

數學科教師共備手冊

國小課程

單元 7

怎樣解題



數學新世界

2018 年 10 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思問題

1. Polya 怎樣解題有 4 個步驟：了解問題、擬定策略、執行計算和回顧驗算。這 4 個步驟對於老師而言很容易上手，因為老師已解過無數次類似的題目，但對學生而言，卻是初體驗，面對一個全新的問題，我們通常都會怎麼做？最難的部分在哪裡呢？
2. 解題的時候，老師通常都會列算式示範解題的步驟，尤其是老師總是能想出好方法，但是老師也總是困惑於學生明明都學會了，為何考題稍微改變，學生就沒辦法解題了，問題到底出在哪裡呢？
3. 我們試著來練習一下，想像自己是學生，第一次看到下面的題目，我們會先想到什麼呢？會提出什麼質疑呢？
 - (1) 【和差問題】文英和姐姐到觀光果園採橘子，姐姐採了 50 顆，文英採了 34 顆。姐姐要給文英幾顆，兩人的橘子才會一樣多？
Q1：為什麼是姐姐給文英橘子，而不是文英給姐姐呢？
Q2：什麼是姐姐給文英橘子之前和之後不會改變的？
Q3：想變成一樣多，代表現在不一樣多，不一樣多代表的意思是？
Q4：試著使用方程式把解法寫下來，有沒有看到國中的等量公理呢？
 - (2) 【雞兔問題】廚神餐廳裡有 13 張桌子，共有 73 個座位。一張方桌有 4 個座位，一張圓桌有 7 個座位，餐廳有幾張方桌和圓桌？
Q1：餐廳裡只有方桌和圓桌嗎？
Q2：73 個座位，每 7 個可以坐滿 1 個圓桌，總可以坐滿幾張圓桌呢？怎麼調整才可以讓每張方桌和圓桌都坐滿呢？
Q3：如果有 10 張圓桌和 3 張方桌，共有幾個座位？拿 1 張圓桌換 1 張方桌會少掉幾個座位？要換幾張才會剛好有 73 個座位？
Q4：如果餐廳空間夠大，把方桌全換成圓桌，可以多坐幾個人呢？每換 1 張桌子可以多幾個人？可以換幾張桌子？
Q5：如果餐廳想讓客人有更寬敞的用餐空間，把圓桌全換成方桌，會少坐幾個人呢？每換 1 張桌子會少幾個人？可以換幾張桌子？
Q6：試著使用方程式把解法寫下來，有沒有看到國中的加減消去法呢？

(3) 【年齡問題】爸爸今年 40 歲，喬婷今年 10 歲。當爸爸的年齡是喬婷的 3 倍時，喬婷是幾歲？

Q1：「當」代表的是過去、現在還是未來呢？

Q2：就爸爸和喬婷的年齡而言，有什麼是不會變的？有什麼是會變的？

Q3：今年爸爸的年齡是喬婷的幾倍？當兩人的年齡漸長，爸爸的年齡仍會和喬婷的年齡保持倍數關係嗎？如果不會，關係會怎麼變化？

Q4：爸爸幾歲的時候生喬婷的呢？

Q5：喬婷 1 歲的時候，爸爸幾歲呢？這時候爸爸的年齡是喬婷的幾倍？

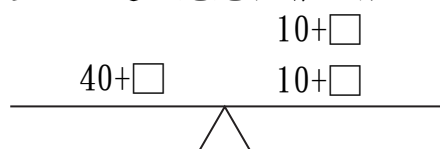
Q6：兩年後，爸爸的年齡是喬婷的幾倍？

Q7：一萬年後，爸爸的年齡大概會是喬婷的幾倍？

Q8：幾年後，爸爸的年齡會降到只剩下是喬婷的 2 倍？猜猜看！

Q9：承 Q6，我們用 $\square$ 來代表幾年後， $(40+\square)=2\times(10+\square)$ ，那 $\square$ 可以填入什麼數字呢？

