

屏東縣107學年度「數學生根教學」

國小鄉鎮教學共備人才培訓

學員手冊

09月05日 單元

整數四則運算

小數四則運算

分數的意義

分數四則運算

目錄

共備研習內容

一、整數與小數的四則運算.....	1
二、分數與分數的四則運算.....	25



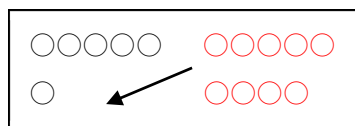
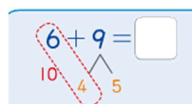
一、反思問題

1. 哪些情況我們會這樣數數：1、2、3、4、...？
我們透過數數想知道什麼？
2. 國小一年級數學的第一堂課「數到 10」，為什麼我們會選擇從 1 數到 10 就停了？為什麼 1 到 9 都是 1 個數字，10 這個數字會使用 1 和 0 兩個數字合成 1 個數字 10？10 這個數字我們會讀成「十」？為什麼不讀成「一零」呢？
3. 當我們這樣數數：2、4、6、8、...，或者 5、10、15、...，這樣數數到 30，和 1、2、3、4、... 的差別在哪裡？這麼數有了什麼不同的想法？以及可以發展什麼概念？
4. 數字表現了什麼？「★★★」和「3★」的表現方式有什麼不同？當我們說「3」和說「3 杯」，一樣都有 3 但感覺上是有所分別的，您能說清楚嗎？譬如說，曉華買了 3 杯飲料，「杯」這個量詞在「3 杯」中扮演什麼角色？「3」這個數字在「3 杯」中扮演什麼角色？如果沒有量詞的那個數，它的意義是什麼？生活中我們經常使用數字來表現量的大小，數字的作用究竟是什麼呢？
5. 地下 10 樓我們覺得很深，地上 3 樓我們覺得不高，可是我們又說 3 比 -10 大，為什麼 3 會比 -10 還大？或者，我們先來想一下，為什麼 5 會比 3 還大呢？道理是什麼呢？數字的大小是排在數線上的大小，還是？

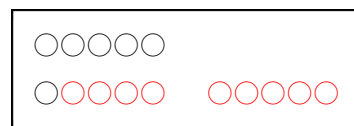
6. 計算 $6 + 9$ 的方式有哪些？不同的算法想要發展的主要概念各是什麼？
下面兩種念法有什麼不同？

(1) 6 加 9 等於多少？

(2) 6 加 9 這個算式會等於多少？



繼續點數



將 6 合成 10

7. 對於數，當我們想讓學生發展進位、退位與位值的概念的時候，一般課本都採用下面的圖示方式來表現個、十和百，那麼，為什麼位址的安排順序我們會選擇「百、十、個」，而不是「十、百、個」或是「個、十、百」呢？發展位值的概念我們是想要講大小還是想要比大小呢？



8. 當我們點數收銀機的錢時，我們會怎麼做紀錄呢？完成紀錄後進行結算，在整數加法的直式計算過程，如何記錄書寫會比較清楚自然，學生會比較容易懂呢？

9. 生活日常最常計算減法的時機是？此時，我們又是怎麼計算減法的呢？在整數減法的直式計算過程，如何記錄書寫會比較清楚自然，學生會比較容易懂呢？

10. 在整數運算的時候，我們常說乘法是加法的連加，例如： $5+5+5+5+5+5$ ，有 6 個 5 相加，可以寫成 5×6 ；可是，乘以分數便無法依此類推，顯然乘法是有別於加法的另外一種運算，加法和乘法在運算上的本質各是什麼呢？
11. 加法和乘法的交換律想突顯的是兩數的交換還是運算的結果？
以下題為例：一袋蘋果有 3 個，媽媽買了 7 袋，一共有多少個蘋果？
如果寫「 3×7 」的計算想法是什麼？
如果寫「 7×3 」的計算想法是什麼？
12. 在整數運算的時候，我們常說除法是減法的連減，例如：31 可以用 5 連減 6 次後還剩下 1，可以寫成 $31 \div 5 = 6 \dots 1$ ，這個連減的過程我們最在意的是什麼呢？我們也會將 $31 \div 5$ 寫成 $\frac{31}{5}$ ，這時候就無法再說除法是連減了，顯然除法是有別於減法的另外一種運算，減法和除法在運算上的本質各是什麼呢？接著再想想，為什麼除數不為 0，也就是為什麼除以 0 是無意義的呢？
13. 在二下的單元中，從分裝與平分帶出除法，分裝問題和平分問題共同的核心概念是什麼？
14. 我們為什麼要叫學生背誦九九乘法表？九九乘法表對於學生接下來哪些概念的學習有幫助？教學生背誦九九乘法表時應該關注什麼，在日後的使用上幫助最大？

15. 「3.0、1.5、0.5 這三個數字都是小數嗎？「小數」的「小」指的是和哪個數比較得到的小呢？而「小數點」這個符號所要表現的意涵是什麼？

16. 下面三種小數乘法的直式計算過程，您會選擇哪一種呢？這三種運算過程中的想法各是什麼呢？

$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times 2.1 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 6.72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times 2.1 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 6.72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.2 \\ \times \quad 2.1 \\ \hline 32 \\ 64 \\ \hline 6.72 \end{array}$
--	--	--

17. 下面小數除法直式計算過程的想法是什麼？你會選擇這樣進行運算嗎？還是你有更好的選擇？

+個+ 分 $\begin{array}{r} 1 \\ 0.3 \overline{) 3.74} \\ \underline{30} \\ 44 \end{array}$	+個+ 分 $\begin{array}{r} 1 \\ 0.3 \overline{) 3.74} \\ \underline{03} \\ 71 \end{array}$	+個+ 分 $\begin{array}{r} 24. \\ 0.3 \overline{) 74.00} \\ \underline{60} \\ 140 \\ \underline{120} \\ 200 \\ \underline{180} \\ 200 \\ \underline{180} \\ 20 \end{array}$
---	---	---

