

數學科教師共備手冊

國小課程

單元 8-1

等量公理



數學新世界

2018 年 10 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思提問

1. 小學學習等量公理只需要做單運算的解題 ($2+x=5$ 、 $x-3=4$ 、 $2\times y=5$ 、 $y\div 3=4$)，因此，學生在已經知道怎麼解題的情況下，被教導練習使用符號進行列式解題，目標是為國中一元一次方程式鋪路，但國中需要的能力是在真的未知的情況下利用已知求得未知 ($3x+2=5-x$)，小學在教導等量公理時，應該注重什麼概念的發展，才能讓學生順利銜接國中呢？
2. 請您求出方程式 $3x+2=5-x$ 的解，請您仔細分析，您是怎麼完成解題的？在過程中，算式不斷地在改變，為什麼不會改變答案？ x 是一個未知數還是一個變數？
3. 國中一元一次方程式的教學，一般都會先介紹等量公理，然後再簡化為移項法則，其實不論是等量公理或是移項法則都是解題技巧的操作，如果不使用等量公理或移項法則的語詞，一樣進行解題的操作，我們可以使用什麼語詞更貼近學生小學的四則運算的想法？
4. 學生在解方程式 $3x+1=6$ 的時候會算成 $x+1=2$ ，你知道學生在想什麼嗎？問題出在哪裡？怎麼協助學生？
5. 小學花了 6 年的時間都在學習數字四則運算的化簡，因此，對學生而言，等號就是不斷地往下寫，也就是說，學生只需要化簡等號左邊的運算，解方程式最難的地方在於要讓學生從只看等號左邊的運算到同時得看等號兩側的運算，這個訓練有機會從平常做起嗎？試著舉例說說看！

二、核心概念

1. 未知數

2. 關係式

3. 等量公理

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

未知數	
關係式	
等量公理	

四、觀摩、討論與修改

1. 參考影片

 [數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 PART1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 PART2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161209 僑孝國小 六年級等量公理 PART2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 PART 1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 PART 2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 議課](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20160107 金湖國中 一元一次方程式 PART1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20160107 金湖國中 一元一次方程式 PART2](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

◎概念一：關係

動動筆想數學

1. 今天早上曉華到 7-11 去買早餐...

(1) 發現口袋只剩下 5 元，請問曉華花了多少錢買早餐？

☐可以知道 ☐沒辦法知道

(2) 曉華買早餐前口袋有 100 元，請問曉華早餐花了多少錢呢？

☐可以知道 ☐沒辦法知道

(3) 曉華買早餐前口袋有 100 元，買完早餐後，發現口袋只剩下 5 元，請問曉華花了多少錢買早餐？

☐可以知道 ☐沒辦法知道

(4) 請將「口袋原有的錢」、「早餐的花費」和「口袋剩下的錢」這三個項目，填入空格中且符合彼此的關係。

_____	-	早餐的花費	=	_____
_____	-	_____	=	早餐的花費
早餐的花費	+	_____	=	_____

2. 關於長方形...

(1) 一個長方形的寬有 7 公分，請問長方形的長有多長呢？

☐可以知道 ☐沒辦法知道

(2) 一個長方形的面積為 63 平方公分，請問長方形的長是多少？

☐可以知道 ☐沒辦法知道

(3) 一個長方形的面積為 63 平方公分，且它的寬為 7 公分，請問長方形的長是多少？☐可以知道 ☐沒辦法知道



- (4) 請將「長方形的長」、「長方形的寬」和「長方形的面積」這三個項目，填入空格中且符合彼此的關係。

$$\begin{array}{rcl} \text{長方形的長} & \times & \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ & \div & \text{長方形的長} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \div & \underline{\hspace{2cm}} = \text{長方形的長} \end{array}$$

3. 依據下面敘述，請在空格中填入最適當的關係符號： $=$ 、 $\neq$ 、 $>$ 、 $<$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 。

- (1) 曉華的身高還沒超越爸爸；曉華的身高 _____ 爸爸的身高。
- (2) 曉華的體重不到 50 公斤；曉華的體重 _____ 50 公斤。
- (3) 曉華的數學成績可以拉高班上平均；曉華的數學成績 _____ 班上平均分數。
- (4) 曉華的存款快要可以買 iPhone7 了；曉華的存款 _____ iPhone7 的價錢。

- ★ (1) 想求出不知道的數，必須利用關係符號和已經知道的數扯上 _____，寫出 _____。
- (2) 數學的關係符號： $=$ 、 $\neq$ 、 $>$ 、 $<$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 。