Q10：承 Q7，把數字想成是人的重量，兩邊坐翹翹板會一樣重而保持平衡， $\square$ 可以算出來嗎？



Q11：承 Q8，翹翹板兩邊一起拿掉什麼還是可以保持平衡呢？拿拿看！把過程畫出來，一步一步畫出來！

Q12：承 Q9，請你用一樣的方法，畫出幾年後爸爸的年齡會是喬婷的 3 倍？ $(40+\square)=3\times(10+\square)$

Q13：承 Q10，請你用一樣的方法，算出下面的 $\square$ 。



(4) 【速率問題】阿土面對距離 850 公尺的山壁大喊，5 秒後聽到回音，聲音在空氣中傳播的秒速是幾公尺？（註：聽到回音表示聲波已往返兩倍距離）

Q1：我們班有阿土嗎？我們班誰看起來比較像阿土啊？

Q2：5 秒鐘後聽到回音，這是什麼意思啊？

Q3：你覺得在哪種地方講比較會有回音啊？森林？山谷？布面？牆面？還是？

Q4：題目中有距離有時間，可以算速率，是誰在跑？人？聲音？還是？

Q5：聲音跑了多少的距離(聽到回音)？是 850 公尺？還是一來一回 850 公尺*2？

Q6：聲音跑多快呢？請算出聲音的速率，你的單位會怎麼寫啊？

(5) 【追趕問題 1】昌明和怡如跑步的速率分別是 5.2 公尺／秒和 5.8 公尺／秒，他們從同一個起點起跑，怡如先讓昌明跑 10 秒後，才開始追昌明，幾秒後可以追上呢？

Q1：如果兩人一起跑，而且昌明和怡如跑步的速率一樣快，從昌明來看怡如，怡如是用每秒多少公尺的速率在離開昌明呢？

Q2：如果兩人一起跑，而且昌明和怡如跑步的速率分別是 5.2 公尺／秒和 5.8 公尺／秒，從昌明來看怡如，怡如是用每秒多少公尺的速率在離開昌明呢？

Q3：如果怡如先讓昌明跑 10 秒後，才開始追昌明，怡如是用每秒多少公尺的速率在靠近昌明呢？怡如幾秒後可以追上昌明呢？

(6) 【追趕問題 2】甲車時速是 70 公里，乙車分速是 1.5 公里，兩車同時分別從相距 240 公里的兩地相向而行，幾小時後會相遇？

Q1：題目很無聊ㄟ，甲車用時速，乙車卻用分速，車子通常會用時速還是分速呢？

Q2：甲車和乙車他們用多少的速率在靠近？

Q3：如果甲車先用時速 70 公里往前開(學生示範往前走)，然後乙車用時速 90 公里追甲車(老師示範往前走)，請問乙車是用多少每小時多少公里的速率在靠近甲車？

Q4：老師和學生背對背，如果甲車先用時速 70 公里往前開(學生示範往前走)，然後乙車用時速 90 公里追甲車(老師示範往前走)，請問兩部車是用多少每小時多少公里的速率在離開？

Q5：老師和學生面對面(有一段距離)，如果甲車先用時速 70 公里往前開(學生示範往前走)，然後乙車用時速 90 公里追甲車(老師示範往前走)，請問兩部車是用多少每小時多少公里的速率在靠近？

Q6：回到原來的題目，兩車相距 240 公里，兩車每小時以多少公里的速率在靠近？多久後就會碰在一起呢？碰面的地方會比較靠近哪一台車的起點呢？

Q7：回到原來的題目，但是兩車同向前行，請問看起來會是甲車追乙車？還是乙車追甲車呢？每小時可以追(靠近)多少公里？幾小時後可以追上呢？

Q8：試著使用方程式把解法寫下來，有沒有看到國中的等量公理呢？

(7) 【流水問題】皇后號遊艇的靜水船速是 25 公里／時，它在一條流速 5 公里／時的河流中航行。皇后號從健康市逆流而上開到長生鎮，共花了 6 小時，健康市和長生鎮之間相距幾公里？皇后號從長生鎮返回健康市，要花多少小時？

