

數學科教師共備手冊

國小課程

單元1

整數與小數的 四則運算



數學新世界

2018年10月編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思問題

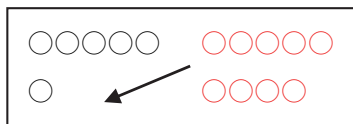
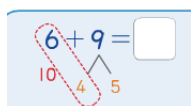
1. 哪些情況我們會這樣數數：1、2、3、4、...？
我們透過數數想知道什麼？
2. 國小一年級數學的第一堂課「數到 10」，為什麼我們會選擇從 1 數到 10 就停了？為什麼 1 到 9 都是 1 個數字，10 這個數字會使用 1 和 0 兩個數字合成 1 個數字 10？10 這個數字我們會讀成「十」？為什麼不讀成「一零」呢？
3. 當我們這樣數數：2、4、6、8、...，或者 5、10、15、...，這樣數數到 30，和 1、2、3、4、...的差別在哪裡？這麼數有了什麼不同的想法？以及可以發展什麼概念？
4. 數字表現了什麼？「★★★」和「3★」的表現方式有什麼不同？當我們說「3」和說「3 杯」，一樣都有 3 但感覺上是有所分別的，您能說清楚嗎？譬如說，曉華買了 3 杯飲料，「杯」這個量詞在「3 杯」中扮演什麼角色？「3」這個數字在「3 杯」中扮演什麼角色？如果沒有量詞的那個數，它的意義是什麼？生活中我們經常使用數字來表現量的大小，數字的作用究竟是什麼呢？
5. 地下 10 樓我們覺得很深，地上 3 樓我們覺得不高，可是我們又說 3 比 -10 大，為什麼 3 會比 -10 還大？或者，我們先來想一下，為什麼 5 會比 3 還大呢？道理是什麼呢？數字的大小是排在數線上的大小，還是？

6. 計算 $6 + 9$ 的方式有哪些？不同的算法想要發展的主要概念各是什麼？

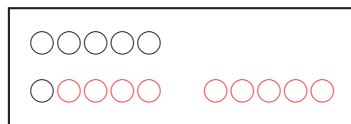
下面兩種念法有什麼不同？

(1) 6 加 9 等於多少？

(2) 6 加 9 這個算式會等於多少？



繼續點數



將 6 合成 10

7. 對於數，當我們想讓學生發展進位、退位與位值的概念的時候，一般課本都採用下面的圖示方式來表現個、十和百，那麼，為什麼位址的安排順序我們會選擇「百、十、個」，而不是「十、百、個」或是「個、十、百」呢？發展位值的概念我們是想要講大小還是想要比大小呢？



8. 當我們點數收銀機的錢時，我們會怎麼做紀錄呢？完成紀錄後進行結算，在整數加法的直式計算過程，如何記錄書寫會比較清楚自然，學生會比較容易懂呢？

9. 生活日常最常計算減法的時機是？此時，我們又是怎麼計算減法的呢？

在整數減法的直式計算過程，如何記錄書寫會比較清楚自然，學生會比較容易懂呢？

10. 在整數運算的時候，我們常說乘法是加法的連加，例如： $5+5+5+5+5+5$ ，有 6 個 5 相加，可以寫成 5×6 ；可是，乘以分數便無法依此類推，顯然乘法是有別於加法的另外一種運算，加法和乘法在運算上的本質各是什麼呢？
11. 加法和乘法的交換律想突顯的是兩數的交換還是運算的結果？
以下題為例：一袋蘋果有 3 個，媽媽買了 7 袋，一共有多少個蘋果？
如果寫「 3×7 」的計算想法是什麼？
如果寫「 7×3 」的計算想法是什麼？
12. 在整數運算的時候，我們常說除法是減法的連減，例如：31 可以用 5 連減 6 次後還剩下 1，可以寫成 $31 \div 5 = 6 \dots 1$ ，這個連減的過程我們最在意的是什麼呢？我們也會將 $31 \div 5$ 寫成 $\frac{31}{5}$ ，這時候就無法再說除法是連減了，顯然除法是有別於減法的另外一種運算，減法和除法在運算上的本質各是什麼呢？接著再想想，為什麼除數不為 0，也就是為什麼除以 0 是無意義的呢？
13. 在二下的單元中，從分裝與平分帶出除法，分裝問題和平分問題共同的核心概念是什麼？
14. 我們為什麼要叫學生背誦九九乘法表？九九乘法表對於學生接下來哪些概念的學習有幫助？教學生背誦九九乘法表時應該關注什麼，在日後的使用上幫助最大？