18. 已經有分數了，為什麼還需要學習小數？小數和分數的差別是什麼？

什麼時候我們用 0.75？什麼時候我們用 $\frac{3}{4}$ ？

二、核心概念

1. 整數

2. 數數

3. 數的作用

4. 數字的大小

5. 加、減、乘、除

6. 四則運算

7. 加法和乘法的交換律

8. 小數

9. 小數的乘除法

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

整數	
數數	
數的作用	
數字 的大小	
加減乘除	
四則運算	
交換律	
小數	
小數 的乘除	

四、觀摩、討論&修改

1. 參考影片

- [!\[\]\(97d7445697a94970d6443da16b12b5fa_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20160910 僑孝國小 五年級 數的作用 part1 \(22:00~\)](#)
- [!\[\]\(258b828d223cb6b35d2b001cf8c6c1e7_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20160910 僑孝國小 五年級 數的作用 part2
談「四位數減法」](#)
- [!\[\]\(3ae3791b31be30fab239cd4ec63dfafe_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20170914 彰化縣豐崙國小\(小三-四位數的加減\)](#)
- [!\[\]\(7835479178eea406b1967e30c6fcf845_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20180416 臺東縣大南國小 三年級 入班教學 小數](#)
- [!\[\]\(bacea8e86e4e71bdd65916e2330bb152_img.jpg\)數學新世界--CA教數學--20180529 臺東縣寧埔國小 五年級 入班教學 整數
除以整數\(商是小數\) part1](#)
- [!\[\]\(103e1d41c49e54d33b8438f1f22779e7_img.jpg\)數學新世界--CA教數學--20180529 臺東縣寧埔國小 五年級 入班教學 整數
除以整數\(商是小數\) part2](#)
- [!\[\]\(127f84612f2d3af1475c40eb1d227d82_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20180313 高雄市壽山國小 五年級 小數乘法 part1](#)
- [!\[\]\(bd481c0ca3cf419dd12c334e7c6134ef_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20180313 高雄市壽山國小 五年級 小數乘法 part2](#)
- [!\[\]\(4bad89d7f2d54a9dd8d439405672b516_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part1](#)
- [!\[\]\(ca5efa1fd99f0257579e9142bacd2556_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part2](#)
- [!\[\]\(aa9ef994bed7fa38b15a4e5e70bf6ae9_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part3](#)
- [!\[\]\(74566d81d00a0219b912a74e95a75e40_img.jpg\)數學新世界--CA談數學--20160923 僑孝國小 六年級 小數除法 part4](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

◎整數的乘法與除法

在做任何計算時，我們除了清楚知道自己在計算什麼，而且還得求算出正確的結果。國小三年級我們學了三位數的加減法，並利用直式的計算方法使得計算時能更加清楚明確！例如：求算 $536+285$ 的結果，直式過程為：

	百	十	個
	5	3	6
+	2	8	5
	7	11	11

$$\begin{aligned}536 &= 500 + 30 + 6 \\285 &= 200 + 80 + 5 \\500 + 200 &= 700 \\30 + 80 &= 10 + 20 + 80 = 10 + 100 \\6 + 5 &= 1 + 5 + 5 = 1 + 10\end{aligned}$$

我們來看看整數的加法，它的計算過程的記錄方式是如何被簡化的，以及對齊位址的好處。

<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>11</td><td>11</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5						7	11	11	<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5							1	1		1	1	0						7	0	0						8	2	1	<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>7</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5							1	1		1	1	0						7	0	0						8	2	1	<table><thead><tr><th></th><th>百</th><th>十</th><th>個</th></tr></thead><tbody><tr><td></td><td>5</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>+</td><td>2</td><td>8</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="4"> </td></tr><tr><td></td><td>8</td><td>2</td><td>1</td></tr></tbody></table>		百	十	個		5	3	6	+	2	8	5						8	2	1
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
	7	11	11																																																																																																																								
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
		1	1																																																																																																																								
	1	1	0																																																																																																																								
	7	0	0																																																																																																																								
	8	2	1																																																																																																																								
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
		1	1																																																																																																																								
	1	1	0																																																																																																																								
	7	0	0																																																																																																																								
	8	2	1																																																																																																																								
	百	十	個																																																																																																																								
	5	3	6																																																																																																																								
+	2	8	5																																																																																																																								
	8	2	1																																																																																																																								

◎概念一：乘法

接下來，我們來看一看做整數的乘法計算時，它的記錄方式如何書寫。以 89×4 為例：

89×4 的意思是 89 的 4 倍 也可以看做 80 的 4 倍與 9 的 4 倍併起來 $89 \times 4 = (80 + 9) \times 4$ $= 80 \times 4 + 9 \times 4$ $= 320 + 36$	$\begin{array}{r} 89 \\ 89 \\ 89 \\ + 89 \\ \hline 32 \quad 36 \\ 32 \text{個拾} \quad 36 \text{個壹} \end{array}$	$\begin{array}{r} 89 \\ \times 4 \\ \hline 320 \\ 36 \\ \hline 356 \end{array}$
---	--	---

再以 35×23 為例：

35×23 的意思是 35 的 23 倍 也可以看做 35 的 20 倍與 35 的 3 倍併起來 $35 \times 23 = 35 \times (20 + 3)$ $= 35 \times 20 + 35 \times 3$ $= 700 + 105$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 700 \\ + 600 \\ \hline 805 \end{array}$	$\begin{array}{r} 35 \\ \times 23 \\ \hline 105 \\ 700 \\ \hline 805 \end{array}$
--	--	---

