

數學科教師共備手冊

國小課程

單元 3

因數與倍數



數學新世界

2018 年 08 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思問題

1. 在我們的學習歷程中，是先有因數的概念還是倍數的概念，或者因數倍數是同時出現的呢？
2. 哪些情況下我們使用了因數的概念，試舉幾個例子？
3. 哪些情況下我們使用了倍數的概念，試舉幾個例子？
4. 只有一個數可以說它是因數或倍數嗎？因數倍數的核心想法是什麼？
5. 任意一個質數會和其他數的倍數嗎？我們用質數來做什麼呢？
6. 1 不是質數也不是合數的道理是什麼？質數和合數的差別是什麼，「質」數是想要用來標記數的什麼性質？
7. 兩數以上的公因數怎麼找最方便呢？兩數以上的「最大」公因數怎麼找最方便呢？

8. 兩數以上的公倍數怎麼找最方便呢？兩數以上的「最小」公倍數怎麼找最方便呢？

9. 我們會利用短除法計算兩數以上的最大公因數和最小公倍數，怎麼說明短除法的過程讓學生理解做法，而不是記下短除法的步驟。

3	12	18	15
2	4	6	5
	2	3	5

10. 請列出學生學習這個單元常見的錯誤想法，我們可以怎麼說清楚來幫助學生澄清概念？例如：

- (1) 學生很容易漏寫因數。
- (2) 利用短除法找三數以上的最大公因數或最小公倍數會有問題。

二、核心概念

1. 倍數

2. 因數

3. 質數

4. 短除法

5. 質因數分解

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

倍數	
因數	
質數	
短除法	
質因數 分解	

四、觀摩、討論與修改

1. 參考影片

 [數學新世界--CA 談數學--20171221 國立臺北教育大學 因數倍數、質數 part2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161103 文光國中七年級最大公因數與最小公倍數](#)

 [數學新世界 CA 談數學 20170914 彰化縣豐崙國小\(小五-因數與倍數\)](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

◎概念一：可分解的數

動動筆想數學

1. 請依照算式寫出各小題的結果。

$$(1) 3 \times \heartsuit =$$

$$(2) 6 \times \text{手} =$$

$$(3) \frac{1}{3} \times \boxed{} =$$

$$(4) \frac{3}{4} \times \boxed{} =$$

$$(5) 0 \times \text{電話} =$$

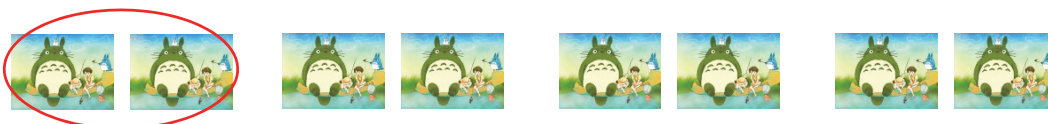
$$(6) 1 \times \text{叉} =$$

★數可以發揮什麼作用或功能呢？_____

2. 我們想要複製下面的圖形，複製出 6 個；如果利用電腦來複製，我們可以怎麼做呢？

甲：我們可以一個一個複製，複製 (ctrl+c) 再貼上 (ctrl+v) 的動作做 6 次。

乙：先複製出 2 個，再 2 個一組複製後再貼上的動作做 3 次。



請問還有其他的做法嗎？試著描述或畫下來。

3. 請利用電腦複製出下面的圖形 7 個，請問你可以有幾種作法？



4. 承第 2 題和第 3 題，複製 6 個和複製 7 個的做法有什麼不同？

你是否可以區分出數字 6 和 7 的不同是什麼？

如果我們用可不可以「分解」來看數字 6 和 7，它們的不同是什麼？試著寫下來。

5. 再想一想，數字 1 呢？我們需要把 1 拿來分解嗎？為什麼？
6. 觀察下面數字的分解，請從數字 1~30 中找出和 6 同類或者和 7 同類的數字，填入方格中並寫出它的分解：

◎ $6 = 1 \times 6$
 $= 2 \times 3$

◎ $7 = 1 \times 7$

7. 從 $10 = 2 \times 5$ ，我們可以看到
- (1) 10 可以分解為 2 和 5 相乘，所以我們會說，2 和 5 是 10 的 _____。
- (2) 10 是 5 的 2 倍，10 是 2 的 5 倍，所以我們會說，
 10 是 5 的 _____，10 是 2 的 _____，
 10 是 2 和 5 的 _____。

