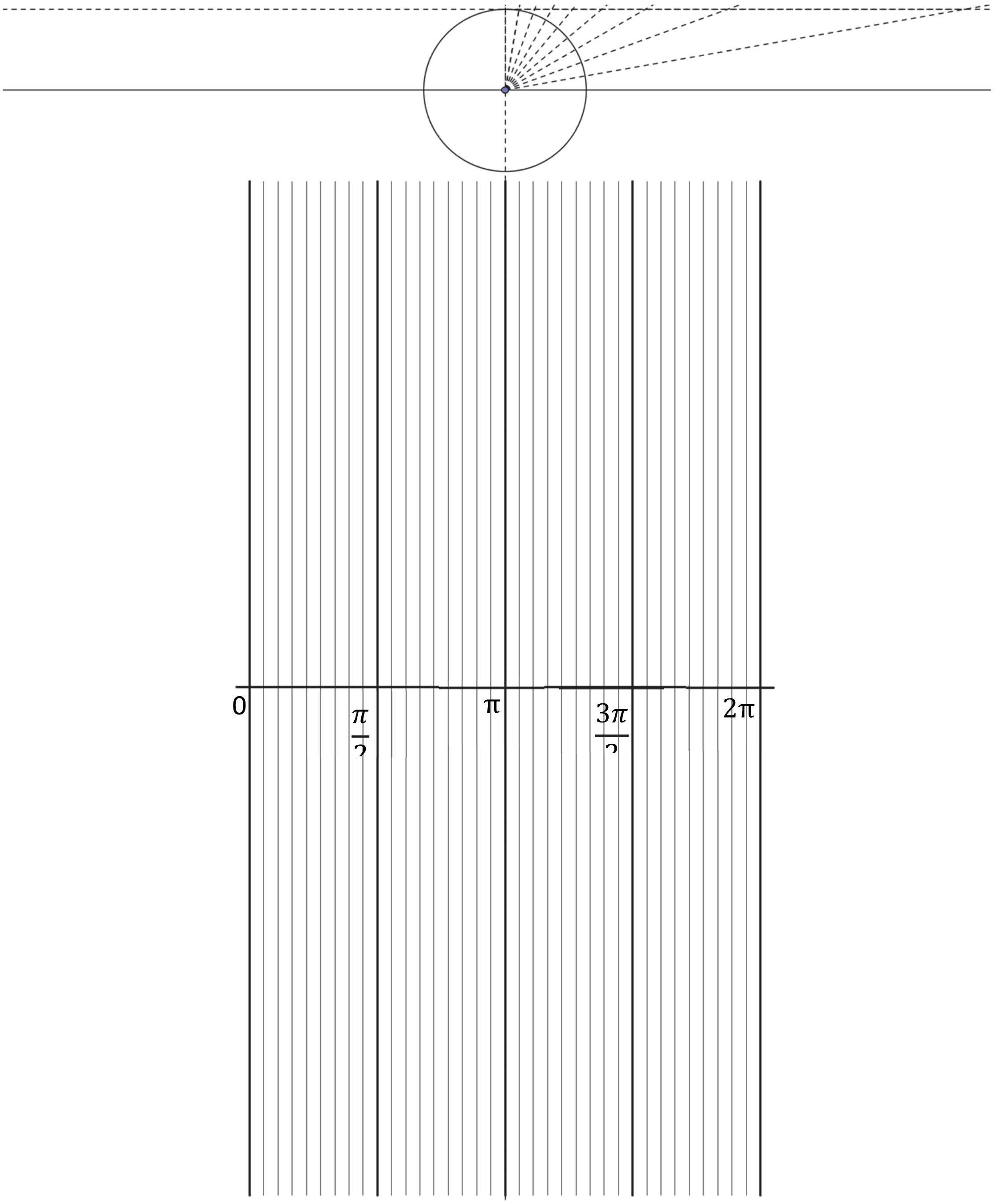
18. 請利用左方的單位圓畫出**正切函數tanθ**的函數圖形。



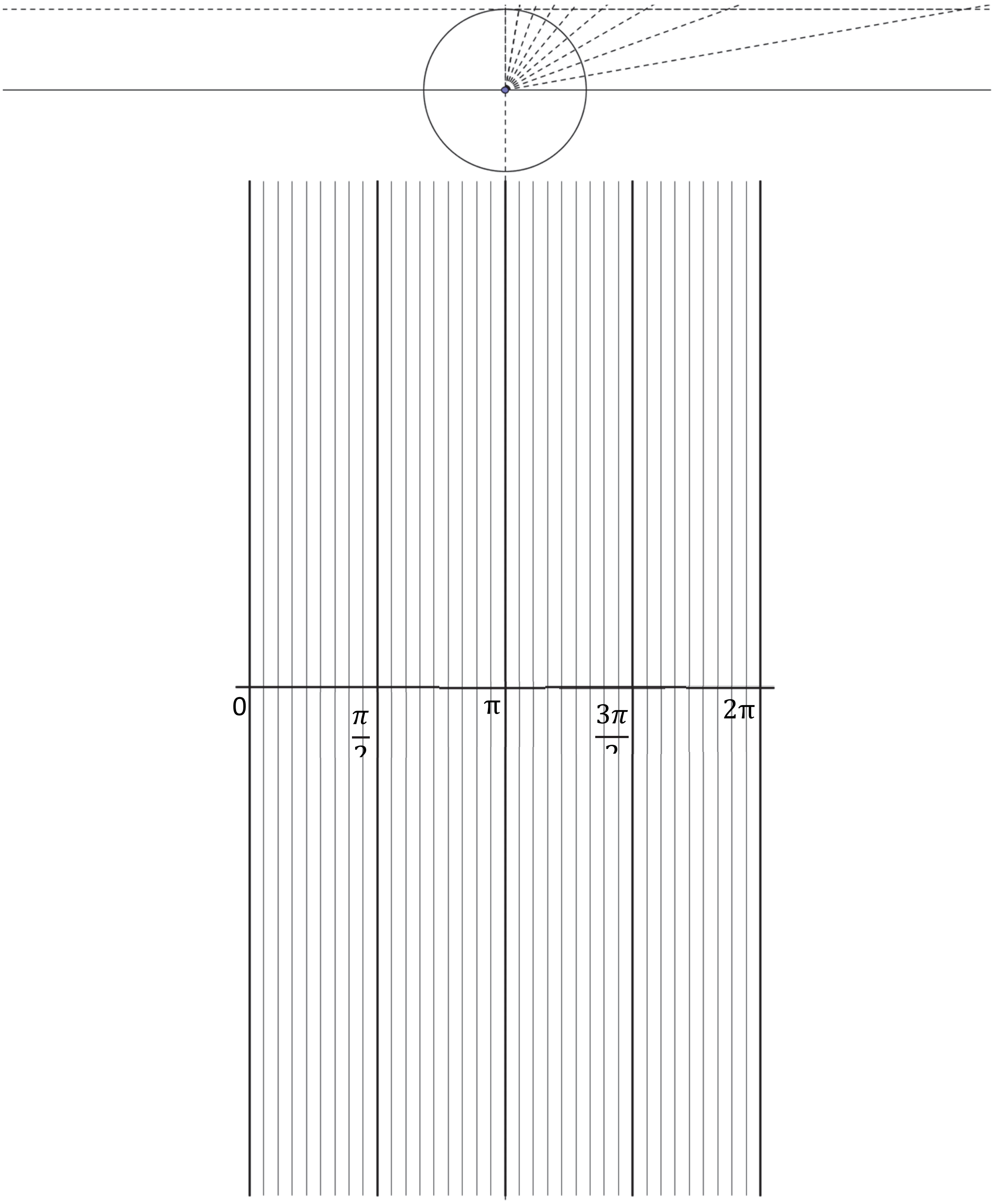
19. 請利用左方的單位圓畫出**正割函數secθ**的函數圖形。



20. 請利用上方的單位圓畫出**餘切函數cotθ**的函數圖形。

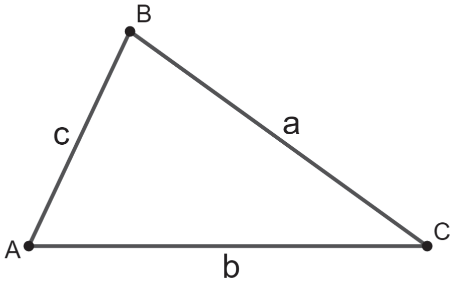


21. 請利用左方的單位圓畫出**餘割函數csc**$\boldsymbol{\theta}$的函數圖形。

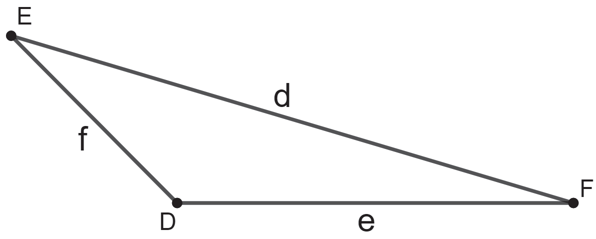