動動筆想數學

- (1) 幾個 1 元硬幣可以換成 1 個 10 元硬幣？
(2) 幾個 10 元硬幣可以換成 1 張 100 元紙鈔？
(3) 幾張 100 元紙鈔可以換成 1 張 1000 元紙鈔？
(4) 幾個 10 元硬幣可以換成 9 張 100 元紙鈔？
- 請在空格內填寫適當的數，並想想，相同數字在不同位數時，它們彼此之間換算的關係。

仟	佰	拾	壹
1	1	1	1
9	9	9	9

壹 $\times 10 =$ _____；拾 $\times 10 =$ _____；佰 $\times 10 =$ _____；仟 $\times 10 =$ _____；萬 $\times 10 =$ _____

壹 $\times 100 =$ _____；拾 $\times 100 =$ _____；佰 $\times 100 =$ _____；仟 $\times 100 =$ _____

9 仟 $\Leftrightarrow$ _____ $\times 9$ 佰 $\Leftrightarrow$ _____ $\times 9$ 拾 $\Leftrightarrow$ _____ $\times 9$ 壹

★任何一個數擺在個位數、或十位數、或百位數、...，_____ 之後，就會進一個位數；反之，_____ 之後，就會退一個位數。

3. 想一想，下面三種計算方式有什麼不同？

試著說說看每種方式怎麼做計算。

①

計算過程說明：

$$\begin{array}{r}
 3\ 0\ 0\ 0 \\
 \times\ 2\ 0\ 0 \\
 \hline
 0\ 0\ 0\ 0 \\
 0\ 0\ 0\ 0 \\
 6\ 0\ 0\ 0 \\
 \hline
 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

②

計算過程說明：

$$\begin{array}{r}
 3\ 0\ 0\ 0 \\
 \times\ 2\ 0\ 0 \\
 \hline
 6\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
 \end{array}$$

③

計算過程說明：

$$\begin{aligned}
 &3000 \times 200 \\
 &= 3000 \times 100 \times 2 \\
 &= 300000 \times 2 \\
 &= 600000
 \end{aligned}$$

4. 請計算下列各題：

(1) $200 \times 4 =$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 0 \\
 \times\ 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

(2) $200 \times 30 =$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 0 \\
 \times\ 3\ 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

(3) $200 \times 34 =$

$$\begin{array}{r}
 2\ 0\ 0 \\
 \times\ 3\ 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

(4) $324 \times 6 =$

$$\begin{array}{r}
 3\ 2\ 4 \\
 \times\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

(5) $324 \times 30 =$

$$\begin{array}{r}
 3\ 2\ 4 \\
 \times\ 3\ 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

(6) $324 \times 36 =$

$$\begin{array}{r}
 3\ 2\ 4 \\
 \times\ 3\ 6 \\
 \hline
 \end{array}$$

5. 為什麼做整數的加法和乘法的直式計算時，我們習慣從個位數開始算起呢？看看下面的計算過程，寫出從個位開始計算的好處。

每個步驟都從
最大的位數開始算

$$\begin{array}{r}
 78 \\
 \times 47 \\
 \hline
 28^3 2 \\
 49^5 6 \\
 \hline
 2^1 5^1 6 6 \\
 3666
 \end{array}$$

（圖中展示了從最高位開始計算的過程，並標註了進位）

每個步驟都從
最小的位數開始算

$$\begin{array}{r}
 78 \\
 \times 47 \\
 \hline
 49^5 6 \\
 28^3 2 \\
 \hline
 3^1 6^1 6 6
 \end{array}$$

（圖中展示了從最低位開始計算的過程，並標註了進位）

所以，從個位數字算起的好是：_____

◎概念二：除法

我們再來看一看做整數的除法計算時，它的計算想法。

以 $2697 \div 300$ 為例，2697 除以 300 的意思是，每次拿 300，2697 最多可以拿幾個 300，會有剩餘嗎？或者 300 的幾倍（整數倍）是 2697？可以整除嗎？

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 300 \overline{) 2697} \\
 \underline{300} \rightarrow 300 \times 1
 \end{array}$$

300 的 1 倍

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 300 \overline{) 2697} \\
 \underline{3000} \rightarrow 300 \times 10
 \end{array}$$

300 的 10 倍太大了！

$$\begin{array}{r}
 8 \\
 300 \overline{) 2697} \\
 \underline{2400} \\
 297
 \end{array}$$

2697 最多
可以拿 8 個 300

再來看一個例子：

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 15 \overline{) 563} \\
 \underline{15} \rightarrow 15 \times 1
 \end{array}$$

15 的 1 倍

$$\begin{array}{r}
 10 \\
 15 \overline{) 563} \\
 \underline{150} \rightarrow 15 \times 10
 \end{array}$$

15 的 10 倍

$$\begin{array}{r}
 100 \\
 15 \overline{) 563} \\
 \underline{1500} \rightarrow 15 \times 100
 \end{array}$$

15 的 100 倍
太大了！

$$\begin{array}{r}
 37 \\
 15 \overline{) 563} \\
 \underline{555} \\
 8
 \end{array}$$

563 最多
可以拿 37 個 15

再來看看整數除法計算的記錄方式如何書寫。

以 $356 \div 89$ 為例，356 除以 89 的意思是，356 可以拿走幾個 89 會有剩下嗎？或者 89 的幾倍（整數倍）是 356？可以整除嗎？

試算：

$$89 \times 5 = 400 + 45 = 445$$

$$89 \times 4 = 320 + 36 = 356$$

$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 4 \\ 89 \overline{) 356} \\ \underline{36} \\ - 320 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 4 \\ 89 \overline{) 356} \\ \underline{32} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 4 \\ 89 \overline{) 356} \\ \underline{356} \\ \hline 0 \end{array}$
--	---	--