Q1：不管是船速或是流速，速率是站在哪裡看出來的？

Q2：站在岸上看皇后號順流航行，會看到船速有多快？

Q3：站在岸上看皇后號逆流航行，會看到船速有多快？

(8) 【平均問題】艾莎的月考成績分別是數學 87 分、國語 85 分、社會 89 分、自然與生活科技 95 分，4 科的平均分數是多少？

Q1：我們常說，我平均每天可以賺 1000 元，我平均每周運動 3 小時，我們班數學段考成績平均 60 分，琉球國中學生身高平均 154 公分，班遊花費每人平均分攤 900 元...，試著舉例子來用用「平均」這個詞。

Q2：老師從東港開車到台中，車速一定有快有慢，但當我們問老師開車速率有多快的時候，你覺得老師會怎麼說呢？

Q3：甲車走第一段路的時速是 80 公里，走第二段路時速是 60 公里，我們可以說甲車走這兩段路的平均速率是 $(80+60)/2=70$ 嗎？知道平均速率有什麼好處？

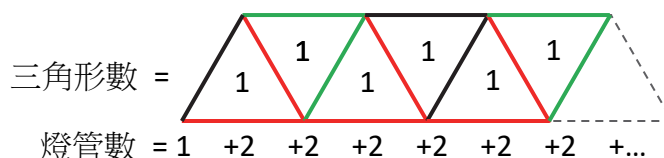
Q4：為什麼要考慮平均？把平均算出來有什麼好處？平均代表的意思？

(9) 【規律問題 1】跨年晚會的舞臺背景，用 LED 燈管排出相連的正三角形，如下圖。如果要排出 50 個相連的正三角形，共需要幾根燈管？

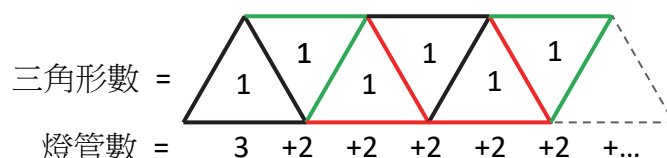


Q1：怎麼畫就怎麼寫就怎麼算，畫畫看，上面圖形你會怎麼畫呢？

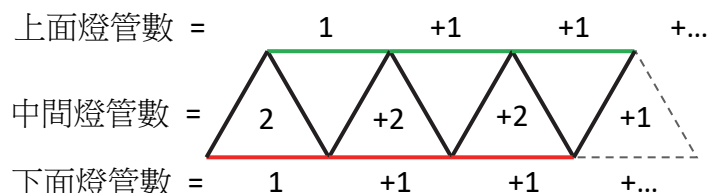
Q2：請利用下面這種畫法算出排出 50 個相連的正三角形需要幾根燈管呢？



Q3：請利用下面這種畫法算出排出 50 個相連的正三角形需要幾根燈管呢？



