

數學科教師共備手冊

國小課程

單元 2

分數與分數的 四則運算



數學新世界

2018 年 08 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

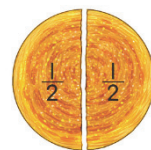
六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思問題

1. 我們什麼時候會用到分數？分數本質上想用來表示什麼？
2. 哥哥和姊姊各有 1 塊相同大小的蛋糕，如果哥哥分給弟弟 $\frac{1}{2}$ 塊，姊姊分給弟弟 $\frac{1}{3}$ 塊，弟弟會怎麼說他拿到多少的蛋糕呢？
3. 有 1 盒 Pizza 平分成 8 片，被吃掉 5 片，下面有兩種方式來表現剩下的 Pizza，在什麼情況下你會用(1)？在什麼情況下你會用(2)？
(1) 剩下 3 片 (2) 剩下 $\frac{3}{8}$ 盒。
4. 「 $\frac{2}{3}$ 」應該怎麼唸？
(1)三，分之二 (2)三分，之二 (3)三分之，二。
5. 分數，是「先分再數 su v」，以這樣的觀點來看「真分數」和「假分數」的真和假，它的道理應是什麼？
6. 右邊的圖示中 $\frac{1}{2}$ 這個數字想要表達的意思是什麼呢？先唸唸看，如果覺得怪怪的，那麼，要怎麼改比較好？



7. 請問 $\frac{1}{2}$ 張 Pizza 比較大，還是 $\frac{1}{4}$ 張 Pizza 比較大？我們不能明確地說哪一個比較大的原因是什麼？
8. 在分數的計算上，什麼情況會較頻繁的使用因數、倍數和質數呢？
9. 1 不是質數也不是合數的道理是什麼？質數和合數的差別是什麼，「質」數是想要用來標記數的什麼性質？
10. 我們會利用短除法計算兩數以上的最大公因數和最小公倍數，怎麼說明短除法的過程，才能讓學生可以理解這個做法每一個步驟背後的涵義，而不是背下短除法的寫法。
- | | | | | |
|---|--|----|----|----|
| 3 | | 12 | 18 | 15 |
| 2 | | 4 | 6 | 5 |
| | | 2 | 3 | 5 |
11. 教分數的加減法，最主要應該好好談清楚的核心概念是什麼？在什麼情況下，分數的運算跟整數一模一樣？
12. 教分數的乘法，最主要應該好好談清楚的核心概念是什麼？
- 怎麼跟學生說明 $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$ 和 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$ ？

13. 整數的除法和分數的除法，它們的異同是什麼？

在做小數的除法時，我們是如何進行的？其核心想法是什麼？

14. 怎麼跟學生說明 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ，才不會只是在記「除以一個分數等於乘上它的倒數」這個算則？

15. 請列出學生學習這個單元常見的錯誤想法，我們可以怎麼說清楚來幫助學生澄清概念？例如：

(1) 將 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 計算成 $\frac{1+1}{2+3}$ 。

(2) 題目： $\frac{2}{3} = \frac{2+(\quad)}{3+6}$ ，將 $(\quad)$ 內的數字也寫 6。

二、核心概念

1. 分數

2. 真分數、假分數

3. 等值分數（擴分、約分）

4. 倍數、因數

5. 質數

6. 短除法

7. 分數的加減法

8. 分數的乘法

9. 分數的除法

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

分數	
真分數 假分數	
等值分數 擴分、約分	
倍數 因數	
質數	

短除法	
分數 的加減法	
分數 的乘法	
分數 的除法	

四、觀摩、討論與修改

1. 參考影片

 [數學新世界--CA--教案設計討論 教師研習 20180613 \(彰化縣大湖國小\)](#)

 [數學新世界--CA--等值分數 入班教學 四年級 20180528 \(彰化縣豐崙國小\) PART2](#)

 [數學新世界--CA--五年級 分數的意義和分數乘法 入班教學 20180319 \(臺東縣初來國小\)](#)

 [數學新世界--CA--六年級 分數除法 入班教學 20180319 \(臺東縣初來國小\)](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20170920 彰化縣民生國小 除法 短除法 part2](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五年級教材。

◎概念一：分數

「分數」，這個詞對我們而言很直覺的理解是，當我們要分東西時會用到的數，比如說：一個披薩，要平分給 5 個人，則每個人拿到的那一塊披薩是原來那塊完整披薩的「五分之一」；還有，20 顆糖果要平分給 4 位小朋友，每位小朋友拿到的糖果有 $20 \div 4 = \frac{20}{4} = 5$ 顆。