15. 「3.0、1.5、0.5 這三個數字都是小數嗎？「小數」的「小」指的是和哪個數比較得到的小呢？而「小數點」這個符號所要表現的意涵是什麼？

16. 下面三種小數乘法的直式計算過程，您會選擇哪一種呢？這三種運算過程中的想法各是什麼呢？

$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times 2.1 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 6.72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times 2.1 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 6.72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times \quad 2.1 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 6.72 \end{array}$
--	--	--

17. 下面小數除法直式計算過程的想法是什麼？你會選擇這樣進行運算嗎？還是你有更好的選擇？

+個十分 $\begin{array}{r} 1 \\ 0.3 \overline{) 3.4} \\ \underline{3} \\ 4 \\ \underline{4} \\ 0 \end{array}$	+個十分 $\begin{array}{r} 1 \\ 0.3 \overline{) 3.4} \\ \underline{3} \\ 0.3 \\ \underline{0.3} \\ 0 \end{array}$	+個十分 $\begin{array}{r} 24. \\ 0.3 \overline{) 3.4} \\ \underline{3} \\ 0.3 \\ \underline{0.3} \\ 0 \end{array}$
---	---	---

18. 已經有分數了，為什麼還需要學習小數？小數和分數的差別是什麼？

什麼時候我們用 0.75？什麼時候我們用 $\frac{3}{4}$ ？

二、核心概念

1. 整數

2. 數數

3. 數的作用

4. 數字的大小

5. 加、減、乘、除

6. 四則運算

7. 加法和乘法的交換律

8. 小數

9. 小數的乘除法

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

整數	
數數	
數的作用	
數字 的大小	
加減乘除	
四則運算	
交換律	
小數	
小數 的乘除	

四、觀摩、討論&修改

1. 參考影片

 [數學新世界--CA談數學--20160910 僑孝國小 五年級 數的作用 part1 \(22:00~\)](#)

 [數學新世界--CA談數學--20160910 僑孝國小 五年級 數的作用 part2
談「四位數減法」](#)

 [數學新世界--CA談數學--20170914 彰化縣豐崙國小\(小三-四位數的加減\)](#)

 [數學新世界--CA談數學--20180416 臺東縣大南國小 三年級 入班教學 小數](#)

 [數學新世界--CA教數學--20180529 臺東縣寧埔國小 五年級 入班教學 整數
除以整數\(商是小數\) part1](#)

 [數學新世界--CA教數學--20180529 臺東縣寧埔國小 五年級 入班教學 整數
除以整數\(商是小數\) part2](#)

 [數學新世界--CA談數學--20180313 高雄市壽山國小 五年級 小數乘法 part1](#)

 [數學新世界--CA談數學--20180313 高雄市壽山國小 五年級 小數乘法 part2](#)

 [數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part1](#)

 [數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part2](#)

 [數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part3](#)

 [數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part4](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

◎整數的乘法與除法

在做任何計算時，我們除了清楚知道自己在計算什麼，而且還得求算出正確的結果。國小三年級我們學了三位數的加減法，並利用直式的計算方法使得計算時能更加清楚明確！例如：求算 $536+285$ 的結果，直式過程為：

	百	十	個
	5	3	6
+	2	8	5
	7	11	11

$$\begin{aligned}536 &= 500 + 30 + 6 \\285 &= 200 + 80 + 5 \\500 + 200 &= 700 \\30 + 80 &= 10 + 20 + 80 = 10 + 100 \\6 + 5 &= 1 + 5 + 5 = 1 + 10\end{aligned}$$

我們來看看整數的加法，它的計算過程的記錄方式是如何被簡化的，以及對齊位址的好處。

<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>11</td><td>11</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5						7	11	11	<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5							1	1		1	1	0						7	0	0						8	2	1	<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5							1	1		1	1	0						7	0	0						8	2	1	<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5						8	2	1
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
	7	11	11																																																																																																																								
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
		1	1																																																																																																																								
	1	1	0																																																																																																																								
	7	0	0																																																																																																																								
	8	2	1																																																																																																																								
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
		1	1																																																																																																																								
	1	1	0																																																																																																																								
	7	0	0																																																																																																																								
	8	2	1																																																																																																																								
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
	8	2	1																																																																																																																								

