

數學科教師共備手冊

國中課程

單元1

整數與數線



數學新世界

2018年08月 編印

整數與數線

一、單元名稱：整數、數線、絕對值、相反數、科學記號、指數律

二、反思提問：

1.我們經常在使用 1、2、3 這種自然數，這些數字本身跟量詞作用在一起而成一種數量的感覺，請問，自然數在數量中扮演著什麼角色？量詞又扮演著什麼角色呢？或者說，數字發揮了什麼功用呢？

2.在沒有量詞的情況下，兩個數字的加、減運算，跟乘、除運算分別代表什麼意思？乘法是連加嗎？除法是連減嗎？還是，有其他更精準的說法呢？

3.我們已經有自然數的系統來描述數量，似乎，所有的(完整性的)數量都可以用自然數來描述，那麼，為什麼會有負數的需求呢？負數在數量中扮演著什麼角色？學習負數的好處何在？

4.我們在教 $7 - (-5) = 7 + 5$ 的時候，會請學生利用負負得正的口訣進行計算，這是正確的念法嗎？應該怎麼念比較好？ $5 - (6 - 2) = 5 - 6 + 2$ 、 $(-2) \times (-3) = 6$ 、 $6 \div (-2) = -3 \dots$ ？這些又應該怎麼念才對？

5.生活中，我們經常看到或使用到的數線有哪些？我們是怎麼使用數線的？數線上的數字代表什麼意思？當我們想要製作數線的時候，我們心中要先確立哪些原則呢？書上經常告訴我們，數線有三要素，這三要素想要提供我們哪些訊息呢？數線上一定要呈現出這三要素嗎？

6. $a-b$ 除了可以直譯成 a 減去 b 之外，在數線上，我們可以看到 $a-b$ 所代表的意義是什麼呢？那， $a \div b$ 可以有哪些種意義呢？
7. 如果樓層標記是要表示整個樓層空間，就數線的概念，大樓的三樓(3F) 你覺得 3F 應該標記在哪裡呢？天花板、牆壁還是地板呢？地下 3F 呢？有第 0 樓嗎？
8. 我們被教導 5 比 -10 大，為什麼是 -10 比較小呢？這是根據什麼觀點我們才會做這樣的定義？
9. 一個數在加減法以及乘除法中，他分別有各自的相反數(0 沒有乘除法的相反數)，相反數的意義何在？相反數有什麼功用是什麼呢？
10. 我們以自然數為基礎創造了正負數(正整數與負整數)來描述具有相反性質的量詞，那麼，生活中，什麼時候我們又會不想要這個性質相反的正負數呢？在使用到絕對值的想法中，絕對值的功用是把數字變成正數？還是？
11. 關於數字大小的表現方式，國小學到使用不同位址具有不同的位值來呈現一個數字的大小，到了國中，我們用科學記號的方式來呈現一個很大或很小的數，在高中，我們又學了對數函數，請問，位址(位值)、科學記號與對數函數這三者之間有什麼關係呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

負數

負數的運算

數線

絕對值

相反數

科學記號

指數律

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
負數			
負數的運算			
數線			
絕對值			
相反數			
科學記號			
指數律			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1)數學新世界--CA 教數學--20180706 基隆市明德國中 入班教學 平面直角坐標(數線)
- (2)談「正負數」(擷取自數學新世界 CA 談數學 20170915 臺南市永仁高中 part1)
- (3)數學新世界--CA 談數學--20180411 高雄市國教輔導團 數線 part2
- (4)數學新世界--CA 談數學--20140911 屏東縣琉球國中 正負數 絕對值數的變化第 1 堂課
- (5)數學新世界--CA 談數學--20140911 屏東縣琉球國中 正負數 絕對值數的變化第 2 堂課
- (6)數學新世界--CA 談數學--20161013 桃園山腳國中 科學記號 part1
- (7)數學新世界--CA 談數學--20161013 桃園山腳國中 科學記號 part2
- (8)數學新世界--CA 談數學--20160805 和群國中 指數律 part1
- (9)數學新世界--CA 談數學--20160805 和群國中 指數律 part2