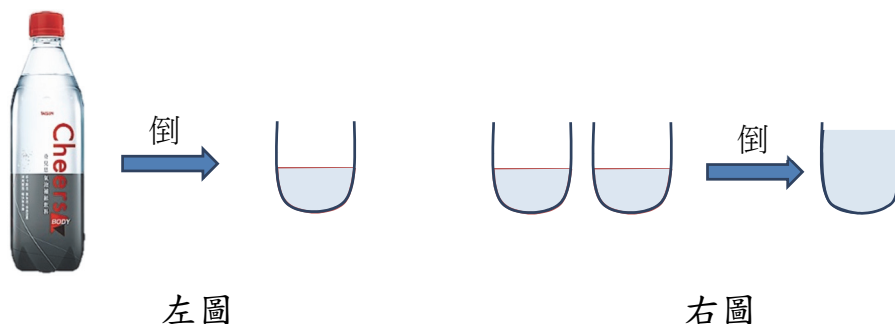
我們可以說，分數的產生是生活中想做「平分」的需求而來的。

動動筆想數學

1. 平平覺得口渴買了一瓶飲料，拿了 2 個杯子各倒半杯，一杯給自己，一杯分享給好朋友安安。

(1) 左圖中看得出來是半杯嗎？

(2) 如右圖將平平和安安各自的半杯倒在一起，發現杯子沒有滿，這表示什麼呢？



(3) 如果真的是半杯，則_____個半杯的飲料倒在杯子內會剛好滿。

2. 將 1 杯飲料分別倒入 5 個相同杯子，假設每杯的量相同：

(1) 如果將這 5 杯的飲料都倒入同一個杯子，卻倒不滿一杯；

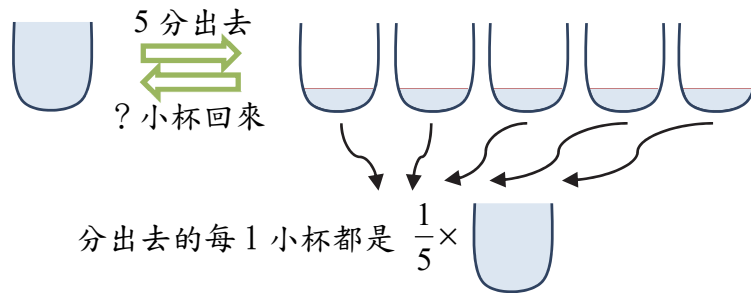
則每一杯的飲料量 ☐ 小於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 等於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 大於 $\frac{1}{5}$ 杯

(2) 如果將這 5 杯的飲料都倒入同一個杯子，卻滿了出來；

則每一杯的飲料量 ☐ 小於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 等於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 大於 $\frac{1}{5}$ 杯

(3) 如果將這 5 杯的飲料都倒入同一個杯子，剛剛好滿一杯；

則每一杯的飲料量 ☐ 小於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 等於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 大於 $\frac{1}{5}$ 杯