22. 請試著使用三角函數來表現下面三角形的面積。

(1)



(2)



23. 透過第 22 題，我們知道…

$$\frac{1}{2}bcsinA = \frac{1}{2}basinC = \frac{1}{2}acsinB$$

$$\Rightarrow bcsinA = basinC = acsinB$$

$$\Rightarrow \frac{sinA}{a} = \frac{sinC}{c} = \frac{sinB}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{sinA} = \frac{c}{sinC} = \frac{b}{sinB}$$

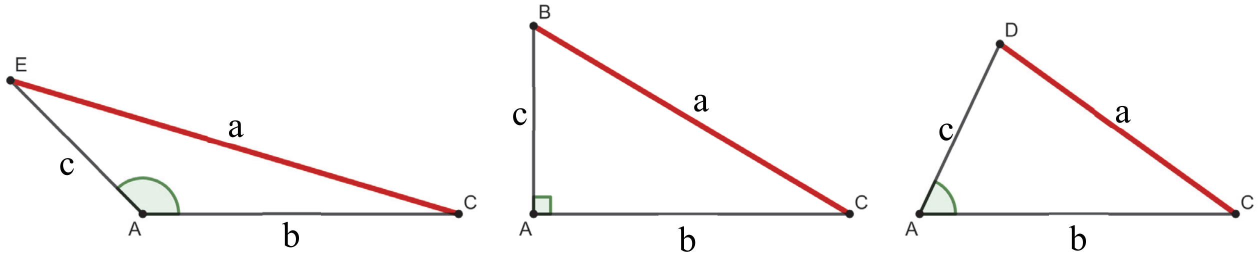
上面最後的算式所算出來的值會和三角形的什麼性質有關呢？

以 $\frac{a}{sinA}$ 為例，當邊長 a 的長度改變，三角形的大小就會跟著改變，

但是，當 a 的長度固定，$sinA$ 卻可以保持不變，只要$\angle A$大小不變即可，也就是說，$\angle A$可以自由自在地被擺在任何位置，只要保持邊長 a 是對邊即可，請試著畫出在邊長 a 不變下，$\angle A$可以被自由自在地擺在任何位置，這種自由自在的三角形。

24. 如下圖，當$\angle A = 90°$的時候，我們知道三角形的三個邊長會有畢氏定理的關係，但是，當$\angle A$不是$90°$的時候，該怎麼隨著角度的不同來調整邊長 a 的長度呢？