◎概念一：乘法

接下來，我們來看一看做整數的乘法計算時，它的記錄方式如何書寫。以 89×4 為例：

89×4 的意思是 89 的 4 倍 也可以看做 80 的 4 倍與 9 的 4 倍併起來 $89 \times 4 = (80 + 9) \times 4$ $= 80 \times 4 + 9 \times 4$ $= 320 + 36$	$\begin{array}{r} 89 \\ 89 \\ 89 \\ + 89 \\ \hline 32 \quad 36 \\ \text{32個拾} \quad \text{36個壹} \end{array}$	$\begin{array}{r} 89 \\ \times 4 \\ \hline 320 \\ 36 \\ \hline 356 \end{array}$
---	--	---

再以 35×23 為例：

35×23 的意思是 35 的 23 倍 也可以看做 35 的 20 倍與 35 的 3 倍併起來 $35 \times 23 = 35 \times (20 + 3)$ $= 35 \times 20 + 35 \times 3$ $= 700 + 105$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 700 \\ + 600 \\ \hline 805 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 700 \\ \hline 805 \end{array}$
--	--	---

動動筆想數學

- (1) 幾個 1 元硬幣可以換成 1 個 10 元硬幣？
(2) 幾個 10 元硬幣可以換成 1 張 100 元紙鈔？
(3) 幾張 100 元紙鈔可以換成 1 張 1000 元紙鈔？
(4) 幾個 10 元硬幣可以換成 9 張 100 元紙鈔？
- 請在空格內填寫適當的數，並想想，相同數字在不同位數時，它們彼此之間換算的關係。

仟	佰	拾	壹
1	1	1	1
9	9	9	9

壹 $\times 10 =$ _____；拾 $\times 10 =$ _____；佰 $\times 10 =$ _____；仟 $\times 10 =$ _____；萬 $\times 10 =$ _____

壹 $\times 100 =$ _____；拾 $\times 100 =$ _____；佰 $\times 100 =$ _____；仟 $\times 100 =$ _____

9 仟 $\Leftrightarrow$ _____ $\times 9$ 佰 $\Leftrightarrow$ _____ $\times 9$ 拾 $\Leftrightarrow$ _____ $\times 9$ 壹

★任何一個數擺在個位數、或十位數、或百位數、...，_____ 之後，就會進一個位數；反之，_____ 之後，就會退一個位數。

3. 想一想，下面三種計算方式有什麼不同？

試著說說看每種方式怎麼做計算。

①

計算過程說明：

$$\begin{array}{r}
 3\ 0\ 0\ 0 \\
 \times\ 2\ 0\ 0 \\
 \hline
 0\ 0\ 0\ 0 \\
 0\ 0\ 0\ 0 \\
 6\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

②

計算過程說明：

$$\begin{array}{r}
 3\ 0\ 0\ 0 \\
 \times\ 2\ 0\ 0 \\
 \hline
 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

③

計算過程說明：

$$\begin{aligned}
 &3000 \times 200 \\
 &= 3000 \times 100 \times 2 \\
 &= 300000 \times 2 \\
 &= 600000
 \end{aligned}$$

4. 請計算下列各題：

(1) $200 \times 4 =$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 0 \\
 \times\ 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

(2) $200 \times 30 =$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 0 \\
 \times\ 3\ 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

(3) $200 \times 34 =$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 0 \\
 \times\ 3\ 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

(4) $324 \times 6 =$

$$\begin{array}{r}
 3\ 2\ 4 \\
 \times\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

(5) $324 \times 30 =$

$$\begin{array}{r}
 3\ 2\ 4 \\
 \times\ 3\ 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

(6) $324 \times 36 =$

$$\begin{array}{r}
 3\ 2\ 4 \\
 \times\ 3\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