Q4：請利用下面這種畫法算出排出 50 個相連的正三角形需要幾根燈管呢？



Q5：你還有沒有別的畫法來算算看呢？哪一個方法比較好算呢？

(10) 【規律問題 2】排大會操隊形，8 個人可以排成每邊 3 個人的空心隊形，如果要排成每邊 35 個人的空心隊形，共需要幾個人？

Q1：什麼是大會操隊形啊？

Q2：右邊隊形有幾個人，你會怎麼點數呢？請把數字寫上去。

Q3：承 Q2 的算法，右邊的隊形你會怎麼排呢？

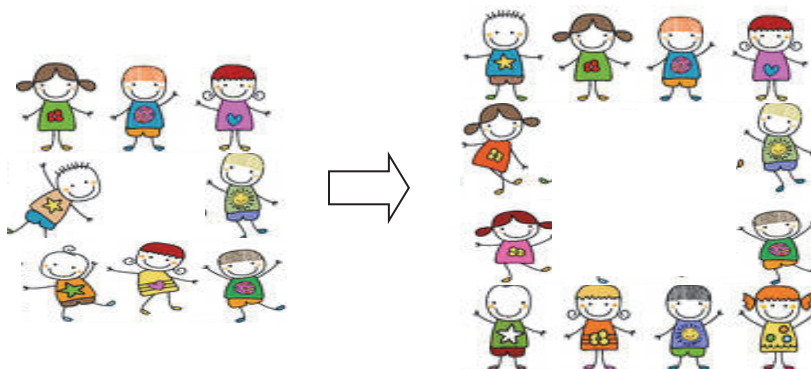
Q4：按照下面的排法，如果要排成每邊 35 個人的空心隊形，共需要幾個人呢？



Q5：Q4 的排法每次排的人數都不一樣多，比較不好算，怎麼調整排法可以變得比較好算呢？

Q6：如果總共有 75 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？

Q7：從每邊 3 人排成每邊 4 人，總共需要幾個人，你會怎麼算？

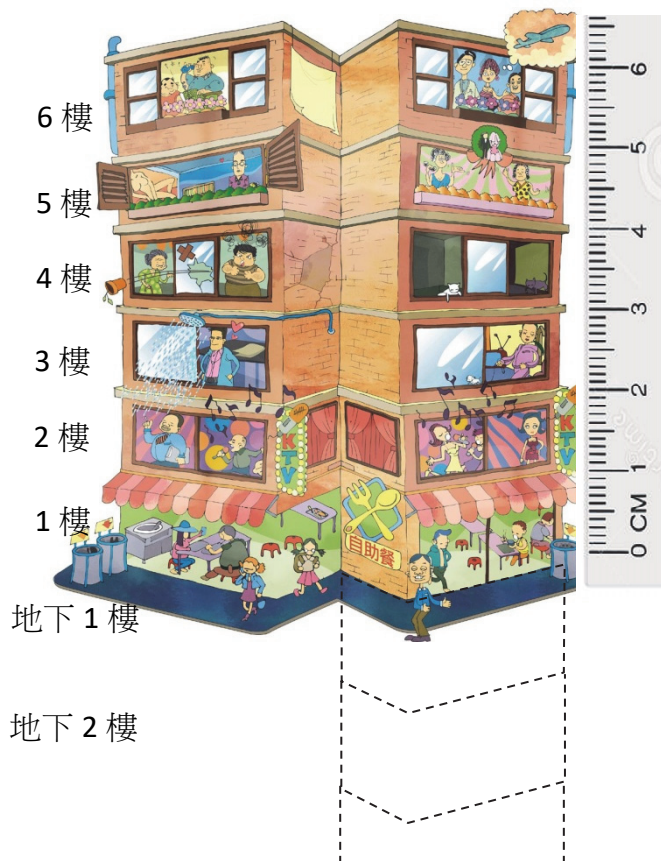


Q8: 承 Q7 的算法, 如果要排成每邊 35 個人的空心隊形, 共需要幾人呢?

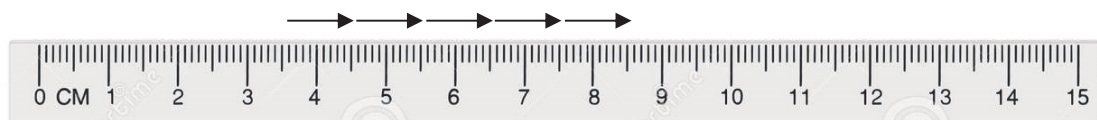
Q9: 承 Q7 的算法, 如果總共有 75 個人來排隊形, 每邊最多可排幾人呢?

(11) 【間隔問題】參加金馬獎的明星們盛裝打扮走在紅地毯上, 紅地毯的一旁擺了 80 個花籃, 花籃和花籃的間隔是 50 公分, 從第 54 個花籃到第 77 個花籃的距離有幾公分?