◎概念二：未知數

動動筆想數學

1. 請在空格中填入正確的數字，並將你的計算方式寫出來。

$$\begin{array}{llll} (1) & (2) & (3) & (4) \\ \square + 3 = 12 & \square - 3 = 12 & \square \times 3 = 12 & \square \div 3 = 12 \\ -3 & -3 & & \end{array}$$

某個數字加 3 後是 12，
如果這個數不加 3 是多少？
我們可以把 3 拿掉。

$$\begin{array}{llll} (5) & (6) & (7) & (8) \\ 7 + \square = 28 & 18 - \square = 3 & 7 \times \square = 28 & 18 \div \square = 3 \end{array}$$

(9)	(10)	(11)	(12)
$32 + \square = 123$	$123 - \square = 32$	$3 \times \square = 234$	$91 \div \square = 7$

2. 我們使用 x 來取代 $\square$ ，請計算出 x 所代表的數字，並將你的計算方式寫出來。

(1)	(2)	(3)	(4)
$x + 3 = 12$	$x - 3 = 12$	$x \times 3 = 12$	$x \div 3 = 12$

(5)	(6)	(7)	(8)
$7 + x = 28$	$18 - x = 3$	$7 \times x = 28$	$18 \div x = 3$

(9)	(10)	(11)	(12)
$32 + x = 123$	$123 - x = 32$	$3 \times x = 234$	$91 \div x = 7$

3. 每個束口袋中有數量相同的糖果，請計算出每一個束口袋中有多少顆的糖果。

(1)  + 2 = 26

$\Rightarrow$ 3 個束口袋內的糖果數加 2 等於 26

$$x + x + x + 2 = 26$$

如果不要加 2 呢？把 2 拿掉！

 + 2 = 26

$\downarrow -2 \quad \downarrow -2$

 = 24

3 個束口袋內的糖果數是 24，

那麼，1 個束口袋內有多少顆糖果呢？

(2)  + 5 =  + 19

$$x + x + x + 5 = x + 19$$

(3)  - 5 =  + 19

$$x + x + x - 5 = x + 19$$

(4) $x + x + x - 10 = x + 26$

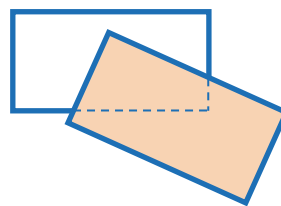
(5) 5 個 $x + 10 = 1$ 個 $x + 26$ ，請計算出 1 個 x 是多少？

(6) 5 個 $x - 10 = 2$ 個 $x + 26$ ，請計算出 1 個 x 是多少？

◎概念三：等量公理

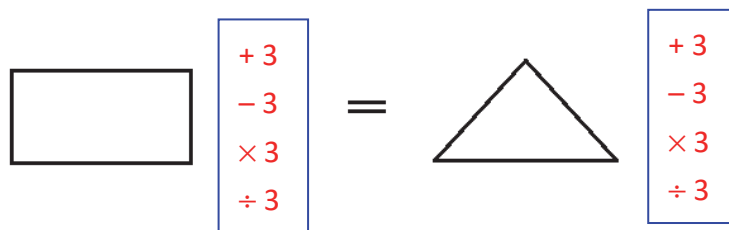
動動筆想數學

1. 兩張一模一樣大小的紙張，一張是白色的，一張是淺綠色的，這兩張紙有一些部分是重疊的。請問沒有重疊到的白色紙張的部分和沒有重疊到的淺綠色紙張的部分，它們的面積會相等嗎？為什麼呢？



2. 大寶和小寶身上都沒有錢，媽媽各給大寶和小寶 200 元後，他們身上的錢會一樣多嗎？
後來，大寶花了 70 元買了一個排骨便當，小寶花了 70 元買了一個雞腿便當，這時候他們身上的錢還是一樣多嗎？

3. 如果等號的兩邊是相等的（不管是什麼），我們在等號的兩邊同時做任意且相同的運算之後，它們還是會維持相等嗎？



4. 觀察圖片中的兩個算式，本來是 $10=8+2$ 後來變成 $10-2=8$ ，本來是 $16=12+4$ 後來變成 $16-4=12$ ；本來在右邊是「+」後來到左邊變成「-」，請你試著描述這個過程的道理是什麼。