(4) $\frac{3}{5}$ 杯，相當於將 1 杯滿滿 _____ 分出去，再拿 _____ 杯回

來，因此， $\frac{3}{5}$ 杯比 1 杯 ☐ 大 ☐ 小 ☐ 剛好；

像這種真的有變小的分數，我們稱為 _____。

(5) $\frac{5}{5}$ 杯，相當於將 1 杯滿滿 _____ 分出去，再拿 _____ 杯回

來，因此， $\frac{5}{5}$ 杯比 1 杯 ☐ 大 ☐ 小 ☐ 剛好。

(6) $\frac{6}{5}$ 杯，相當於將 1 杯滿滿 _____ 分出去，再拿 _____ 杯回

來，因此， $\frac{6}{5}$ 杯比 1 杯 ☐ 大 ☐ 小 ☐ 剛好

像這種沒有真的變小的分數，我們稱為 _____。

3. $\frac{1}{2}$ 的讀法是「二分之一」，如果要在「二分之一」加個逗點，你會把它加在哪裏？

二 分 之 一

4. 底下是「二分之一」的圖示：



A



B



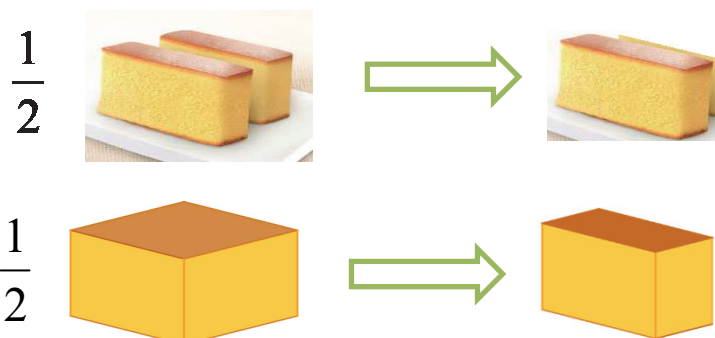
C



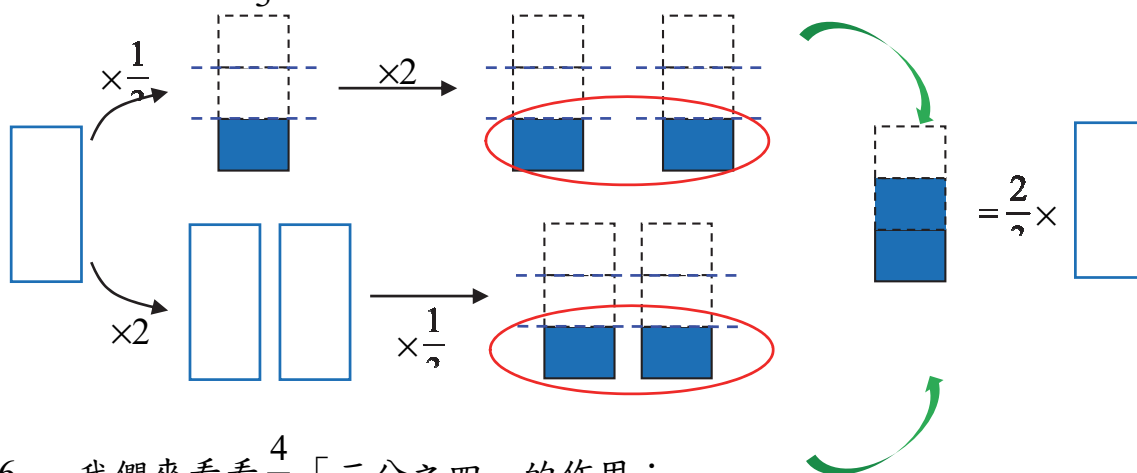
D

我們看到的 $\frac{1}{2}$ ，是 1 塊蛋糕、半圓的披薩、1 隻冰淇淋還有 5 小塊蛋糕。怎麼都不一樣呢？我們如何敘述清楚或重新圖示，表明清楚 $\frac{1}{2}$ 對這些物件產生什麼作用？

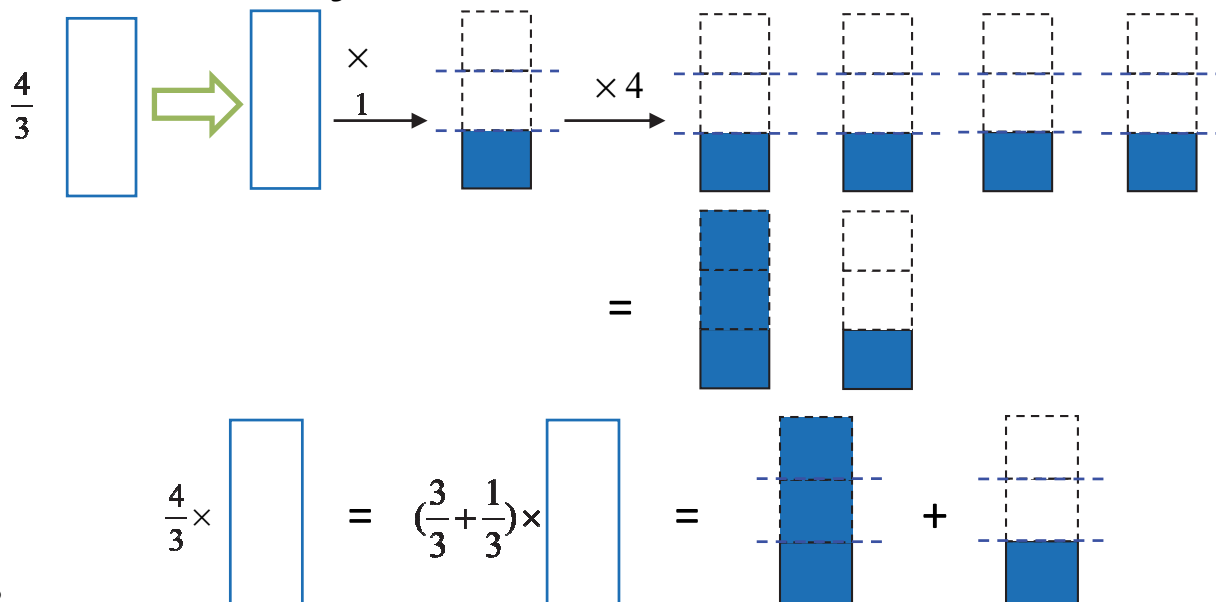
例如：這 1 塊蛋糕是 2 塊蛋糕的 $\frac{1}{2}$ ；2 塊蛋糕的 $\frac{1}{2}$ 是 1 塊蛋糕；



5. 我們來看看 $\frac{2}{3}$ 「三分之二」的作用：



6. 我們來看看 $\frac{4}{3}$ 「三分之四」的作用：



★我們可以將「分數」看作：先「分」再「尸×✓」，先作等分再數（取）幾份。

★數字的功能可以看成 _____ 的作用，
_____ 會將作用對象變大、變多；_____ 會將作用對象變小、變少。_____ 這個數對於作用對象完全沒有改變；_____ 這個數對於作用對象是變成沒有。