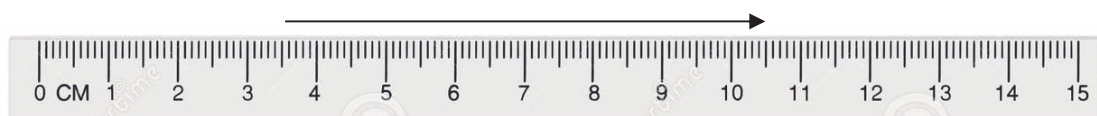
Q1: 樓層的 2F 標示在地板、牆壁還是天花板上, 才能表現整個樓層空間, 又符合我們使用直尺的習慣呢? 那地下 1F 又應該標示在哪裡呢? 有第 0 樓嗎?



Q2: 承 Q1, 從 3F 往上爬 5 層樓, 會到達第幾樓呢?



Q3: 承 Q1, 從 3F 往上爬到第 10 樓, 爬了幾層樓呢?

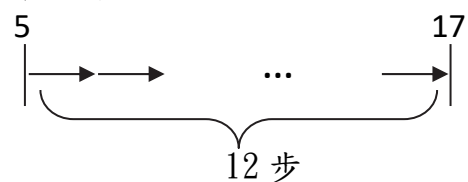


Q4：下面 5、17 和 12，這 3 個數字之間有什麼關係呢？

17 可以怎麼利用 5 和 12 算出來？

5 可以怎麼利用 17 和 12 算出來？

12 可以怎麼利用 5 和 17 算出來？



二、核心概念

1. 解題策略

2. 解題的教學

3. 九大問題的核心

(1)和差問題：

(2)雞兔同籠：

(3)年齡問題：

(4)速率問題：

(5)追趕問題：

(6)流水問題：

(7)平均問題：

(8)規律問題：

(9)間隔問題：

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

解題策略	
解題教學	

四、觀摩、討論與修改

1. 參考影片

- [!\[\]\(f9c8920940b4337cbbeec527f8ac9321_img.jpg\) 數學新世界--CA--如何解題 入班教學 小六 20180516 \(連江縣東引國小\) PART1 \(雞兔\)](#)
- [!\[\]\(845e9749bae62df6369d34b1189931bf_img.jpg\) 數學新世界--CA--如何解題 入班教學 小六 20180516 \(連江縣東引國小\) PART2\(雞兔+速率\)](#)
- [!\[\]\(938d0015fba187a43362a21bd1933ad2_img.jpg\) 數學新世界--CA--議課 20180516 \(連江縣東引國小\)](#)
- [!\[\]\(05617ec18e9328b0f1a36e60ffcf2bcf_img.jpg\) 數學新世界--CA--年齡問題 入班教學 六年級 20180514 \(臺東縣大南國小\) PART1](#)
- [!\[\]\(e26d5d357d1bae1ed2c584ddce77119b_img.jpg\) 數學新世界--CA--年齡問題、雞兔同籠 入班教學 六年級 20180514 \(臺東縣大南國小\) PART2](#)
- [!\[\]\(05408b9c1c15ead4463a073c4f1f227f_img.jpg\) 數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 part1](#)
- [!\[\]\(75379a268b2c36a9e181d363de73226b_img.jpg\) 數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 part2](#)
- [!\[\]\(1c56f8316f4230d3b8983f61403d9b3c_img.jpg\) 數學新世界--金旻、CA--數學生根教學國中領域教學共備人才培訓 體積、平均 20180208 \(雲林縣\) PART3 \(時間 48:53 談平均速率\)](#)
- [!\[\]\(21fc661b153d496d682392368cc1e65e_img.jpg\) 數學新世界--CA 談數學--20180503 國立彰化師範大學 數學科教材教法專題 求平均的目的](#)
- [!\[\]\(bb09a2f1d5028ad223817ee4185b0b24_img.jpg\) 數學新世界--CA--六年級 怎樣解題 入班教學 20180312 \(臺東縣大南國小\) PART1 \(規律問題\)](#)
- [!\[\]\(6ebc627ea6fb564b34b8165eeb684452_img.jpg\) 數學新世界--CA--六年級 怎樣解題 入班教學 20180312 \(臺東縣大南國小\) PART2 \(規律問題\)](#)
- [!\[\]\(7778af16c085e96fb59d309b1e42ad56_img.jpg\) 數學新世界--CA--怎樣解題 教師研習 20180317 \(雲林縣\) PART2 \(前 9 分鐘\)](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。