5. 觀察下列算式，請問★和◇的關係是什麼？一個★是幾個◇？一個◇是幾個★？

$$\star + @ = \diamond + \diamond + @$$

6. 兩個漢堡的錢再加 2 元是 100 元，請你列一個有 “、2 和 100” 的等式，並算出一個漢堡的錢。

★等量公理是：我跟你一樣時，我做什麼你也跟著做什麼之後，一樣的關係不會改變。

換句話說，如果 A 和 B 是相等的，當 A 做一個運算，B 也做相同的運算之後，兩個結果仍是相等的。

◎概念四：列關係式求未知數

動動筆想數學

1. 安琪和雅琪合力栽種的稻米總共收成 $13\frac{1}{2}$ 公斤，安琪分到其中的 $\frac{4}{9}$ ，剩下的則都分給雅琪，請問雅琪可以分到多少公斤的稻米呢？

$$\begin{array}{ccc} \text{安琪} & + & \text{雅琪} = 13\frac{1}{2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 13\frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \underline{\hspace{2cm}} & = & 13\frac{1}{2} \end{array}$$

2. 曉華數學小考成績依序為 89、94、91，第 4 次必須考幾分，四次的平均才會是 92 分呢？

想法一：如果每次都考 92 分，平均就會是 92 分。

第一次 89 分 $\Rightarrow$ 少 3 分

第二次 94 分 $\Rightarrow$ 多 2 分

第三次 91 分 $\Rightarrow$ 少 1 分

第四次 ? 分 $\Rightarrow$ 多 少
_____ 分

想法二：如果四次小考平均是 92 分，則四次小考的總分會是 92×4 分。

$$\text{平均} = \frac{\text{總和}}{\text{個數}}$$

$$\Leftrightarrow \text{平均} \times \text{個數} = \text{總和}$$

$$89 + 94 + 91 + ? = 92 \times 4$$

3. 國王今年 41 歲，公主今年 11 歲，公主幾歲的時候，國王的年齡剛好是公主的 3 倍呢？

國王：|-----41-----?-----|

公主：|-----11-----?-----|

? 年後，

國王的年齡 = 公主的年齡的 3 倍

$$41 + ? = (11 + ?) \times 3$$

我們想求出 $41 + ? = (11 + ?) \times 3$ 這個關係式中的 ? 是多少，想一想，我們可以如何從這個算式得到衍生的關係？

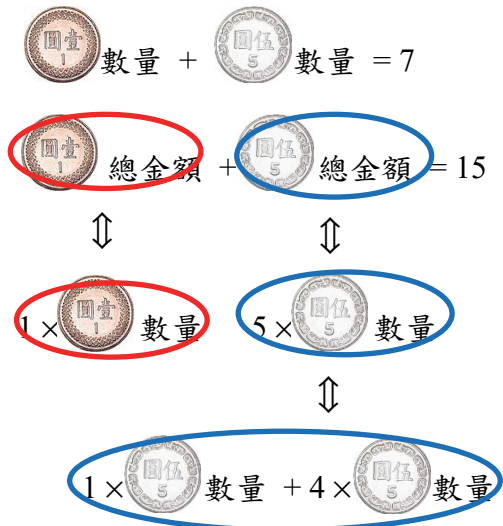
$\Rightarrow 41 + ?$ 是 11 的 3 倍與 ? 的 3 倍相加

$\Rightarrow 41 + ?$ 與 $11 + ?$ 的合，會是 $(11 + ?)$ 的 4 倍

$\Rightarrow 41 + ?$ 與 $11 + ?$ 的差，會是 $(11 + ?)$ 的 2 倍

4. 1 元硬幣和 5 元硬幣總共有 7 個，且總計有 15 元，請問 5 元硬幣有幾個？

從題目當中，我們可以知道...



如果我們將 1 元數量用 $\square$ 表示

5 元數量用 $\triangle$ 表示

我們可以將右邊的關係式寫成：

$$\square + \triangle = 7 \dots ①$$

$$1 \times \square + 5 \times \triangle = 15 \dots ②$$

②可以改寫成，

$$\frac{1 \times \square + 1 \times \triangle \Rightarrow 7}{+ 4 \times \triangle = 15}$$

將 $\triangle$ 算出

$$7 + 4 \times \triangle = 15$$

$$4 \times \triangle = 15 - 7 = 8$$

$$\triangle = 8 \div 4 = 2$$

將 $\square$ 算出， $\square + \triangle = 7$

$$\square + 2 = 7$$

$$\Rightarrow \square = 7 - 2 = 5$$

5. 快樂農場雞和兔子總共有 12 隻，且雞和兔子的腳總共有 34 隻，請問兔子有幾隻？

從題目當中，我們可以知道...