★真分數把作用對象 _____ ；假分數把作用對象 _____ 。

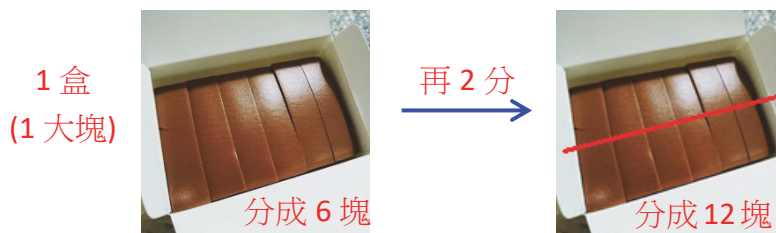
◎概念二：等值分數

你知道塵蟎是會吃皮屑的節肢動物嗎？一般塵蟎長 170～500 微米，假設我們用可以放很大能夠看得到牠吃皮屑的顯微鏡，當牠咬了一塊皮屑一口時，請問從放大的顯微鏡所看到的那一塊皮屑和那一口皮屑，是不是和不用顯微鏡看的時候都一樣呢？又比如，一瓶 500 cc 的運動飲料，每口喝 100 cc 時 5 口可以一飲而盡；或者每口喝 50 cc 時 10 口可以啜飲喝完！咦~上面講得這些和分數有什麼關係呢？

動動筆想數學

1. 有一大塊蛋糕被切成了 6 片（如下圖），老師吃了其中的 2 片，所

以老師吃了 $\frac{2}{6}$ 大塊的蛋糕。

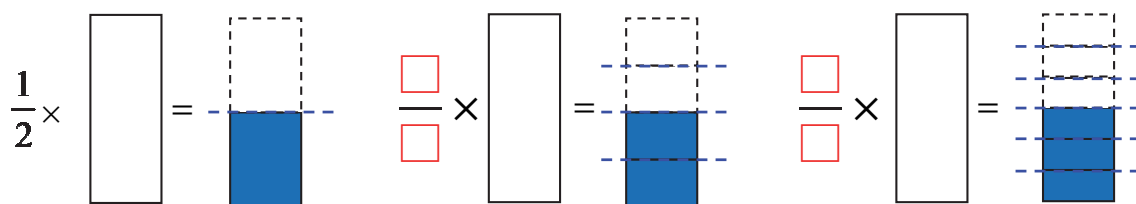


若我們想要分享給更多的人，我們需要把蛋糕再細分。
假設，將 6 片的每一塊都再細分成 2 小塊，總共細分成 12 小塊；
如果，老師還想吃和剛剛一樣多的 2 片蛋糕，那麼，應該拿取細分成 12 小塊中的幾小塊呢？

隔天，老師新買了一盒還沒被切的蛋糕，如果，一樣想吃 $\frac{2}{6}$ 大塊的蛋糕，應該切成幾等分，然後，拿取其中的一片就可以呢？

2.

(1) 請試著理解分數 $\frac{1}{2}$ 的作用，然後在 內填上適當的數字。

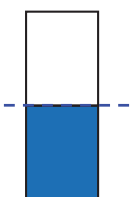


(2) 請寫出 5 個和 $\frac{1}{2}$ 這個數字作用相同的數字。

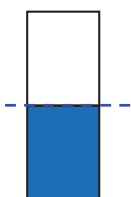
(3) 請寫出 5 個和 $\frac{2}{3}$ 這個數字作用相同的數字。

3. 請試著將已經 2 分、3 分或 4 分的長條“再細分”！

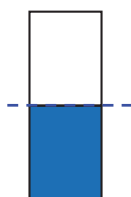
請變成 4 分



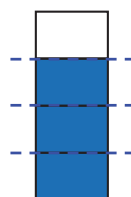
請變成 6 分



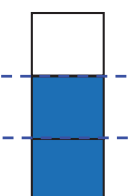
請變成 8 分



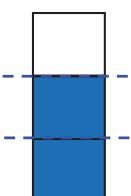
請變成 6 分



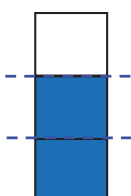
請變成 5 分



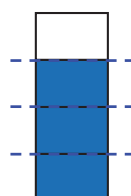
請變成 6 分



請變成 9 分

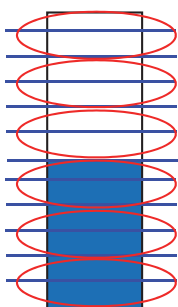


請變成 8 分



4. 請試著將已經細分的長條“合併”！把它圈起來！

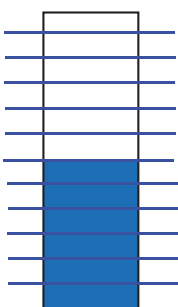
請變成 6 分



請變成 4 分



請變成 3 分



請變成 2 分



12 分，每 2 個一併

5. 請在()內填入適當的數字讓等號成立。

(1)

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()}$$

$\frac{4}{6} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()}$

拿多份
 細分
 倍，擴分(倍數)
 “加倍分割，加倍數”

(2)