8. 請試著分解 96 這個數字：

$96 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} =$
 $\underline{\quad} \times \underline{\quad} = \dots\dots$ （分成 2 階段）

$96 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} =$
 $\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \dots\dots$ （分成 3 階段）

$96 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} =$
 $\underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \dots\dots$ （分成 4 階段）

9. 哪些數字可以由 2 和其它數字相乘呢？

這些數字的特徵是什麼呢？

10. 哪些數字可以由 5 和其它數字相乘呢？

這些數字的特徵是什麼呢？

11.◎範例

$$645 = 15 \times 43; 15 \times 43 = 645$$

我們說

645 可以被 15 整除

645 是 15 的倍數

15 是 645 的因數（整除數）

或是說

645 可以被 43 整除

645 是 43 的倍數

43 是 645 的因數（整除數）

也就是說

15 和 43 都可以將 645 整除（分解）

15 和 43 都是 645 的因數（分解數）

645 是 15 和 43 的倍數

◎練習（參考範例並完成填空）

$$36 = 4 \times 9; 4 \times 9 = 36$$

我們說

可以被 整除

是 的倍數

是 的因數

或是說

可以被 整除

是 的倍數

是 的因數

也就是說

和 都可以

將 整除（分解）

和 都是

的因數（分解數）

是 和

的倍數

12.我們來嘗試看看哪些數字可以被 3 分解，也就是說，哪些數字可以被 3 整除呢？

(1) $10 \div 3 =$

$$3 \overline{)10}$$

(2) $100 \div 3 =$

$$3 \overline{)100}$$

(3) $1000 \div 3 =$

$$3 \overline{)1000}$$

(4) $10000 \div 3 =$

$$3 \overline{)10000}$$

(5) $70 \div 3 =$

$$3 \overline{)70}$$

(6) $700 \div 3 =$

$$3 \overline{)700}$$

(7) $7000 \div 3 =$

$$3 \overline{)7000}$$

(8) $7770 \div 3 =$

$$3 \overline{)7770}$$

(9) 請問 89735 可以被 3 成功分解 (89735 是 3 的倍數) 嗎?

◎概念二：質數與合數

動動筆想數學

1. 下面是我們將 12 個笑臉框起來的方式：

12×1



1×12



6×2



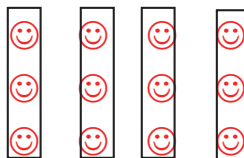
2×6



4×3

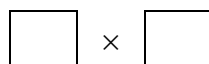
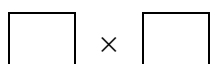
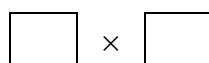
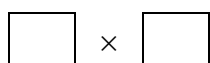
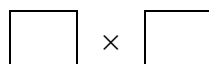
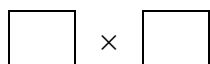
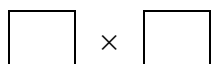
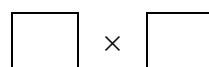
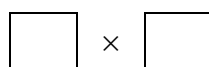
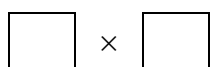
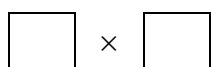


3×4



如果我們有 45 顆 (或 36 顆、54 顆、60 顆) 糖果，可以怎麼分裝呢？幾顆裝成 1 包可以剛好分完呢？

顆	↔	包	顆	↔	包	顆	↔	包	顆	↔	包
45 =	5	×	9	36 =	2	×	18	54 =	2	×	27
60 =	2	×	27								



*在此題中，糖果的總數 a 顆來表示，是由 1 包有 b 顆可以裝成 c 包相乘而得 (a 、 b 、 c 都是數字)；也就是 $a = b \times c$ ，那麼， a 會是 b 和 c 的 倍數，而 b 和 c 會是 a 的 因數。

2. 有 18 個男生和 24 個女生合起來分組，要讓每一組的男生一樣多，女生也一樣多，全部的人分組完成後可以分成幾組？
3. 五年 3 班有 27 位學生，請問老師需要買幾顆糖果，當全部的糖果平分給學生時可以剛好分完？