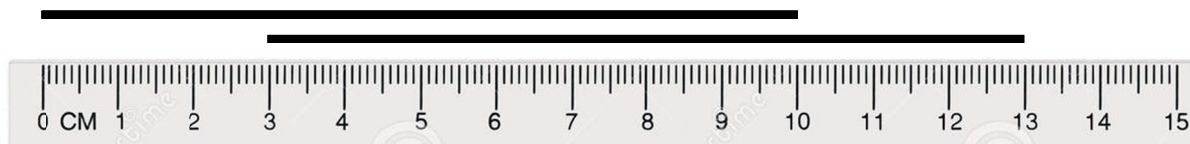
2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

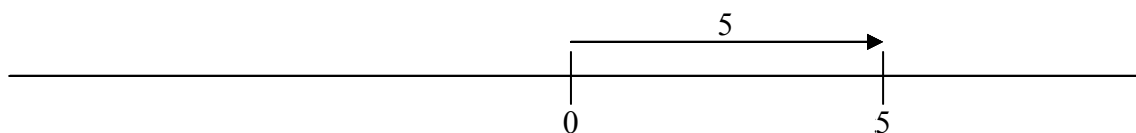
六、學習單：完整版請參考數學新世界國中七年級教材

負數、數線、一元一次方程式

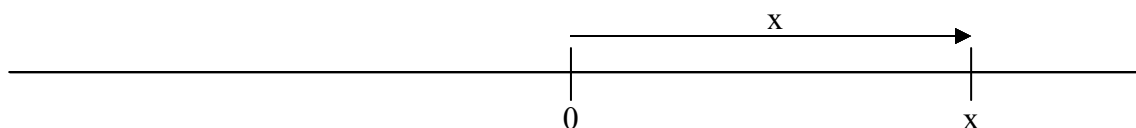
- 請試著讓下面的所做的事情不見了。
(1) 裝了 1 杯茶 (2) 脫掉外套 (3) 從家裡走到學校
(4) 把窗簾拉起來 (5) 捲起袖子 (6) 琵琶遮臉
- 小結論：想讓做過的事情不見了，可以透過相反的做法來抵銷掉
這相反的概念就是_____。
這具有抵銷作用的量的大小就稱為_____。
- 量量看，下面的粗黑線條有多長？你會選擇哪一種擺法來測量呢？
☐上面 ☐下面



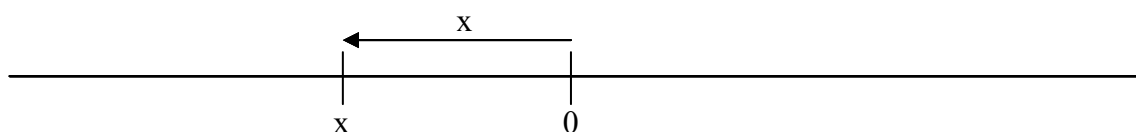
- 承上，有沒有發現，直尺上的數字代表什麼意思呢？請你試著在上面的直尺上畫出數字 5 在直尺上真正代表的意思！
- 觀察下面數字 5 的位置，數字-5 應該畫在哪裡，才會有表達出負號代表想法，又可以將數字 5 抵銷掉的感覺呢？