註：請利用畢氏定理和三角函數寫出邊長 a 和 b、c 以及$\angle A$的關係。



25. 正弦函數和餘弦函數的和角公式。

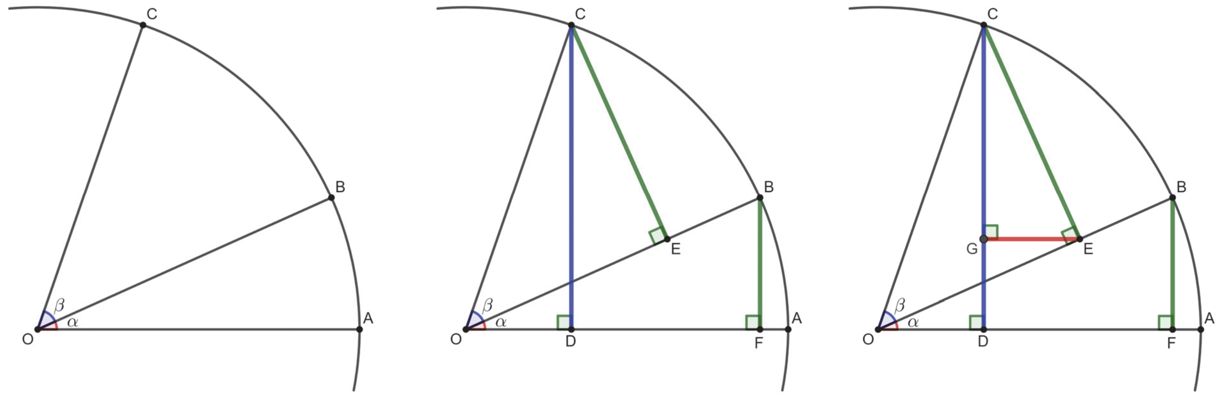
(1) 請畫出下面單位圓的$\sin\alpha$、$\sin\beta$和$\sin(\alpha+\beta)$。

(2) 檢查一下$\sin(\alpha+\beta)$會等於$\sin\alpha+\sin\beta$嗎？

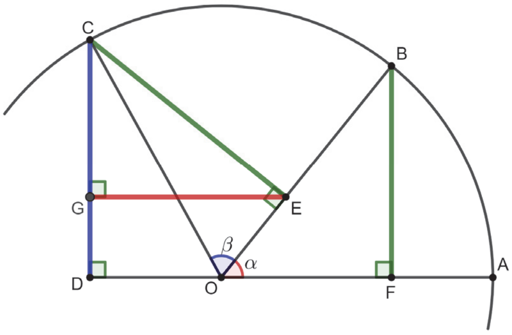
(3) 想利用$\sin\alpha$和$\sin\beta$來表現$\sin(\alpha+\beta)$，請試著畫出一條輔助線將$\sin(\alpha+\beta)$做分割。

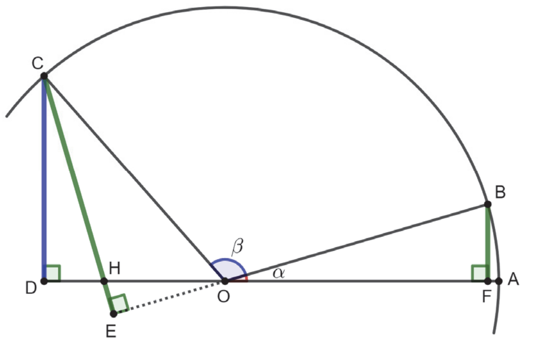
(4) 請寫出$\sin(\alpha+\beta)$的和角公式。

(5) 請寫出$\cos(\alpha+\beta)$的和角公式。

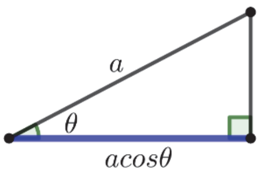


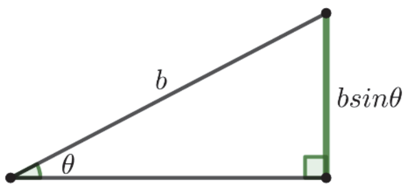
(6) 當$\alpha+\beta$超過 90 度，再思考一次$\sin(\alpha+\beta)$和$\cos(\alpha+\beta)$的和角公式。

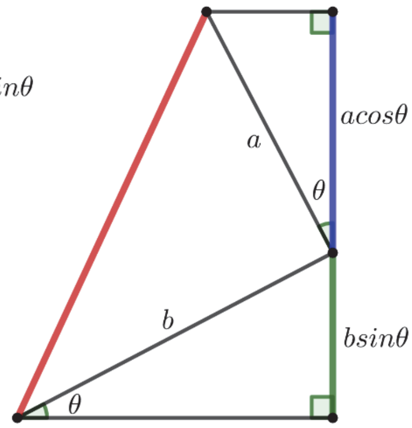




26. 正弦函數和餘弦函數的疊合公式，請寫出$acos\theta + bsin\theta$的公式。







重行樸實數學路

發現數學新世界

數學新世界網站
http://tw.newhorizonofmathematics.com