5. 為什麼做整數的加法和乘法的直式計算時，我們習慣從個位數開始算起呢？看看下面的計算過程，寫出從個位開始計算的好處。

每個步驟都從 最大的位數開始算 $ \begin{array}{r} 78 \\ \times 47 \\ \hline 28^3 2 \\ 49^5 6 \\ \hline 2^1 5^1 6 6 \\ 3666 \end{array} $ ⇒	每個步驟都從 最小的位數開始算 $ \begin{array}{r} 78 \\ \times 47 \\ \hline 496 \\ 28^3 2 \\ \hline 36^1 6 6 \end{array} $
--	--

所以，從個位數字算起的好是：_____

◎概念二：除法

我們再來看一看做整數的除法計算時，它的計算想法。

以 $2697 \div 300$ 為例，2697 除以 300 的意思是，每次拿 300，2697 最多可以拿幾個 300，會有剩餘嗎？或者 300 的幾倍（整數倍）是 2697？可以整除嗎？

$ \begin{array}{r} 1 \\ 300 \overline{) 2697} \\ \hline \end{array} $ 300 的 1 倍	$ \begin{array}{r} 10 \\ 300 \overline{) 2697} \\ \hline 3000 \end{array} $ 300 的 10 倍太大了！	$ \begin{array}{r} 8 \\ 300 \overline{) 2697} \\ \hline 2400 \end{array} $ 2697 最多 可以拿 8 個 300
--	--	--

再來看一個例子：

$ \begin{array}{r} 1 \\ 15 \overline{) 563} \\ \hline \end{array} $ 15 的 1 倍	$ \begin{array}{r} 10 \\ 15 \overline{) 563} \\ \hline 150 \end{array} $ 15 的 10 倍	$ \begin{array}{r} 100 \\ 15 \overline{) 563} \\ \hline \end{array} $ 15 的 100 倍 太大了！	$ \begin{array}{r} 37 \\ 15 \overline{) 563} \\ \hline 555 \end{array} $ 563 最多 可以拿 37 個 15
---	--	--	---

再來看看整數除法計算的記錄方式如何書寫。

以 $356 \div 89$ 為例，356 除以 89 的意思是，356 可以拿走幾個 89 會有剩下嗎？或者 89 的幾倍（整數倍）是 356？可以整除嗎？

試算：

$$89 \times 5 = 400 + 45 = 445$$

$$89 \times 4 = 320 + 36 = 356$$

$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 4 \\ 89 \overline{) 356} \\ \underline{36} \\ - 320 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 4 \\ 89 \overline{) 356} \\ \underline{32} \\ \hline 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 4 \\ 89 \overline{) 356} \\ \underline{356} \\ \hline 0 \end{array}$
--	---	--

再以 $700 \div 24$ 為例，

試算：

$$24 \times 20 = 480$$

$$24 \times 30 = 720$$

$$24 \times 5 = 100$$

$$24 \times 6 = 124$$

$$24 \times 7 = 168$$

$$24 \times 8 = 192$$

$$24 \times 9 = 216$$

$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 2 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 2 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ 22 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 29 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ 220 \\ \underline{216} \\ 4 \end{array}$
		
24 的 20 倍 是 48 個 10 (480)		

當我們在不同的情境中做計算時，便會產生不同的計算想法，讓我們再算一算、想一想！

$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 24 \overline{) 700} \end{array}$	把 7 個 100 換成 70 個 10 	$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 24 \overline{) 700} \end{array}$
7 個 100 要 24 份 不夠，沒辦法分		$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ 22 \end{array}$
		
		$\begin{array}{r} \text{百十個} \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ 220 \\ \underline{216} \\ 4 \end{array}$
		把 22 個 10 換成 220 個 1

70 個 10，分 24 份，每份 2 個 10
共分了 48 個 10，剩 22 個 10 不夠分
將 22 個 10 換成 220 個 1 來分

動動筆想數學

1. 請試著將下方計算 3527 除以 45 的過程中，每一個步驟在算什麼。

$$\begin{array}{r}
 1^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{45} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{45} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{90} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{315} \\
 37
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 79^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{315} \\
 377 \\
 \underline{405} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 78 \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{315} \\
 377 \\
 \underline{360} \\
 17
 \end{array}$$