$$\begin{cases} \text{雞隻數量} + \text{兔子數量} = 12 \\ 2 \times \text{雞隻數量} + 4 \times \text{兔子數量} = 34 \end{cases}$$

⇕

$$\begin{aligned} 2 \times \text{雞隻數量} + 2 \times \text{兔子數量} &\Rightarrow 12 \times 2 \\ &+ 2 \times \text{兔子數量} = 34 \end{aligned}$$

所以， $12 \times 2 + 2 \times \text{兔子數量} = 34$

$$24 + 2 \times \text{兔子數量} = 34$$

$$2 \times \text{兔子數量} = 34 - 24 = 10$$

$$\text{兔子數量} = 10 \div 2 = 5$$

我們知道，雞隻數量 + 兔子數量 = 12；所以，雞隻數量 = $12 - 5 = 7$

假設雞隻數量有 4 隻，去 隻，那麼，左邊的關係式就可以寫成：

$$\begin{cases} \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad} = 12 \\ 2 \times \underline{\quad\quad} + 4 \times \underline{\quad\quad} = 34 \end{cases}$$

請仿照左邊的過程，解出 4 去 和

6. 曉華買飲料，大杯和中杯總共買了 30 杯，大杯 1 杯 55 元，中杯 1 杯 45 元，總共花費 1470 元，請問大杯飲料有幾杯？

從題目當中，我們可以知道...

$$\begin{cases} \text{大杯數量} + \text{中杯數量} = 30 \\ 55 \times \text{大杯數量} + 45 \times \text{中杯數量} = 1470 \end{cases}$$

⇕

$$\begin{aligned} 45 \times \text{大杯數量} + 45 \times \text{中杯數量} &\Rightarrow 30 \times 45 \\ + 10 \times \text{大杯數量} &= 1470 \end{aligned}$$

所以， $30 \times 45 + 10 \times \text{大杯數量} = 1470$

$$1350 + 10 \times \text{大杯數量} = 1470$$

$$10 \times \text{大杯數量} = 1470 - 1350$$

$$10 \times \text{大杯數量} = 120$$

$$\text{大杯數量} = 120 \div 10$$

$$\text{大杯數量} = 12$$

我們知道，大杯數量 + 中杯數量 = 30；所以，中杯數量 = $30 - 12 = 18$

假設大杯數量有 L 杯，中 杯數量有 M 杯，那麼，左邊的關係式就可以寫成：

$$\begin{cases} \underline{\quad\quad} + \underline{\quad\quad} = 30 \\ 55 \times \underline{\quad\quad} + 45 \times \underline{\quad\quad} = 1470 \end{cases}$$

請仿照左邊的過程，解出 L 和 M

***換個算法再算一次**

1. 1 元硬幣和 5 元硬幣總共有 7 個，且總計有 15 元，請問 5 元硬幣有幾個？

想法：我們把「1 元硬幣和 5 元硬幣的總共有 7 個」的  換成  那麼，就變成 1 元有 7 個，可是因為「總計 15 元」，所以還差 $15 - 7 = 12$ 元。

這個差額來自 5 元和 1 元的差，把  換回 ，每一次可補回 4 元，

$12 \div 4 = 3$ ，差 12 元則需換回 3 個 5 元，所以，5 元有 3 個，1 元有 $7 - 3 = 4$ 個。

寫成算式： $1 \times 7 + 4 \times (\text{硬幣 5 元數量}) = 15$

2. 快樂農場雞和兔子總共有 12 隻，且雞和兔子的腳總共有 34 隻，請問兔子有幾隻？

想法：把兔子都當成雞，那麼 12 隻雞應該有 24 腳，可是「雞和兔子總共有 34 隻腳」，還差 10 隻腳，一隻兔子和一隻雞差 2 隻腳，所以，換回 $10 \div 2 = 5$ 隻兔子，那麼，就可以知道雞有 $12 - 5 = 7$ 隻。

寫成算式： $2 \times 12 + 2 \times (\text{兔子數量}) = 34$



3. 曉華買飲料，大杯和中杯總共買了 30 杯。若大杯 1 杯 55 元，中杯 1 杯 45 元，總共花費 1470 元，請問大杯飲料有幾杯？
請試著寫下你的想法和算式。

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>