再以 $700 \div 24$ 為例，

試算：

$$24 \times 20 = 480$$

$$24 \times 30 = 720$$

$$24 \times 5 = 100$$

$$24 \times 6 = 124$$

$$24 \times 7 = 168$$

$$24 \times 8 = 192$$

$$24 \times 9 = 216$$

$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 2 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 2 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ \hline 22 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 29 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ 220 \\ \underline{216} \\ \hline 4 \end{array}$
		
24 的 20 倍 是 48 個 10 (480)		

當我們在不同的情境中做計算時，便會產生不同的計算想法，讓我們再算一算、想一想！

$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 24 \overline{) 700} \end{array}$	把 7 個 100 換成 70 個 10 	$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 24 \overline{) 700} \end{array}$
7 個 100 要 24 份 不夠，沒辦法分		70 個 10 要分 24 份，可以分！

$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 2 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ \hline 22 \end{array}$		$\begin{array}{r} \text{百+個} \\ 29 \\ 24 \overline{) 700} \\ \underline{48} \\ 220 \\ \underline{216} \\ \hline 4 \end{array}$
		把 22 個 10 換成 220 個 1

70 個 10，分 24 份，每份 2 個 10
共分了 48 個 10，剩 22 個 10 不夠分
將 22 個 10 換成 220 個 1 來分

動動筆想數學

1. 請試著將下方計算 3527 除以 45 的過程中，每一個步驟在算什麼。

$$\begin{array}{r}
 1^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{45} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{45} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{90} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 7 \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{315} \\
 37
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 79^{\times} \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{315} \\
 377 \\
 \underline{405} \\
 17
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 78 \\
 45 \overline{) 3527} \\
 \underline{315} \\
 377 \\
 \underline{360} \\
 17
 \end{array}$$

太大了！

太小了！

還可以再大！

超過了！

2. 請計算 3527 除以 25，並試著寫下計算過程中的每一個步驟在算什麼。

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 25 \overline{) 3527} \\
 \underline{25} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 2^{\times} \\
 25 \overline{) 3527} \\
 \underline{50} \\

 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1? \\
 25 \overline{) 3527} \\
 \underline{25} \\
 10
 \end{array}$$

太大了！

請繼續完成計算！

- ★當我們在做除法的時候，計算的過程實際上是在做乘法以及比較，因為_____。

3. 香甜果園今天採收一批蘋果，已知每 15 顆蘋果裝成一籃，剛好可以全數裝完，不多也不少。

- (1) 如果今天採收的蘋果總數量，最接近 500 顆但不到 500 顆，那麼今天總共採收多少顆蘋果？



- (2) 如果今天採收的蘋果數量，最接近 500 顆但超過 500 顆，那麼今天採收了多少顆蘋果？

- (3) 如果今天採收的蘋果數量，在 580 顆到 650 顆之間，那麼今天採收的蘋果最多會有幾顆？最少會有幾顆？

4. 以下是第3題的解題計算，試著寫下解題過程中的算式，以及每個步驟的計算想法。

計算過程與算式	計算的想法
(1) $500 \div 15 = 33 \dots 5$ 這個 3，實際上是 30 $ \begin{array}{r} \overset{\text{↑}}{3}3 \\ 15 \overline{) 500} \\ \underline{15 \times 30 = 450} \\ 50 \\ \underline{15 \times 3 = 45} \\ 5 \end{array} $	每 15 視作 1 單位量， 500 是 30 個 15 又 3 個 15， 最後剩餘 5，不到 1 個 15。
(2) $ \begin{aligned} 500 \div 15 &= 33 \dots 5 \\ 500 &= 15 \times 33 + 5 \\ -5 &\qquad\qquad -5 \\ \\ 495 &= 15 \times 33 \end{aligned} $	
(3) $ \begin{aligned} 500 \div 15 &= 33 \dots 5 \\ 500 &= 15 \times 33 + 5 \\ +10 &\qquad\qquad +10 \\ \\ 510 &= 15 \times 33 + 15 \times 1 \\ &= 15 \times 34 \end{aligned} $	
(4) $ \begin{aligned} 580 \div 15 &= 38 \dots 10 \\ 580 &= 15 \times 38 + 10 \\ +5 &\qquad\qquad +5 \\ 585 &= 15 \times 38 + 15 \times 1 \\ &= 15 \times 39 \end{aligned} $	

(5) <table border="1" data-bbox="461 246 660 495"> <tr><td>585</td><td>39</td></tr> <tr><td>600</td><td>40</td></tr> <tr><td>615</td><td>41</td></tr> <tr><td>630</td><td>42</td></tr> <tr><td>645</td><td>43</td></tr> </table>	585	39	600	40	615	41	630	42	645	43	
585	39										
600	40										
615	41										
630	42										
645	43										
(6) $650 \div 15 = 43 \dots 5$ $650 = 15 \times 43 + 5$ $\text{—}5 \qquad \qquad \text{—}5$ $645 = 15 \times 43$											
(7) 580 $\downarrow$ $15 \times \boxed{38} + \boxed{10}$ $580 = 15 \times 38 + 10$ $\text{+}5 \qquad \text{+}5$ $585 = 15 \times 38 + 15 \times 1$ $= 15 \times 39$ 650 $\downarrow$ $15 \times \boxed{43} + \boxed{5}$ $650 = 15 \times 43 + 5$ $\text{—}5 \qquad \text{—}5$ $645 = 15 \times 43$											