- 觀察下面數字 x 的位置，數字-x 應該畫在哪裡，才會有表達出負號代表想法，又可以將數字 x 抵銷掉的感覺呢？

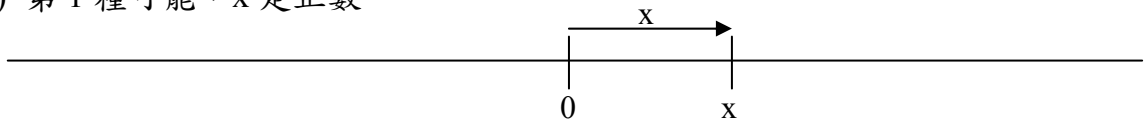


- 觀察下面數字 x 的位置，數字-x 應該畫在哪裡，才會有表達出負號代表想法，又可以將數字 x 抵銷掉的感覺呢？

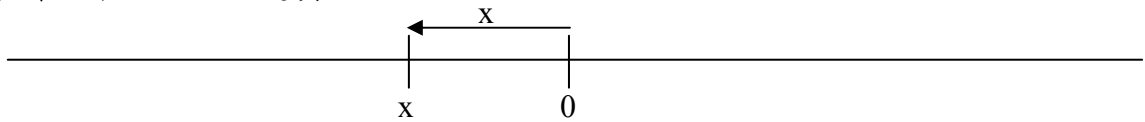


8. 請你試著在下面直線上畫出 $2x+3$ ，先不考慮 x 可能是零喔。

(1) 第 1 種可能， x 是正數



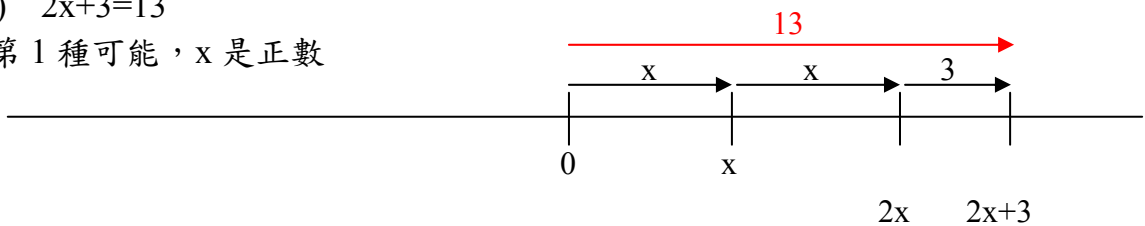
(2) 第 2 種可能， x 是負數



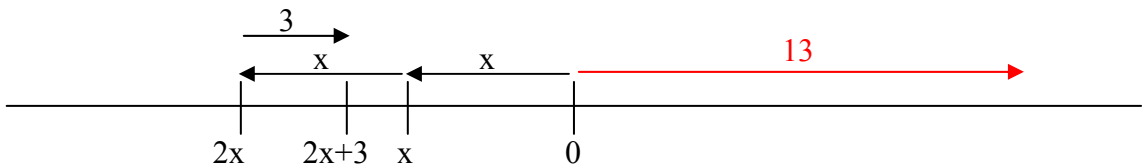
9. 我們來畫圖表現下面關係式中的圖形，哪一種畫法才是正確的？

(1) $2x+3=13$

□ 第 1 種可能， x 是正數



□ 第 2 種可能， x 是負數



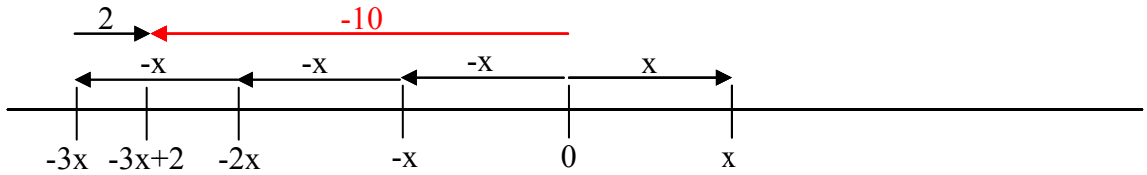
(2) 請算出 x 的值

(3) 試著將圖形解題的方法寫成橫式的數學算式來解題，加油！

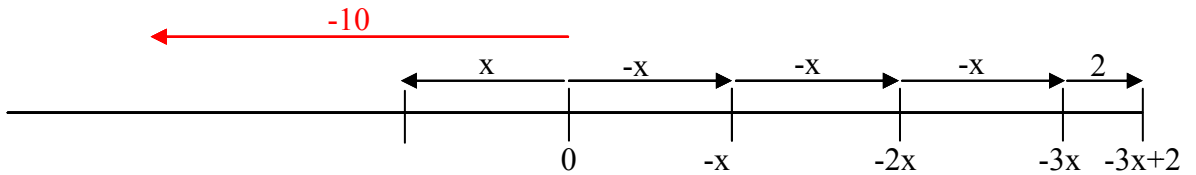
10. 我們來畫圖表現下面關係式中的圖形，哪一種畫法才是正確的？

(1) $-3x+2=-10$

□第 1 種可能， x 是正數



□第 2 種可能， x 是負數



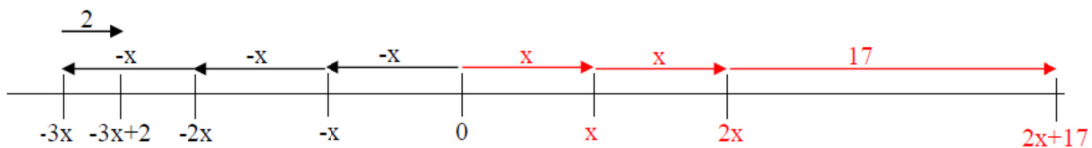
(2) 請算出 x 的值

(3) 試著將圖形解題的方法寫成橫式的數學算式來解題，加油！