太大了！
太小了！
還可以再大！
超過了！

2. 請計算 3527 除以 25，並試著寫下計算過程中的每一個步驟在算什麼。

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 25 \overline{) 3527} \\
 \underline{25} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2^{\times} \\
 25 \overline{) 3527} \\
 \underline{50} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1? \\
 25 \overline{) 3527} \\
 \underline{25} \\
 10
 \end{array}$$

太大了！

請繼續完成計算！

- ★當我們在做除法的時候，計算的過程實際上是在做乘法以及比較，因為_____。

3. 香甜果園今天採收一批蘋果，已知每 15 顆蘋果裝成一籃，剛好可以全數裝完，不多也不少。

- (1) 如果今天採收的蘋果總數量，最接近 500 顆但不到 500 顆，那麼今天總共採收多少顆蘋果？



- (2) 如果今天採收的蘋果數量，最接近 500 顆但超過 500 顆，那麼今天採收了多少顆蘋果？

- (3) 如果今天採收的蘋果數量，在 580 顆到 650 顆之間，那麼今天採收的蘋果最多會有幾顆？最少會有幾顆？

4. 以下是第 3 題的解題計算，試著寫下解題過程中的算式，以及每個步驟的計算想法。

計算過程與算式	計算的想法
(1) $500 \div 15 = 33 \dots 5$ 這個 3，實際上是 30 $ \begin{array}{r} \overset{\text{↑}}{3}3 \\ 15 \overline{) 500} \\ \underline{15 \times 30 = 450} \quad \text{→} \quad 45 \\ 50 \\ \underline{15 \times 3 = 45} \quad \text{→} \quad 5 \\ 5 \end{array} $	每 15 視作 1 單位量， 500 是 30 個 15 又 3 個 15， 最後剩餘 5，不到 1 個 15。
(2) $ \begin{array}{l} 500 \div 15 = 33 \dots 5 \\ 500 = 15 \times 33 + 5 \\ -5 \qquad \qquad -5 \\ \\ 495 = 15 \times 33 \end{array} $	
(3) $ \begin{array}{l} 500 \div 15 = 33 \dots 5 \\ 500 = 15 \times 33 + 5 \\ +10 \qquad \qquad +10 \\ \\ 510 = 15 \times 33 + 15 \times 1 \\ = 15 \times 34 \end{array} $	
(4) $ \begin{array}{l} 580 \div 15 = 38 \dots 10 \\ 580 = 15 \times 38 + 10 \\ +5 \qquad \qquad +5 \\ 585 = 15 \times 38 + 15 \times 1 \\ = 15 \times 39 \end{array} $	

(5) <table border="1" data-bbox="461 246 660 495"> <tr><td>585</td><td>39</td></tr> <tr><td>600</td><td>40</td></tr> <tr><td>615</td><td>41</td></tr> <tr><td>630</td><td>42</td></tr> <tr><td>645</td><td>43</td></tr> </table>	585	39	600	40	615	41	630	42	645	43	
585	39										
600	40										
615	41										
630	42										
645	43										
(6) $650 \div 15 = 43 \dots 5$ $650 = 15 \times 43 + 5$ $\begin{array}{r} -5 \qquad \qquad -5 \\ 645 = 15 \times 43 \end{array}$											
(7) $\begin{array}{c} 580 \\ \downarrow \\ 15 \times \boxed{38} + \boxed{10} \end{array}$ $580 = 15 \times 38 + 10$ $\begin{array}{r} +5 \qquad \qquad +5 \\ 585 = 15 \times 38 + 15 \times 1 \\ = 15 \times 39 \end{array}$ $\begin{array}{c} 650 \\ \downarrow \\ 15 \times \boxed{43} + \boxed{5} \end{array}$ $650 = 15 \times 43 + 5$ $\begin{array}{r} -5 \qquad \qquad -5 \\ 645 = 15 \times 43 \end{array}$											