5. 練習題：弟弟有一桶彈珠，數量大約在 55~65 顆之間，每 3 顆一數，剛好數完。
- 請問弟弟的彈珠可能有幾顆？盡可能寫出你所理解的算法。



◎概念三：四則運算

數和數的運算有加、減、乘、除四種運算，當一個算式中有加有減、有乘有除，到底是我們該怎麼計算呢？還是，其實是我們想怎麼計算！

動動筆想數學

1. 試列出下列各題的算式：

(1) 噹~噹~噹~下課了！教室原本有 25 個人，走出去 13 個人，後來又進來 6 個人。請問現在有多少人，列出算式即可。

(2) 噹~噹~噹~下課了！教室原本有 25 個人，有 8 個男生和 5 個女生離開教室，後來又進來 2 個男生和 3 個女生。請問現在有多少人，列出算式即可。

(3) 爸爸的年齡是姊姊年齡的 2 倍和弟弟年齡的 3 倍相加後再多 5 歲，姊姊是 7 歲、弟弟是 5 歲，請列出爸爸年齡的算式。

(4) 爸爸的年齡是姊姊和弟弟年齡和的 3 倍，假設姊姊是 7 歲、弟弟是 5 歲，請列出爸爸年齡的算式。

2. 請試著依照敘述寫出它的算式：

(1) 七十二減掉三十六再加二十五，算式：_____

(2) 七十二減掉三十六與二十五的和，算式：_____

(3) 12 的 3 倍除以 4，算式：_____

(4) 12 的 3 倍除以 4 加上 48 除以 9 的 3 倍，算式：_____

3. 試回答下列各題：

(1) $5-2+3$ 可以算成 $5-(2+3)$ 嗎？

(2) $2+3\times 7$ 可以算成 $(2+3)\times 7$ 嗎？

(3) $2+3\times 7$ 可以算成 $(2+3)\times 7$ 嗎？

(4) $12\div 4\times 3$ 可以算成 $12\div (4\times 3)$ 嗎？

4. 請計算 $\square \times 3$ ，如果我們不知道 $\square$ 是多少，我們可以算出 $\square \times 3$ 是多少嗎？_____

5. 請計算 $\square \div 3$ ，如果我們不知道 $\square$ 是多少，我們可以算出 $\square \div 3$ 是多少嗎？_____

6. 請試著讀出算式並寫下來你怎麼讀的：

$5\times 2-3+5-12\div 3\times 4$ ，讀法：_____

7. 請你利用括號來確定下面算式的計算順序。

(1) $5 \times 2 - 3 + 5 - 12 \div 3 \times 4$

(2) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} \times 2 + 3 \div 5 - 5$

◎小數與小數的運算

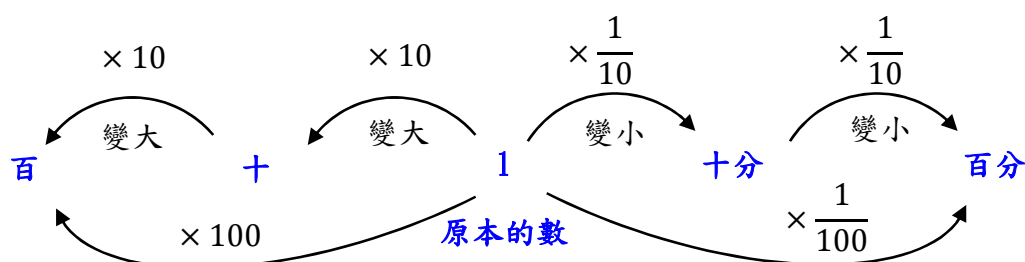
在撲克牌的遊戲當中，有一種玩法是「比大小」，因為撲克牌的點數為 1 到 13，所以，「比大小」會以點數 7 當基準，然後，猜猜看翻開的牌是比 7 大還是比 7 小。當你看到「小數」這個詞，是不是有「變小」的感覺？只是，怎麼樣的數才算是變小的數呢？以哪個數為基準呢？

◎概念一：小數

我們將整數以 10 進位記數，1~9 是個位數、10~99 是十位數、100~999 是百位數，依此類推！任意一個整數，每乘以 10 就晉一級，除以 10 就降一級。其中，個位數 1~9 的 10 倍是十位數，那麼，個位數除以 10 的數，我們應該用什麼名稱來表示這個位數呢？而個位數除以 100 的數，又稱作什麼位數呢？如果想要把這樣的數寫下來，我們應該要用什麼方式來區別和記錄呢？

動動筆想數學

1. 請觀察下面的圖示並回答問題：



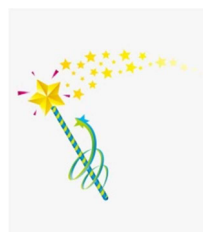
- (1) 當個位數要變成十位數，十位數要變成百位數，或者百位數要變成千位數，也就是說，數字要「進一位」，應是乘以多少呢？
- (2) 當十位數要變成個位數，個位數要變成十分位數，或者十分位數要變成百分位數，也就是說，數字要「退一位」，應是乘以多少呢？

(3) 從上面的圖示中，我們可以看到十分、百分是相對於十和百，那個相對的基準是以 _____ 為基準，也就是，把 _____ 做十分、百分、千分、....，而這些十分位、百分位、千分位...的數都是真分數！於是，我們利用「.」來把它做區分， $\frac{1}{10}$ 用十進位的記錄方式，記為 0.1； $\frac{2}{10}$ 用十進位的記錄方式，記為

0.2； $\frac{1}{100}$ 用十進位的記錄方式，記為 0.01。

(4) 小數的「小」是什麼意思呢？也就是說，比哪一個數字小的數就是小數（純小數）？

2. (1) 有一根神奇的魔法棒，被它輕輕一點，所有的東西就會變大或 者變小！這就好像魔法棒上有任何的數，如果要讓東西變大， 那麼魔法棒可能會出現下列哪些數，被點一下就把東西變大了呢？（請打勾）



☐ 5 ☐ 3.2 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 0.4 ☐ $\frac{5}{4}$ ☐ 0.02 ☐ 1 ☐ 0

(2) 承上題，如果要讓東西變小，那麼魔法棒可能就會出現下列哪些數，被點一下就把東西變大了呢？（請打勾）

☐ 5 ☐ 3.2 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 0.4 ☐ $\frac{5}{4}$ ☐ 0.02 ☐ 1 ☐ 0