五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

◎隊形問題

下圖是大會操的隊形的排法，要排成正方形中空の隊形。

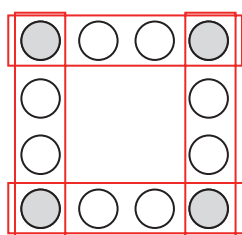
1. 右圖的隊形總共有幾個人呢？

除了用 1 個 1 個數出人數，
還可以怎麼計算呢？



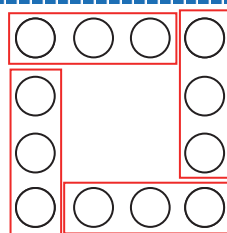
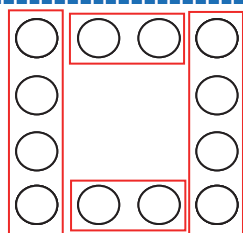
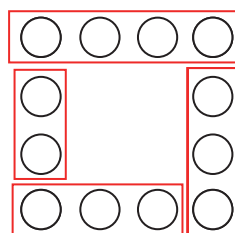
2. 為了要計算排出中空正方形所需要的人數，下面有 4 種畫圖方式，
請寫下它的畫圖想法並列出算式。

第 1 種想法會有重複情形，其它 3 種畫圖的想法則不會重複。



想法：每邊排
4 人，排出 4
個邊，其中有
4 人重複。

算式： $4 \times 4 - 4$



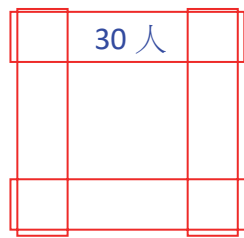
○ ○ ○ ○ 你還能夠想出其它的想法嗎？

○ ○ 把它畫出來！

○ ○

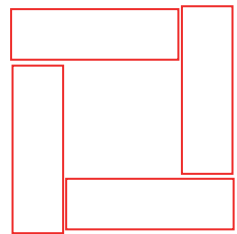
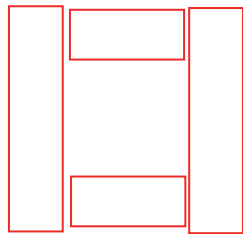
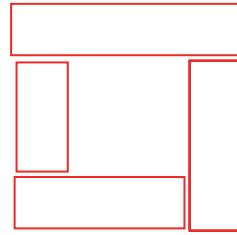
○ ○ ○ ○

3. 如果隊形是每邊排 30 人，請分別利用下面 4 種畫圖的想法，列出所需要人數的算式。

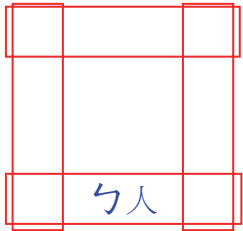


想法：每邊排 30 人，排出 4 個邊，其中有 4 人重複。

算式： $30 \times 4 - 4$

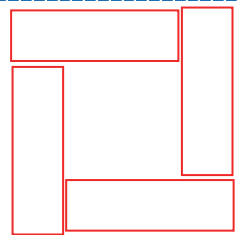
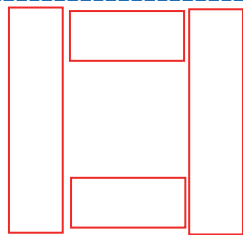
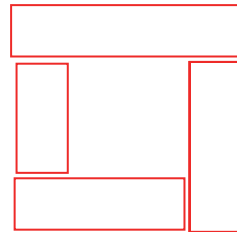