每個人分到的數量	老師總共需買幾顆	老師買的糖果數量和 27 有什麼關係？
1 顆		
2 顆		
3 顆		
10 顆		
? 顆		



4. 分別用長 4 公分和 6 公分的玩具鐵軌，在桌上各自排成一行。當兩種鐵軌排成一樣長時，此時鐵軌的長度可能是幾公分？
5. 關於數字的放大與分解

$$3 \times \odot = \odot \odot \odot$$

$$1 \times \odot = \odot$$

$$5 \times \odot = \underline{\hspace{2cm}}$$

(畫出答案)

$$4 \times \odot = \underline{\hspace{2cm}}$$

(畫出答案)

$$6 = 3 \times 2$$

我們說 6 可以被 3 和 2 分解

$$6 = 1 \times 6$$

*我們可以看到數字 1 沒有改變物件的能力，意思是，乘以 1 不會變多也不會變少。

*這樣的寫法沒有成功的將 6 進行分解，因為 1 沒有改變物件的能力。

6.

質數：無法被分解的數

只能經過 1 階段放大後得到的數

$$3=1\times 3$$

3 只能透過 1 次放大 3 倍獲得

3 是質數

1~30 中是質數的還有哪些呢？

合數：可以被分解的數

可以透過兩階段以上放大後合成的數

$$6=3\times 2$$

6 可以透過 3 和 2 兩階段放大後合成

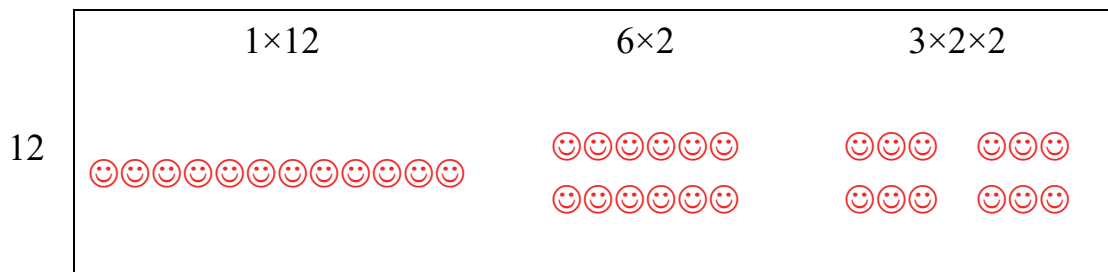
6 是合數

1~30 中是合數的還有哪些呢？

★為什麼 1 不是質數呢？

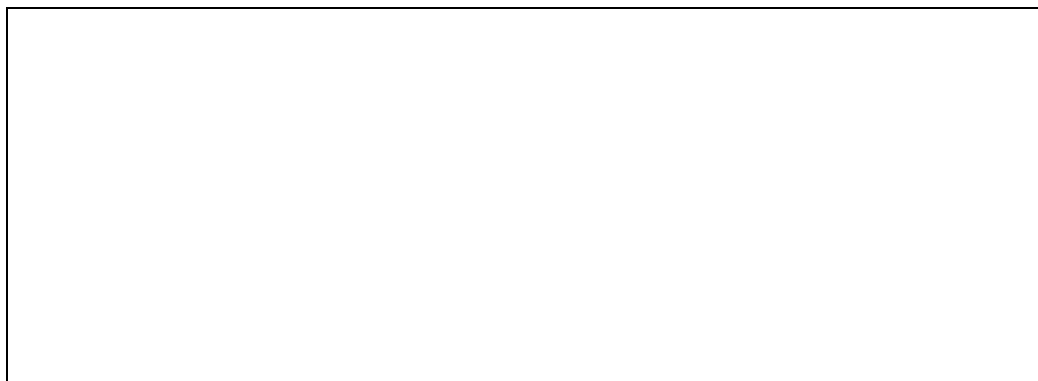
因為它沒有被分解的需要，因此不考慮可不可以分解！

7. 下面是 12 的分解過程，請你試著做 45 和 60 的分解，直到無法分解為止。



45

60



◎概念三：公倍數

當我們在做分數的加減法時，例如： $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ，我們會將兩個分數做「通分」， $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ 、 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ ，再做相加 $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$ 。你是否有看到，通分的意思是將兩個分數的分母變成一樣的數字，本來的2分變成6分，本來的3分也變成6分，分的更細了！6是2的倍數，6也是3的倍數。