(3) 如果都沒有改變，還是原來的樣子，那麼魔法棒上出現的數字是多少呢？

(4) 如果是變不見、變沒有了，那麼魔法棒上的數字是多少呢？

3. 讓我們來理清楚 67.35 這個數，它的每個位數的意思是什麼？

百	十	個	十分	百分
100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
	6	7	3	5

數字 6 的等級是 十 位

⇒ 代表有 6 個 10，數值是 60 倍

數字 7 的等級是 _____ 位，

⇒ 代表有 7 個 _____，數值是 _____ 倍

數字 3 的等級是 _____ 位，

⇒ 代表有 3 個 _____，數值是 _____ 倍

數字 5 的等級是 _____ 位，

⇒ 代表有 5 個 _____，數值是 _____ 倍

4. 下面定位板上的數字 3，它實際上所表示的數值是多少呢？

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
				3		

☐30 ☐3 ☐.3 ☐0.3 ☐0.03

5. 數字 3 分別寫在定位板甲、乙、丙三種不同的位置，請完成填空。

千位	百位	十位	個位	十分位	百分位	千分位
1000	100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
		3 _甲	3 _乙	3 _丙		

$3_{甲} = 3_{乙} \times \underline{\hspace{2cm}}$; $3_{丙} = 3_{乙} \times \underline{\hspace{2cm}}$

如果將數乘以 ，小數點就會向右移 1 位，晉 1 個等級。

如果將數乘以 ，小數點就會向左移 1 位，退 1 個等級。

6. 右邊 5 個小數，你會用什麼方法來比較它們的大小呢？

怎麼樣可以更清楚容易的比出它們的大小呢？

0.08	0.0087
	0.0807
0.0078	
	0.07008

7. 我們來看看下面幾種比較數字大小的方法：

(1) 目視

(2) 對位

(3) 等級

0.09、0.0065、	0.09	0.09 的等級 $\Rightarrow \frac{1}{100}$
	0.0065	
0.01002、0.0056、	0.01002	0.0065 的等級 $\Rightarrow$
	0.0056	
0.0063、0.0102	0.0063	0.01002 的等級 $\Rightarrow$
	0.0102	0.0056 的等級 $\Rightarrow$
		0.0063 的等級 $\Rightarrow$
		0.0102 的等級 $\Rightarrow$

請你寫下上面三種比較數字大小的方法，它們各自的優缺點。

8. 請比較下面 A、B、C、D 這 4 個小數的大小，當我們把小數點都對齊之後，接下來我們怎麼比出它們的大小呢？

A	3	.	0	0	4
B	1	0	.	5	
C	0	.	0	5	9
D	0	.	2	0	3

◎概念二：小數的加減法

小數是相對應十位、百位、千位...比 1 小的數，所以小數的加減法的運算規則都是與整數相同，每滿 10 就進一位。

例題：若某數減 0.154 會等於 0.8765，請問某數是多少呢？
我們將這樣的問題，試著用式子表示：

某數 $- 0.154 = 0.8765 \Rightarrow$ 將題目表示成算式

$+ 0.154 \quad + 0.154 \Rightarrow$ 想知道某數，於是將 0.154 加回來

某數 $= 0.8765 + 0.154 \Rightarrow$ 所以，某數等於 1.0305
 $= 1.0305$

某數 $+ 0.154 = 1.0305 + 0.154 = 1.1845$

從上面的式子來看，當某數減去一數之後，若我們想知道某數，那麼就把減掉的數加回來。

☺練習題：若某數加 0.273 會等於 0.6541，請問某數是多少呢？

★減的還原（相反）是 _____ ；
反之，加的還原（相反）是 _____ 。

◎概念三：小數的乘法

當我們在計算 2.3×3 或者 2.3×3.1 ，小數乘以整數或者小數乘以小數時，兩數相乘的直式中，小數點的位置該點在哪裡呢？應該對齊被乘數？乘數？還是都不是？

在理清楚之前，讓我們再複習一下數的等級與進退位的概念。

動動筆想數學

1. 試完成以下定位板的空格：

晉級←←					等級	→→降級				
4	3	2	1	0	()	()	()	()		
萬	千	百	十	個位	十分	百分	千分	萬分		
10000	1000	100	10	1	0.1	0.01	0.001	0.0001		
(1)		7	8	9		×10				
						÷10 (× 1/10)				
(2)		7	8	9		×100				
						÷100 (× 1/100)				
(3)	÷10 (×1/10) ×10 	1	2	3		→記為()				
(4)	÷10 (×1/10) ×10 		1	2	3	→記為()				
										→記為()
(5)	÷100 (×1/100) ×100 		1	2	3					

★一個數若乘以 10，這個數就會 _____ 一級，小數點會向 _____ 移一位；一個數若除以 10，等同乘以 $\frac{1}{10}$ ，這個數就會 _____ 一級，小數點會向 _____ 移一位。

2. 我們來想一想、算一算，小數的乘法，它的直式過程書寫的方式。

◎整數乘以小數

(1) $23 \times 0.1 = 2.3$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 0.1 \\ \hline 0.3 \\ \hline 2.3 \end{array}$	$\xrightarrow{\times 10 \text{ 放大}}$ $\Rightarrow 3 \times 0.1$ $\Rightarrow 20 \times 0.1$ $\xleftarrow{\times \frac{1}{10} \text{ 縮小回來}}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 1 \\ \hline 23 \\ \hline 2.3 \end{array}$
---	--	--

$\times 0.1$ 的意思是，1 倍再 $\frac{1}{10}$ 倍

(2) $23 \times 0.01 =$

(3) $23 \times 0.3 =$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 0.3 \\ \hline \end{array}$	$\xrightarrow{\times 10 \text{ 放大}}$ $\xleftarrow{\times \frac{1}{10} \text{ 縮小回來}}$	$\begin{array}{r} 23 \\ \times 3 \\ \hline 69 \\ \hline \end{array}$
---	---	--