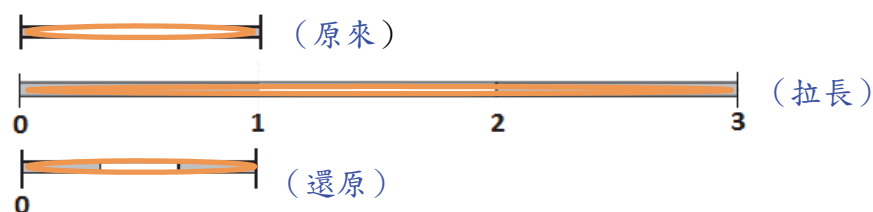
$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()}$$

$\frac{12}{18} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()}$

拿少份
 合併
 併，約分(因數)
 “合併分割，減量數”

6. 下面是 1 條還沒被拉長，很有彈性且不會拉斷的橡皮筋：

現在我們將它拉長，拉到長度是它原本的 3 倍，並在其上標記 0、1、2 和 3。



請問當我們將它放鬆回到原來的長度時，被標記 1 的位置現在會是多少？被標註 2 的位置現在會是多少？

★如果要得到一樣，分愈細，拿愈 _____ ；
合併的越大，拿得愈 _____ 。

7. 比較下面題目中兩個數字的大小。

(1) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{5}{8}$

(2) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{3}{11}$

(3) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{5}{7}$

(4) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{2}{7}$

(5) $\frac{3}{29}$ 、 $\frac{2}{27}$

(6) $\frac{35}{5}$ 、 $\frac{33}{4}$

★分一樣大，比 _____（同分母）；拿一樣多，比 _____（同分子）。

8. 請將下列各分數變成最簡單的分數：

(1) $\frac{12}{15}$

(2) $\frac{1}{18}$

(3) $\frac{30}{20}$

(4) $\frac{48}{320}$

9. 請仿照數字 1~10 的分解，完成數字 11~50 的**完全（徹底）分解**。

1 不用考慮	11	21	31	41
2 無法分解	12	22	32	42
3 無法分解	13	23	33	43
4=2×2	14	24	34	44
5 無法分解	15	25	35	45
6=2×3	16	26	36	46
7 無法分解	17	27	37	47
8=2×4 =2×2×2	18	28	38	48
9=3×3	19	29	39	49
10=2×5	20	30	40	50

★數字 1 不考慮分解，因為 _____。

無法分解的數，我們稱它為 _____；

可以分解的數，我們稱它為 _____。

★若數字 $a = b \times c$ (a 、 b 、 c 不為 0)，

則 a 是 b 和 c 的 _____， b 和 c 是 a 的 _____。

◎概念三：分數的加法與減法

動動筆想數學

1. 中午吃飯時，哥哥吃了一碗飯（第 1 個圖），覺得沒吃飽又吃了一碗飯（第 2 個圖），所以，哥哥今天中午總共吃了兩碗飯？

還是應該說，哥哥總共吃了一大碗和一小碗飯？

到底哥哥吃了多少的飯呢？

如果，哥哥用湯匙吃飯，大碗挖了 15 匙吃完，小碗挖了 10 匙吃完，這時候我們可以怎麼說哥哥吃了多少飯呢？



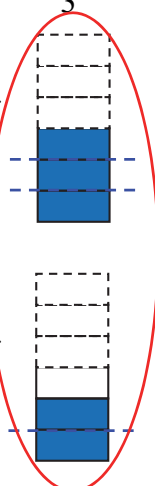
2. 我們來看看 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ：

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \boxed{} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \boxed{} + \frac{1}{3} \times \boxed{} = \boxed{} + \boxed{} = ?$$

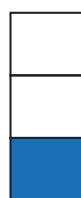
結果是 2 個 $\frac{1}{2}$ 嗎？是 2 個 $\frac{1}{3}$ 嗎？可以合併算嗎？



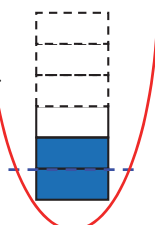
再 3 分 $\Rightarrow$



$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$



再 2 分 $\Rightarrow$



現在可以合併算了嗎？

會是多少呢？

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

3. 試計算 $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ 的值：

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \dots$$

$$\begin{array}{ccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ \frac{10}{12} & \frac{15}{18} & \frac{20}{24} & \frac{25}{30} & \frac{30}{36} \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \dots$$

$$\begin{array}{ccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ \frac{6}{8} & \frac{9}{12} & \frac{12}{16} & \frac{15}{20} & \frac{18}{24} \end{array}$$