動動筆想數學

1. 第(1)題，我們將20做分解，分到不能再分；請試著完成(2)(3)題。

$$\begin{array}{lll} (1) 20 = 2 \times 10 & (2) 18 = & (3) 45 = \\ & = 2 \times 5 \times 2 & \end{array}$$

2. 請判斷下面哪些是20的倍數呢？

除了把算式計算出來，還有沒有其它的方法呢？

$$\square \quad 2 \times 5 \times 2 \times 7 \quad \square \quad 2 \times 5 \times 3 \times 7 \quad \square \quad 2 \times 5 \times 8 \quad \square \quad 4 \times 15$$

3. 想知道兩個數的公倍數，最簡單的做法是什麼呢？

比如說，想知道20和15這兩個數的公倍數，最簡便的方式就是 .

因為 是20的 _____ 倍；

因為 是15的 _____ 倍。

4. 請模仿第(1)(2)題，完成第(3)(4)題。

(1) 怎麼求 20 和 15 的最小公倍數

$20 \times 15 \Rightarrow$ 最簡便找公倍數的方法，直接將數字相乘
 $= 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow$ 可以把公倍數簡化變小嗎？
20 和 15 分解後都有 5，
我們可以共用一個 5 就好！
 $2 \times 5 \times 2 \times 3 \Rightarrow$ 這就是 20 和 15 的最小公倍數 $2 \times 5 \times 2 \times 3$

(2) 求 $3 \times 3 \times 5 \times 7$ 和 $2 \times 3 \times 7 \times 11$ 的最小公倍數

$3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \Rightarrow$ 最簡便找公倍數的方法，將數字直接相乘
 $= 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \Rightarrow$ 我們可以把 $2 \times 3 \times 7 \times 11$ 當中的 3 和 7 拿掉，
跟 $3 \times 3 \times 5 \times 7$ 共用 3 和 7
 $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 11 \Rightarrow$ 這就是 $3 \times 3 \times 5 \times 7$ 和 $2 \times 3 \times 7 \times 11$ 的
最小公倍數 $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 11$

(3) 請試求 60 和 45 的最小公倍數。

(4) 請試求 30 和 78 的最小公倍數。

5. 「短除法」：請完成第(1)題，想想它的道理，再完成第(2)題。

(1) 求 12 和 15 的最小公倍數

a. 請寫出 12 的倍數

12、24、36、____、____、
____、____...

(2) 求 18 和 24 的最小公倍數

a. 請寫出 18 的倍數

18、36、54、____、____、____、
____...

b. 請寫出 15 的倍數

15、30、45、____、____、
____、____...

b. 請寫出 24 的倍數

24、48、72、____、____、____、
____...

c.請寫出 12 和 15 的公倍數

____、____、____、
____、____...

c.請寫出 18 和 24 的公倍數

____、____、____、____、
____...

d.請寫出 12 和 15 的最小公倍數

d.請寫出 18 和 24 的最小公倍數

e.我們知道 12×15 是 12 的 15 倍，也是 15 的 12 倍，也就是說， 12×15 是 12 和 15 的公倍數，但是， 12×15 是 12 和 15 的最小公倍數嗎？
可以再簡化變小嗎？

e.我們知道 18×24 是 18 的 24 倍，也是 24 的 18 倍，也就是說， 18×24 是 18 和 24 的公倍數，但是， 18×24 是 18 和 24 的最小公倍數嗎？
可以再簡化變小嗎？

f. 短除法原理

$$12 = 6 \times 2 = 3 \times 2 \times 2$$

$$15 = 3 \times 5 = 3 \times 5$$

f. 短除法原理

$$18 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$24 = \underline{\hspace{2cm}}$$

12 和 15 的公倍數 $\Rightarrow 3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
(最簡便)

18 和 24 的公倍數 $\Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$
(最簡便)

12 和 15 公倍數 $\Rightarrow 3 \times 2 \times 2 \times 5$
簡化

18 和 24 公倍數 $\Rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$
簡化

$$\begin{array}{r|rr} \textcircled{3} & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

共有的因數

$$\begin{array}{r|rr} & 18 & 24 \\ \hline \end{array}$$

12 和 15 的最小公倍數是
 $3 \times 4 \times 5 = 60$

18 和 24 的最小公倍數是
 $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>