5. 練習題：弟弟有一桶彈珠，數量大約在 55~65 顆之間，每 3 顆一數，剛好數完。
- 請問弟弟的彈珠可能有幾顆？盡可能寫出你所理解的算法。



◎概念三：四則運算

數和數的運算有加、減、乘、除四種運算，當一個算式中有加有減、有乘有除，到底是我們該怎麼計算呢？還是，其實是我們想怎麼計算！

動動筆想數學

1. 試列出下列各題的算式：

(1) 噹~噹~噹~下課了！教室原本有 25 個人，走出去 13 個人，後來又進來 6 個人。請問現在有多少人，列出算式即可。

(2) 噹~噹~噹~下課了！教室原本有 25 個人，有 8 個男生和 5 個女生離開教室，後來又進來 2 個男生和 3 個女生。請問現在有多少人，列出算式即可。

(3) 爸爸的年齡是姊姊年齡的 2 倍和弟弟年齡的 3 倍相加後再多 5 歲，姊姊是 7 歲、弟弟是 5 歲，請列出爸爸年齡的算式。

(4) 爸爸的年齡是姊姊和弟弟年齡和的 3 倍，假設姊姊是 7 歲、弟弟是 5 歲，請列出爸爸年齡的算式。

2. 請試著依照敘述寫出它的算式：

(1) 七十二減掉三十六再加二十五，算式：_____

(2) 七十二減掉三十六與二十五的和，算式：_____

(3) 12 的 3 倍除以 4，算式：_____

(4) 12 的 3 倍除以 4 加上 48 除以 9 的 3 倍，算式：_____

3. 試回答下列各題：

(1) $5-2+3$ 可以算成 $5-(2+3)$ 嗎？

(2) $2+3\times 7$ 可以算成 $(2+3)\times 7$ 嗎？

(3) $2+3\times 7$ 可以算成 $(2+3)\times 7$ 嗎？

(4) $12\div 4\times 3$ 可以算成 $12\div (4\times 3)$ 嗎？

4. 請計算 $\square \times 3$ ，如果我們不知道 $\square$ 是多少，我們可以算出 $\square \times 3$ 是多少嗎？_____

5. 請計算 $\square \div 3$ ，如果我們不知道 $\square$ 是多少，我們可以算出 $\square \div 3$ 是多少嗎？_____

6. 請試著讀出算式並寫下來你怎麼讀的：

$5\times 2-3+5-12\div 3\times 4$ ，讀法：_____

7. 請你利用括號來確定下面算式的計算順序。

(1) $5 \times 2 - 3 + 5 - 12 \div 3 \times 4$

(2) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \times 2 + 3 \div 5 - 5$

◎小數與小數的運算

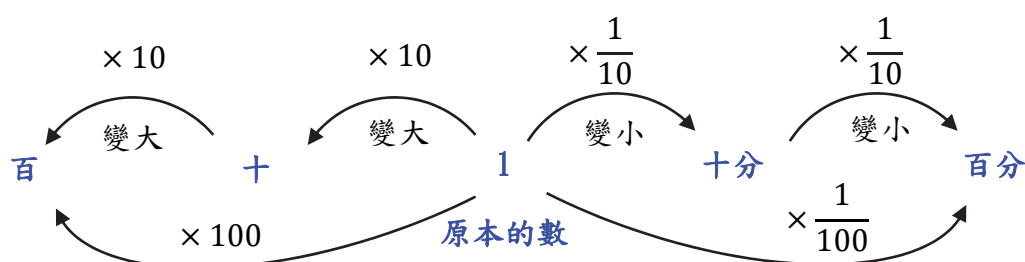
在撲克牌的遊戲當中，有一種玩法是「比大小」，因為撲克牌的點數為 1 到 13，所以，「比大小」會以點數 7 當基準，然後，猜猜看翻開的牌是比 7 大還是比 7 小。當你看到「小數」這個詞，是不是有「變小」的感覺？只是，怎麼樣的數才算是變小的數呢？以哪個數為基準呢？

◎概念一：小數

我們將整數以 10 進位記數，1~9 是個位數、10~99 是十位數、100~999 是百位數，依此類推！任意一個整數，每乘以 10 就晉一級，除以 10 就降一級。其中，個位數 1~9 的 10 倍是十位數，那麼，個位數除以 10 的數，我們應該用什麼名稱來表示這個位數呢？而個位數除以 100 的數，又稱作什麼位數呢？如果想要把這樣的數寫下來，我們應該要用什麼方式來區別和記錄呢？