$\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ 合併算需要分的一樣多，

我們將 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$ 分別擴分，

請把兩數擴分後，

可以合併算的圈起來並相連。

並想一想，分母可以是多少呢？

4. 試計算 $\frac{11}{30} - \frac{7}{24}$ 的值：

把分母 30 和 24 變成一樣大（通分），再相減（一起算）；

也就是先將 $\frac{11}{30}$ 和 $\frac{7}{24}$ 做通分，通分就是找分母 30 和 24 的公倍數，

再計算。

30 和 24 的公倍數，最簡便的算法是？ _____

我們喜歡數字小一點，因為數字愈小比較好算，所以，30 和 24 最簡化的公倍數怎麼算呢？

5. 30×24 是 30 的 _____ 倍，

短除法

30×24 是 24 的 _____ 倍，

把公倍數變小的簡化寫法

所以， 30×24 是 30 和 24 的 _____。

24×30 $\Rightarrow$ 24 和 30 的公倍數
兩數徹底分解

$2 \times 2 \times \textcircled{2} \times 3 \times 2 \times \textcircled{3} \times 5$

相同共用

$2 \times 2 \times \textcircled{3} \quad \underline{2} \quad \textcircled{3} \times 5$

相同再共用

$2 \times 2 \quad 2 \times \underline{3} \quad 5$

$2 \times 2 \times \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times 5$ $\Rightarrow$ 24 和 30 的最小公倍數

$\Downarrow$

24 和 30 的最大公因數

$$\text{因此，} \frac{11}{30} - \frac{7}{24} = \frac{11 \times 4}{30 \times 4} - \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = \frac{44 - 35}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \textcircled{24} \times 30} \\ \underline{12 \times 15} \end{array}$$

相同共用

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) \textcircled{3} \times 12 \times 15} \\ \underline{\textcircled{3} \times 4 \times 5} \\ 2 \times 2 \end{array}$$

相同再共用

6. 試計算 $12\frac{3}{4} - 4\frac{5}{12}$ 。

方法一： $12\frac{3}{4} = 12 + \frac{3}{4}$ ， $4\frac{5}{12} = 4 + \frac{5}{12}$ ；

先整數減整數 $12 - 4 = 8$ ；再分數減分數 $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} - \frac{5}{12}$

$$\text{所以，} 12\frac{3}{4} - 4\frac{5}{12} = (12 - 4) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12} \right)$$

$$= 8 + \left(\frac{9}{12} - \frac{5}{12} \right) = 8\frac{4}{12}$$

方法二： $12\frac{3}{4}-4\frac{5}{12}$ ，因為整數比較好算；

$$\begin{aligned}12\frac{3}{4}-4\frac{5}{12}, \text{ 拿 } 5 \text{ 去減掉 } 4\frac{5}{12} &\Rightarrow 12\frac{3}{4}-4\frac{5}{12} \\&= 7\frac{3}{4}+5-4\frac{5}{12} \\&= 7\frac{3}{4}+\frac{7}{12}=7\frac{9+7}{12}=7\frac{16}{12}=8\frac{4}{12}\end{aligned}$$

7. (1) $\frac{8}{45}+\frac{7}{30}$ (2) $\frac{7}{12}-\frac{4}{9}$ (3) $8\frac{3}{4}-3\frac{1}{6}$ ；

請完整保留計算過程並寫下計算的想法。

$$(1) \frac{8}{45}+\frac{7}{30} \quad (2) \frac{7}{12}-\frac{4}{9} \quad (3) 8\frac{3}{4}-3\frac{1}{6}$$

★分數的加減

如果兩個分數分的不一樣就無法合併算，需要先將分數 _____。

分數的通分就是找每個分數它們分母的 _____。

◎概念四：分數的乘法

動動筆想數學

1. $\frac{2}{3}$ 的功用是什麼呢？

2 個蛋糕平分給 3 個人，每一位可以分得多少？

做法如下：

把 2 個蛋糕分別 3 等分，

每一位可以拿到每個蛋糕的 $\frac{1}{3}$ ，總共拿 2 個 $\frac{1}{3}$ 的蛋糕。



也就是說， $\frac{2}{3}$ 我們可以看作是 $2 \div 3$ 的結果，即 $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ 。