4. 如果隊形是每邊排 7 個人，請分別利用下面 4 種畫圖的想法，列出所需要的人數的算式。



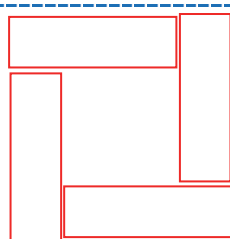
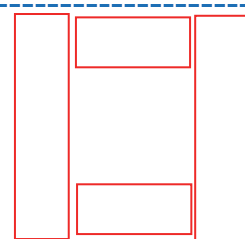
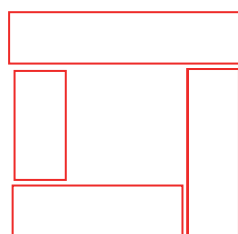
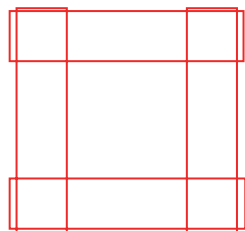
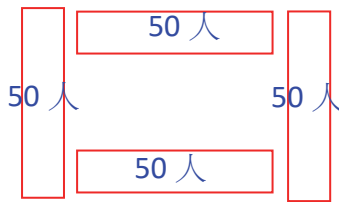
想法：每邊排 7 個人，排出 4 個邊，其中有 4 人重複。

算式： $7 \times 4 - 4$



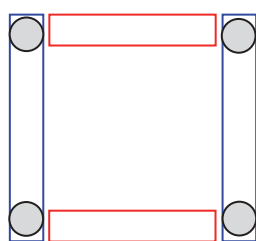
5. 如果總共有 200 個人要跳大會操，一樣是排中空正方形的隊形，則每邊最多可以排幾個人呢？我們也利用前面 4 種想法來求算。

提示：因為每個邊上的人都一樣多，因此，將 200 個人分成 4 組，估計每邊有 50 個人，可是如果每邊排 50 人，形成的中空形狀就不會是正方形，所以必須做一個調整。