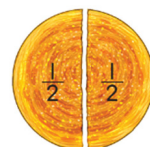
$\times 0.3$ 的意思是，3 倍再 $\frac{1}{10}$ 倍

(4) $23 \times 0.03 =$



一、反思問題

1. 我們什麼時候會用到分數？分數本質上想用來表示什麼？
2. 哥哥和姊姊各有 1 塊相同大小的蛋糕，如果哥哥分給弟弟 $\frac{1}{2}$ 塊，姊姊分給弟弟 $\frac{1}{3}$ 塊，弟弟會怎麼說他拿到多少的蛋糕呢？
3. 有 1 盒 Pizza 平分成 8 片，被吃掉 5 片，下面有兩種方式來表現剩下的 Pizza，在什麼情況下你會用(1)？在什麼情況下你會用(2)？
(1) 剩下 3 片 (2) 剩下 $\frac{3}{8}$ 盒。
4. 「 $\frac{2}{3}$ 」應該怎麼唸？
(1)三，分之二 (2)三分，之二 (3)三分之，二。
5. 分數，是「先分再數 su v」，以這樣的觀點來看「真分數」和「假分數」的真和假，它的道理應是什麼？
6. 右邊的圖示中 $\frac{1}{2}$ 這個數字想要表達的意思是什麼呢？先唸唸看，如果覺得怪怪的，那麼，要怎麼改比較好？



7. 請問 $\frac{1}{2}$ 張 Pizza 比較大，還是 $\frac{1}{4}$ 張 Pizza 比較大？我們不能明確地說哪一個比較大的原因是什麼？
8. 在分數的計算上，什麼情況會較頻繁的使用因數、倍數和質數呢？
9. 1 不是質數也不是合數的道理是什麼？質數和合數的差別是什麼，「質」數是想要用來標記數的什麼性質？
10. 我們會利用短除法計算兩數以上的最大公因數和最小公倍數，怎麼說明短除法的過程，才能讓學生可以理解這個做法每一個步驟背後的涵義，而不是背下短除法的寫法。
11. 教分數的加減法，最主要應該好好談清楚的核心概念是什麼？在什麼情況下，分數的運算跟整數一模一樣？
12. 教分數的乘法，最主要應該好好談清楚的核心概念是什麼？
- 怎麼跟學生說明 $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$ 和 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$ ？

3	12	18	15
2	4	6	5
	2	3	5

13. 整數的除法和分數的除法，它們的異同是什麼？

在做小數的除法時，我們是如何進行的？其核心想法是什麼？

14. 怎麼跟學生說明 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ，才不會只是在記「除以一個分數等於乘上它的倒數」這個算則？

15. 請列出學生學習這個單元常見的錯誤想法，我們可以怎麼說清楚來幫助學生澄清概念？例如：

(1) 將 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 計算成 $\frac{1+1}{2+3}$ 。

(2) 題目： $\frac{2}{3} = \frac{2+(\quad)}{3+6}$ ，將()內的數字也寫 6。

二、核心概念

1. 分數

2. 真分數、假分數

3. 等值分數（擴分、約分）

4. 倍數、因數

5. 質數

6. 短除法

7. 分數的加減法

8. 分數的乘法

9. 分數的除法

三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

分數	
真分數 假分數	
等值分數 擴分、約分	
倍數 因數	
質數	

短除法	
分數 的加減法	
分數 的乘法	
分數 的除法	

四、觀摩、討論與修改

1. 參考影片

 [數學新世界--CA--教案設計討論 教師研習 20180613 \(彰化縣大湖國小\)](#)

 [數學新世界--CA--等值分數 入班教學 四年級 20180528 \(彰化縣豐崙國小\) PART2](#)

 [數學新世界--CA--五年級 分數的意義和分數乘法 入班教學 20180319 \(臺東縣初來國小\)](#)

 [數學新世界--CA--六年級 分數除法 入班教學 20180319 \(臺東縣初來國小\)](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20170920 彰化縣民生國小 除法 短除法 part2](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五年級教材。

◎概念一：分數

「分數」，這個詞對我們而言很直覺的理解是，當我們要分東西時會用到的數，比如說：一個披薩，要平分給 5 個人，則每個人拿到的那一塊披薩是原來那塊完整披薩的「五分之一」；還有，20 顆糖果要平分給 4 位小朋友，每位小朋友拿到的糖果有 $20 \div 4 = \frac{20}{4} = 5$ 顆。