2. 那麼， $\frac{3}{5}$ 的功用又是什麼呢？

請試著照著上一題分蛋糕的方式，畫畫看、想想看。

3 個蛋糕平分給 5 個人，每一位可以分得多少？

做法如下：

把 _____ 個蛋糕分別 _____ 等分，

每一位可以拿到每個蛋糕的 _____，總共拿 _____ 個 _____ 的蛋糕。

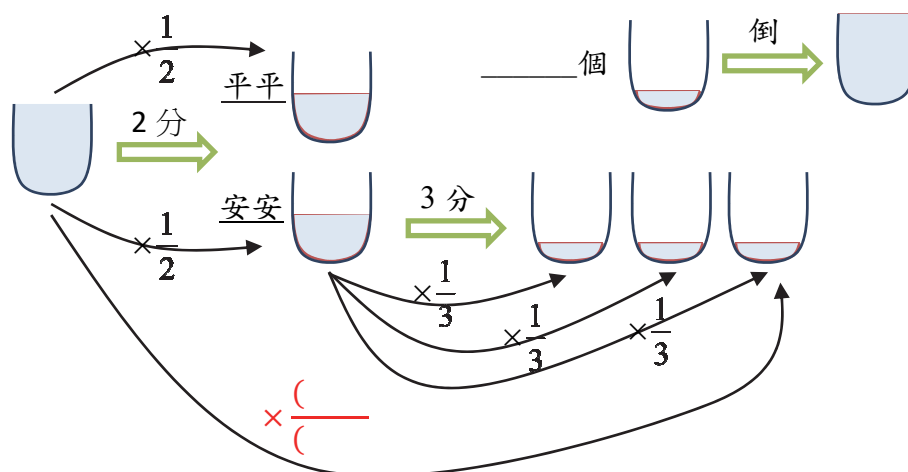
也就是說， $\frac{3}{5}$ 我們可以看作是 $3 \div 5$ 的結果，即 $\frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 請試著不借助其它工具，手繪畫出下面長度的 $\frac{1}{6}$ ，越準越好！

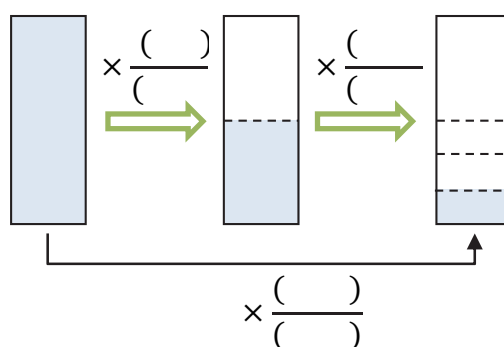
並註記步驟順序。

-
4. 承上題，請再試著畫出下面長度的 $\frac{1}{15}$ 。
-

5. 平平和安安各拿到半杯的飲料，安安將自己的半杯飲料再平分成3杯，請問幾杯再3分後的每杯飲料，倒在一起可以剛好變回滿滿的一杯？



※我們將上面的畫圖改成容易看到平分的長條狀如下，請你在空格中填入適當的數字。



6. 任何計算 $\frac{3}{5} \times 7$ 之值，可以看作是在計算 3 個 $\frac{1}{5}$ 的 7 倍。

請拆解 $\frac{3}{5} \times 7$ 這個算式： $\frac{3}{5} \times 7 = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}}$

7. 請觀察下面算式發展的過程：

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} \Rightarrow \text{兩個 } \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} \Rightarrow \text{每個 } \frac{1}{3} \text{ 先 5 分再 7 倍}$$

$$2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 7 \right) = 2 \times \frac{1}{3 \times 5} \times 7 = 2 \times \frac{7}{3 \times 5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5}$$

你是否可以從這個過程的轉換，看出兩個分數相乘的道理呢？

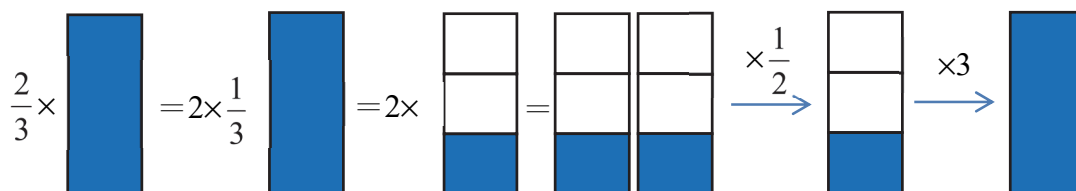
8. 任何東西（或者 1），放大 2 倍後，怎麼做可以回到原來（變回 1）

呢？如果是縮小為 $\frac{1}{2}$ ，該怎麼做可以回到原來（變回 1）呢？

9. 計算 $\frac{2}{3} \times ? = 1$ 、 $? \times \frac{2}{3} = 1$ ， $?$ 應該是多少呢？

也就是說， $\frac{2}{3}$ 乘以多少會等於 1 呢？

或者，多少乘以 $\frac{2}{3}$ 會等於 1 呢？



看看上方的圖示，想想 $?$ 是多少。 $? =$ _____

10. 計算下列各式或完成填空：

$$(1) \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \quad (2) \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \quad (3) \frac{3}{4} \times 5 = \quad (4) 13 \times \frac{5}{7} =$$

$$(5) \frac{(\quad)}{(\quad)} \times \frac{5}{7} = 1 \quad (6) 3 \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1 \quad (7) \frac{(\quad)}{(\quad)} \times 5 = 1 \quad (8) \frac{b}{a} \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1$$

★我們怎麼利用乘法運算將一個數字變成 1 呢？

$$\frac{b}{a} \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1 \Rightarrow \underline{\hspace{4cm}}。$$

◎概念五：分數的除法

動動筆想數學

1. 當我們計算 $12 \div 4$ ，意思是：

(1) 12 是 4 的幾倍？

$\Rightarrow 12 = 4 \times 3$ ，12 是 3 個 4。

(2) 把 12 平分 4 份，每一份會是多少？

(3) 把 4 當作是 1 時，12 會是多少？

(4) 想一想， $24 \div 8$ 、 $6 \div 2$ 、 $\frac{12}{7} \div \frac{4}{7}$ 、...