動動筆想數學

1. 請觀察下面的圖示並回答問題：



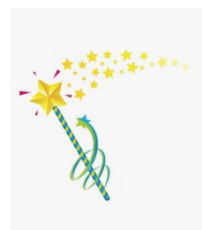
- (1) 當個位數要變成十位數，十位數要變成百位數，或者百位數要變成千位數，也就是說，數字要「進一位」，應是乘以多少呢？
- (2) 當十位數要變成個位數，個位數要變成十分位數，或者十分位數要變成百分位數，也就是說，數字要「退一位」，應是乘以多少呢？

(3) 從上面的圖示中，我們可以看到十分、百分是相對於十和百，那個相對的基準是以 _____ 為基準，也就是，把 _____ 做十分、百分、千分、....，而這些十分位、百分位、千分位...的數都是真分數！於是，我們利用「.」來把它做區分， $\frac{1}{10}$ 用十進位的記錄方式，記為 0.1； $\frac{2}{10}$ 用十進位的記錄方式，記為

0.2； $\frac{1}{100}$ 用十進位的記錄方式，記為 0.01。

(4) 小數的「小」是什麼意思呢？也就是說，比哪一個數字小的數就是小數（純小數）？

2. (1) 有一根神奇的魔法棒，被它輕輕一點，所有的東西就會變大或 者變小！這就好像魔法棒上有任何的數，如果要讓東西變大， 那麼魔法棒可能會出現下列哪些數，被點一下就把東西變大了呢？（請打勾）



☐ 5 ☐ 3.2 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 0.4 ☐ $\frac{5}{4}$ ☐ 0.02 ☐ 1 ☐ 0

(2) 承上題，如果要讓東西變小，那麼魔法棒可能就會出現下列哪些數，被點一下就把東西變大了呢？（請打勾）

☐ 5 ☐ 3.2 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 0.4 ☐ $\frac{5}{4}$ ☐ 0.02 ☐ 1 ☐ 0

(3) 如果都沒有改變，還是原來的樣子，那麼魔法棒上出現的數字是多少呢？

(4) 如果是變不見、變沒有了，那麼魔法棒上的數字是多少呢？

3. 讓我們來理清楚 67.35 這個數，它的每個位數的意思是什麼？

百	十	個	十分	百分
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
	6	7	3	5

數字 6 的等級是 十 位

⇒ 代表有 6 個 10，數值是 60 倍

數字 7 的等級是 _____ 位，

⇒ 代表有 7 個 _____，數值是 _____ 倍

數字 3 的等級是 _____ 位，

⇒ 代表有 3 個 _____，數值是 _____ 倍

數字 5 的等級是 _____ 位，

⇒ 代表有 5 個 _____，數值是 _____ 倍

4. 下面定位板上的數字 3，它實際上所表示的數值是多少呢？

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
				3		

☐30 ☐3 ☐.3 ☐0.3 ☐0.03

5. 數字 3 分別寫在定位板甲、乙、丙三種不同的位置，請完成填空。

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
		3 _甲	3 _乙	3 _丙		

$3_{甲} = 3_{乙} \times \underline{\hspace{2cm}}$; $3_{丙} = 3_{乙} \times \underline{\hspace{2cm}}$

如果將數乘以 ，小數點就會向右移 1 位，晉 1 個等級。

如果將數乘以 ，小數點就會向左移 1 位，退 1 個等級。

6. 右邊 5 個小數，你會用什麼方法來比較它們的大小呢？
 怎麼樣可以更清楚容易的比出它們的大小呢？

0.08	0.0087
	0.0807
0.0078	
	0.07008

7. 我們來看看下面幾種比較數字大小的方法：

(1) 目視	(2) 對位	(3) 等級
0.09、0.0065、	0.09	0.09 的等級 $\Rightarrow \frac{1}{100}$
0.01002、0.0056、	0.0065	0.0065 的等級 $\Rightarrow$
0.0063、0.0102	0.01002	0.01002 的等級 $\Rightarrow$
	0.0056	0.0056 的等級 $\Rightarrow$
	0.0063	0.0063 的等級 $\Rightarrow$
	0.0102	0.0102 的等級 $\Rightarrow$