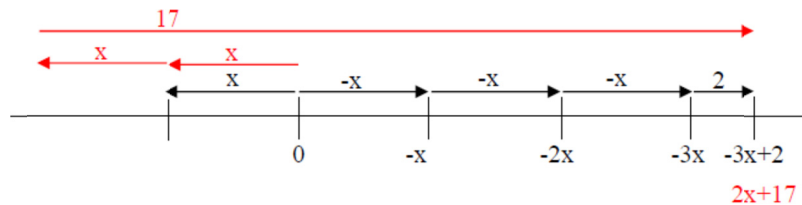
11. 我們來畫圖表現下面關係式中的圖形，哪一種畫法才是正確的？

(1) $-3x+2=2x+17$

□第 1 種可能， x 是正數



□第 2 種可能， x 是負數



(2) 請算出 x 的值

(3) 試著將圖形解題的方法寫成橫式的數學算式來解題，加油！

科學記號

1. 數字 432659871 和 91275685，誰比較大？

☐ 91275685 比較大

因為最前面的數字 $9 > 4$

432659871

91275685

☐ 432659871 比較大

因為 432659871 數字比較長

432659871

91275685

伏筆：位址、等級

2. 請在數字下方空格中填入數字真正代表的位值

留空位給位值的指數寫法

伏筆：指數律

單位	萬	千	百	十	個	十分	百分	千分
位址	1	1	1	1	1	1	1	1
位值				10	1	0.1		

晉級

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

降級

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

3. 我們知道 $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ ，那數字 1000000000000000000 應該怎麼做紀錄比較方便呢？請發揮你的創意。

讓學生發揮創意，再簡化紀錄為指數，

再回第 2 題寫上位值的指數寫法，引導出 10^0 、 10^{-1} ...