$$\begin{array}{l} \times \frac{1}{4} \quad \begin{array}{c} 12 \div 4 \\ \frac{12}{4} \div 1 \end{array} \quad \times \frac{1}{4} \\ \Rightarrow 3 \div 1 \\ = 3 \end{array}$$

當被除數、除數同倍率放大或縮小時，它們計算所得的值是相同的嗎？

2. 下面有三條一模一樣的橡皮筋

(1) 請問黑色總長度會是紅色長度的幾倍？_____倍



(2) 我們將橡皮筋一起拉長變成下面的樣貌，這時候黑色總長度會是紅色長度的幾倍？_____倍



(3) 我們將橡皮筋一起縮短變成下面的樣貌，這時候黑色總長度會是紅色長度的幾倍？_____倍



(4) 若我們將黑色橡皮筋的部分當作被除數，紅色橡皮筋的部分當作除數，拉動橡皮筋的過程像是將被除數和除數同時_____，被除數÷除數的結果 ☐相同 ☐不相同。

(5) 當我們在計算分數的除法時，可以將除數調整為最好計算的情況，即將除數調整為哪個數字呢？

3. $1 \div 5$ ，除以 5 是什麼意思呢？

除以 5 就是把 1 平分成 5 等分，每 1 等分就會是 $\frac{1}{5}$ 。

那不就是相當於是把 5 壓成只有 1 的時候，原來的每 1 小段就都是 $\frac{1}{5}$ 囉。



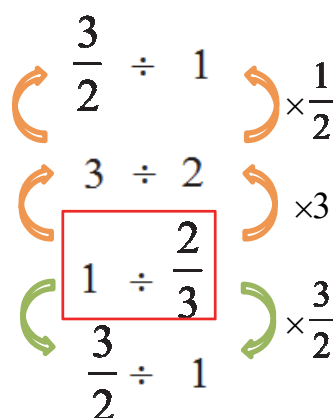
$1 \div 5$ ，也可以看成 1 是幾個 5；也就是把 5 當作是 1，而這個時候的 1 會是多少？

4. 試著說說看 $1 \div \frac{1}{5}$ ，除以 $\frac{1}{5}$ 是什麼意思呢？你可以從下面的圖形知道 $1 \div \frac{1}{5}$ 所代表的意思嗎？



5. 怎麼計算 $1 \div \frac{2}{3}$ 呢？

一起想想除以 $\frac{2}{3}$ 是什麼意思呢？



6. 利用之前橡皮筋的想法，我們重新計算一下 $5 \div \frac{2}{3}$ ，請完成下面的

填空。 $5 \div \frac{2}{3} = ?$

5 是 $\frac{2}{3}$ 的幾倍？

× _____ × _____ → 同時相乘一數，同時放大
(橡皮筋拉長)

$$15 \div 2 = ?$$

× _____ × _____ → 同時相乘一數，同時縮小
(橡皮筋縮短)

$$\frac{15}{2} \div 1 = ?$$

把除數縮放成 1，

是最容易看出 5 是 $\frac{2}{3}$ 的幾倍！

$$5 \div \frac{2}{3} = (5 \times 3) \div (\frac{2}{3} \times 3) = (5 \times 3) \div 2 = (5 \times 3 \times \frac{1}{2}) \div (2 \times \frac{1}{2}) = (5 \times 3 \times \frac{1}{2}) \div 1 = 5 \times \frac{3}{2}$$

7. 請觀察下方兩種不同的計算過程，並寫下你的發現。

通分

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} &= \frac{2 \times 4}{5 \times 4} \div \frac{3 \times 5}{4 \times 5} \\ &= (2 \times 4) \div (5 \times 3) \\ &= \frac{2 \times 4}{5 \times 3} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\end{aligned}$$

擴分、約分

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} &= \left(\frac{2}{5} \times 4\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 4\right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \times 4 \times \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 4 \times \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\right) \div 1 \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\end{aligned}$$

8. 承上題，試著利用通分或擴分與約分，一步一步的計算 $\frac{4}{9} \div \frac{7}{8}$ 。

通分

$$\frac{4}{9} \div \frac{7}{8}$$

擴分、約分

$$\frac{4}{9} \div \frac{7}{8}$$

9. 請你試著算算看 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}$ 。

★ $a \div b$ ，就是把 b 當作是 1 時， a 會是多少；

所以，若 b 要變成 1 就是把 b 乘以它的倒數。

★ 被除數、除數，同倍率的 _____，所得到的結果不會變。

★ 除以一個分數等同於，先乘以這個分數的 _____（擴分），再除以這個分數的 _____（約分）。



這是被放大的塵蟎，如果放得太大是無法一眼看出牠的全貌的，必須做適當地縮放才能看到我們想看的！

分數的除法中，把除數變成 1 就是這樣的想法喔！

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>