請你寫下上面三種比較數字大小的方法，它們各自的優缺點。

8. 請比較下面 A、B、C、D 這 4 個小數的大小，當我們把小數點都對齊之後，接下來我們怎麼比出它們的大小呢？

A	3	.	0	0	4
B	1	0	.	5	
C	0	.	0	5	9 8
D	0	.	2	0	3

◎概念二：小數的加減法

小數是相對應十位、百位、千位...比 1 小的數，所以小數的加減法的運算規則都是與整數相同，每滿 10 就進一位。

例題：若某數減 0.154 會等於 0.8765，請問某數是多少呢？
我們將這樣的問題，試著用式子表示：

$$\begin{aligned}
 \text{某數} - 0.154 &= 0.8765 \quad \Rightarrow \text{將題目表示成算式} \\
 + 0.154 &+ 0.154 \quad \Rightarrow \text{想知道某數，於是將 0.154 加回來} \\
 \text{某數} &= 0.8765 + 0.154 \quad \Rightarrow \text{所以，某數等於 1.0305} \\
 &= 1.0305 \\
 \text{某數} + 0.154 &= 1.0305 + 0.154 = 1.1845
 \end{aligned}$$

從上面的式子來看，當某數減去一數之後，若我們想知道某數，那麼就把減掉的數加回來。

☺練習題：若某數加 0.273 會等於 0.6541，請問某數是多少呢？

★減的還原（相反）是 _____ ；
反之，加的還原（相反）是 _____ 。

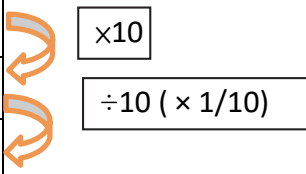
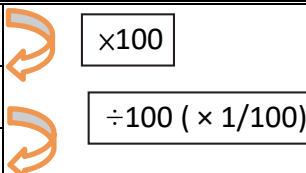
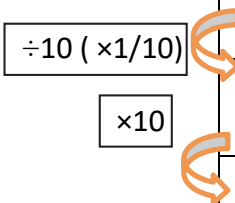
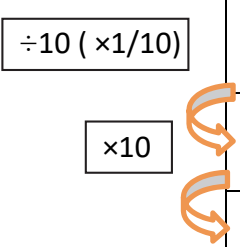
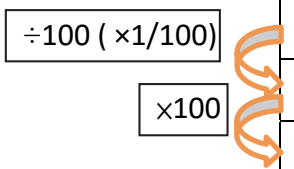
◎概念三：小數的乘法

當我們在計算 2.3×3 或者 2.3×3.1 ，小數乘以整數或者小數乘以小數時，兩數相乘的直式中，小數點的位置該點在哪裡呢？應該對齊被乘數？乘數？還是都不是？

在理清楚之前，讓我們再複習一下數的等級與進退位的概念。

動動筆想數學

1. 試完成以下定位板的空格：

晉級←←		等級		→→降級				
4	3	2	1	0	()	()	()	()
萬	千	百	十	個位	十分	百分	千分	萬分
10000	1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
(1)		7	8	9				
(2)		7	8	9				
(3)			1	2	3	→記為()		
(4)			1	2	3	→記為()		→記為()
(5)			1	2	3			

★一個數若乘以 10，這個數就會 _____ 一級，小數點會向 _____ 移一位；一個數若除以 10，等同乘以 $\frac{1}{10}$ ，這個數就會 _____ 一級，小數點會向 _____ 移一位。

2. 我們來想一想、算一算，小數的乘法，它的直式過程書寫的方式。

◎整數乘以小數

(1) $23 \times 0.1 = 2.3$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 0.1 \\ \hline 0.3 \\ \hline 2.3 \end{array}$	$\xrightarrow{\times 10 \text{ 放大}}$ $\Rightarrow 3 \times 0.1$ $\Rightarrow 20 \times 0.1$ $\xleftarrow{\times \frac{1}{10} \text{ 縮小回來}}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 1 \\ \hline 23 \\ \hline 2.3 \end{array}$
---	--	--

$\times 0.1$ 的意思是，1 倍再 $\frac{1}{10}$ 倍

(2) $23 \times 0.01 =$

(3) $23 \times 0.3 =$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 0.3 \\ \hline \end{array}$	$\xrightarrow{\times 10 \text{ 放大}}$ $\xleftarrow{\times \frac{1}{10} \text{ 縮小回來}}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 3 \\ \hline 69 \\ \hline \end{array}$
---	---	--

$\times 0.3$ 的意思是，3 倍再 $\frac{1}{10}$ 倍

(4) $23 \times 0.03 =$

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>