4. 薪水 9999 和 10000 明明只相差 1 元而已，但是，怎麼讓人感覺上差很大！？你知道為什麼嗎？

	9	9	9	9		1	0	0	0	0
+										

滿 10 就晉級

不足 1 就降級

5. 數字 0.00083479635 和 0.00256，誰比較大？

☐ 0.00083479635 比較大

因為最前面的數字 $8 > 2$

0.00083479635

0.00256

☐ 0.00083479635 比較大

因為數字比較長

0.00083479635

0.00256

☐ 0.00256 比較大

因為千分比萬分大，越分會越小

0.00083479635

0.00256

6. 請改寫下面空格中所填的數字，讓我們更能**直接看到(讀出)**數字真正的大小

單位	萬	千	百	十	個	十分	百分	千分
位址	0.3			12		43	0.7	
改寫								

有發現嗎？當空格中的數字是多少的時候，我們就可以**直接看到(讀出)**數字真正的大小，而不需要再做改寫？

讓學生感覺到科學記號前端數字必須有規定才能直接展現出數字真的等級

7. 請試著完成下面的計算

(1) $2.3 \text{ 萬} + 5.1 \text{ 千}$

(2) $2.3 \text{ 萬} - 5.1 \text{ 千}$

科學記號是數字等級化的紀錄方式，加減計算時仍須要回歸到同單位，乘除法則利用晉級降級的語詞進行運算，除法可以利用等值分數概念(分以分母同時縮放倍數不變)

(3) $2.3 \text{ 萬} \times 5.1 \text{ 千}$

(4) $2.3 \text{ 萬} \div 5.1 \text{ 千}$

(5) $2.3 \text{ 萬分} + 5.1 \text{ 千分}$

(6) $2.3 \text{ 萬分} - 5.1 \text{ 千分}$

(7) $2.3 \text{ 萬分} \times 5.1 \text{ 千分}$

(8) $2.3 \text{ 萬分} \div 5.1 \text{ 千分}$

8. 西元 1999 年 9 月 21 日台灣集集 7.6 級大地震，西元 2011 年 3 月 11 日日本福島 9.0 級大地震，都產生極大的災情，這兩個地震級數相差 1.4 級，這表示地震的強度 9.0 級大約是 7.6 級的幾倍呢？
☐1000 倍 ☐幾 1000 倍

註：芮氏地震規模與能量關係，規模每相差 1.0，釋放的能量就相差 $10^{1.5}$ 倍，即約 32 倍；每相差 2.0，釋放的能量則相差 10^3 倍，即 1000 倍。

9. 小明在網路上搜尋到水資源的資料如下：「地球上水的總儲量為 1.36×10^{18} 立方公尺，其中可供人類使用的淡水只占全部的 0.3%。」根據他搜尋到的資料，判斷可供人類使用的淡水有多少立方公尺？

10. 將 4.31×10^{-5} 寫成小數形式，則其小數點後第四位數字為何？

指數律

1. 數字運算的下方是數字運算的簡記方式，請按照表格填寫規則完成其它空格的填寫

結果			8	4	2			
數字 運算			$2 \times 2 \times 2$	2×2	2			
簡記			2^3	2^2	2^1			

晉級

$\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$

降級

$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$

這是小學位址表的另一種表現方式

2. 數字運算的下方是數字運算的簡記方式，請按照表格填寫規則完成其它空格的填寫

結果			-8	4	-2			
數字 運算			$(-2) \times (-2) \times (-2)$	$(-2) \times (-2)$	-2			
簡記			$(-2)^3$	$(-2)^2$	$(-2)^1$			
改寫			-2^3	2^2	-2^1			

晉級

$\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$

降級

$\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$

負數的次方學生容易出錯，要很慢！

3. 請比較下面這些數字的大小

(1) 2^8 、 4^6 、 8^3

(2) $(-2)^8$ 、 $(-4)^6$ 、 $(-8)^3$

利用比較大小談出指數律。指數律應該來自於數字的分解，什麼時候才會有將數字分解的需求呢？應該是在利用短除法化簡公倍數的時候出現

(3) $(2 \times 3)^{15}$ 、 $2^{14} \times 3^{16}$

(4) $2^{13} \times 4^9$ 、 $4^{12} \times 8^3$

(5) $(2^9)^8$ 、 $(2^{10})^7$

4. 計算 $7^3 + (-4)^3$ 之值為何？

5. 下列敘述何者正確？

(A) $2^3 - (-2)^3 = 0$ (B) $2^4 - (-2^4) = 0$
(C) $(-2)^3 - (-2^3) = 0$ (D) $(-2)^4 - (-2^4) = 0$

6. 計算 $11 - 3^2 \times [2 - (-3)^2] + 6$ 之值為何？

7. 算式 $(-3)^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^3}$ 之值為何？