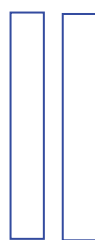


6. 如果總共有 75 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？

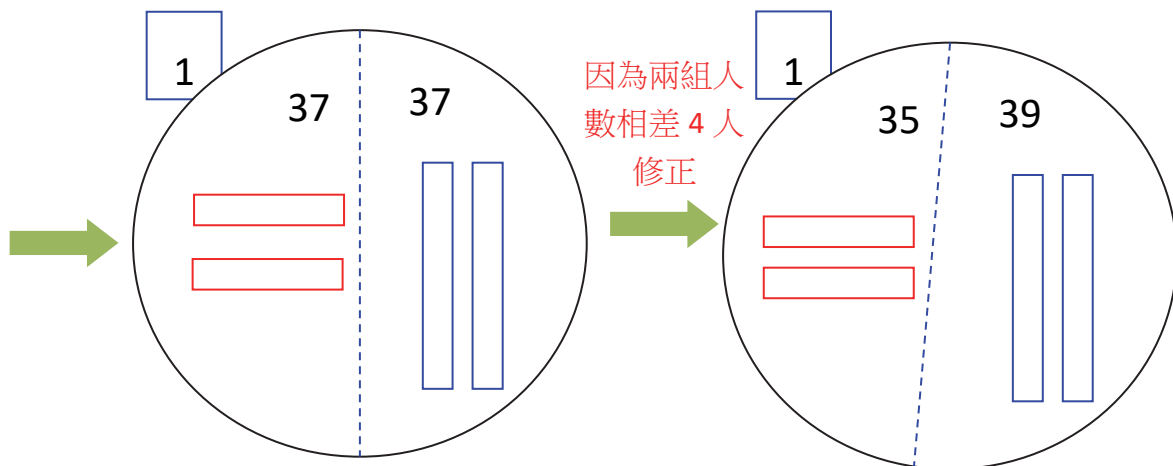
(1) 使用下面的圖形來思考

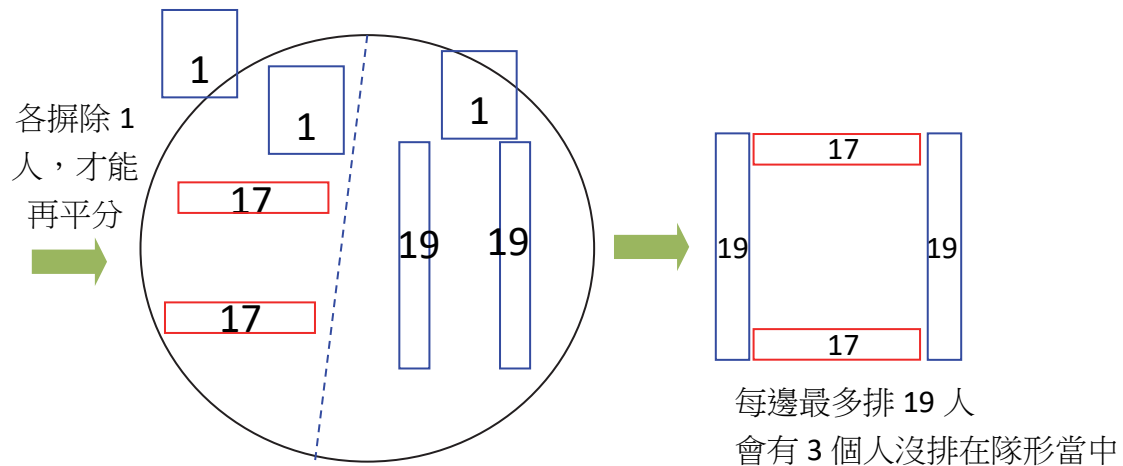


分成 2 組



75 人無法平分成 2 組
先摒除 1 人
剩 74 人平分成 2 組

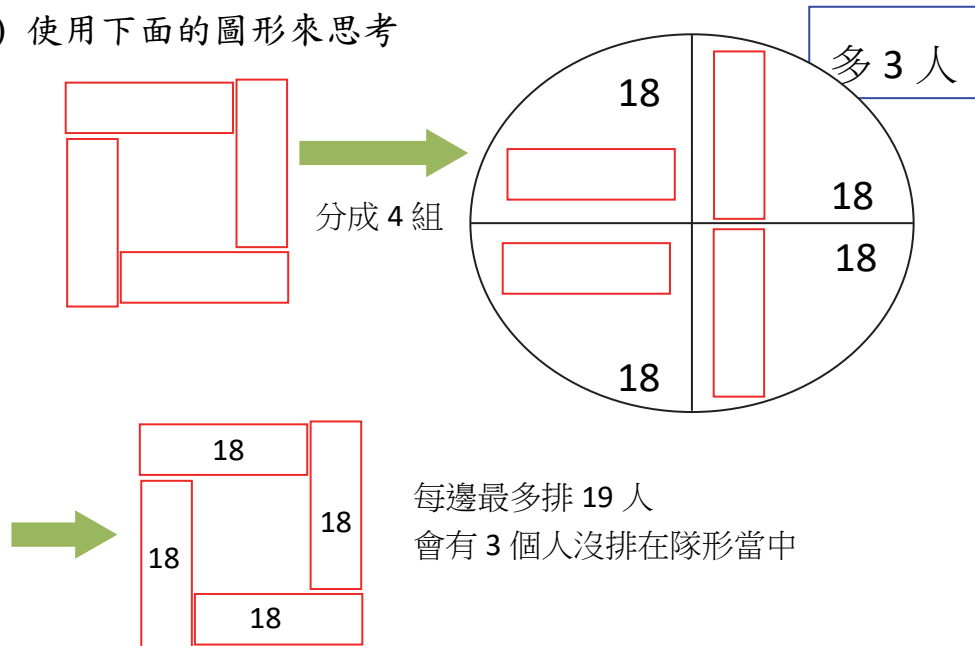




- (2) 如果總共有 53 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？
(請模仿上面畫圖的想法求算)

7. 如果總共有 75 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？

- (1) 使用下面的圖形來思考



- (2) 如果總共有 53 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？
(請模仿上面畫圖的想法求算)

8. 請試著利用其它的想法，求算如果總共有 75 個人來排隊形，則每邊最多可以排幾個人呢？請詳細記錄你的想法。

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>