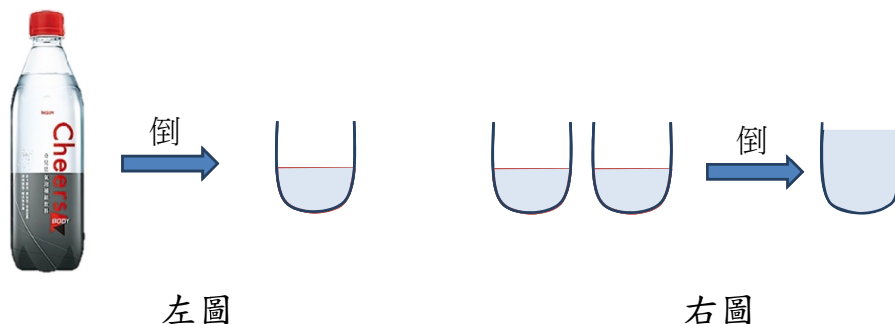
我們可以說，分數的產生是生活中想做「平分」的需求而來的。

動動筆想數學

1. 平平覺得口渴買了一瓶飲料，拿了 2 個杯子各倒半杯，一杯給自己，一杯分享給好朋友安安。

(1) 左圖中看得出來是半杯嗎？

(2) 如右圖將平平和安安各自的半杯倒在一起，發現杯子沒有滿，這表示什麼呢？



(3) 如果真的是半杯，則_____個半杯的飲料倒在杯子內會剛好滿。

2. 將 1 杯飲料分別倒入 5 個相同杯子，假設每杯的量相同：

(1) 如果將這 5 杯的飲料都倒入同一個杯子，卻倒不滿一杯；

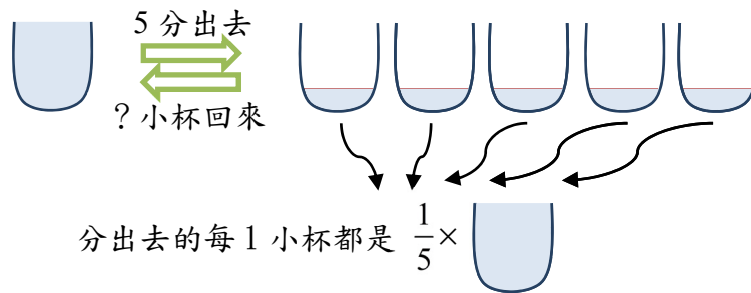
則每一杯的飲料量 ☐ 小於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 等於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 大於 $\frac{1}{5}$ 杯

(2) 如果將這 5 杯的飲料都倒入同一個杯子，卻滿了出來；

則每一杯的飲料量 ☐ 小於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 等於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 大於 $\frac{1}{5}$ 杯

(3) 如果將這 5 杯的飲料都倒入同一個杯子，剛剛好滿一杯；

則每一杯的飲料量 ☐ 小於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 等於 $\frac{1}{5}$ 杯 ☐ 大於 $\frac{1}{5}$ 杯



(4) $\frac{3}{5}$ 杯，相當於將 1 杯滿滿 _____ 分出去，再拿 _____ 杯回

來，因此， $\frac{3}{5}$ 杯比 1 杯 ☐ 大 ☐ 小 ☐ 剛好；

像這種真的有變小的分數，我們稱為 _____。

(5) $\frac{5}{5}$ 杯，相當於將 1 杯滿滿 _____ 分出去，再拿 _____ 杯回

來，因此， $\frac{5}{5}$ 杯比 1 杯 ☐ 大 ☐ 小 ☐ 剛好。

(6) $\frac{6}{5}$ 杯，相當於將 1 杯滿滿 _____ 分出去，再拿 _____ 杯回

來，因此， $\frac{6}{5}$ 杯比 1 杯 ☐ 大 ☐ 小 ☐ 剛好

像這種沒有真的變小的分數，我們稱為 _____。

3. $\frac{1}{2}$ 的讀法是「二分之一」，如果要在「二分之一」加個逗點，你會把它加在哪裏？

二 分 之 一

4. 底下是「二分之一」的圖示：



A



B



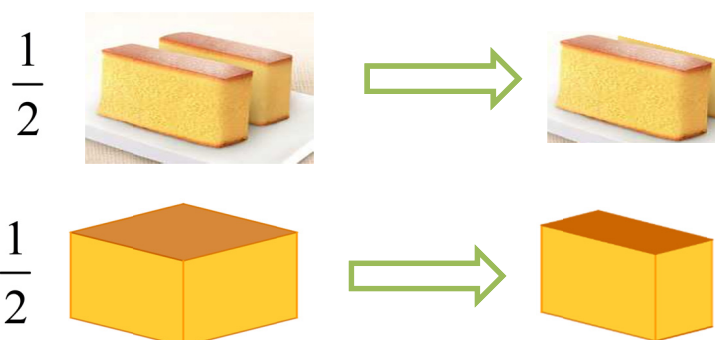
C



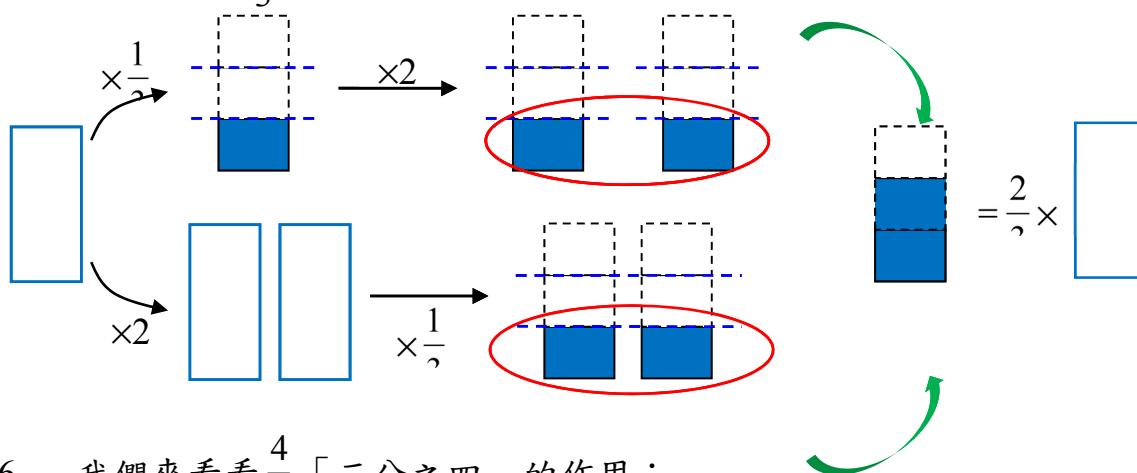
D

我們看到的 $\frac{1}{2}$ ，是 1 塊蛋糕、半圓的披薩、1 隻冰淇淋還有 5 小塊蛋糕。怎麼都不一樣呢？我們如何敘述清楚或重新圖示，表明清楚 $\frac{1}{2}$ 對這些物件產生什麼作用？

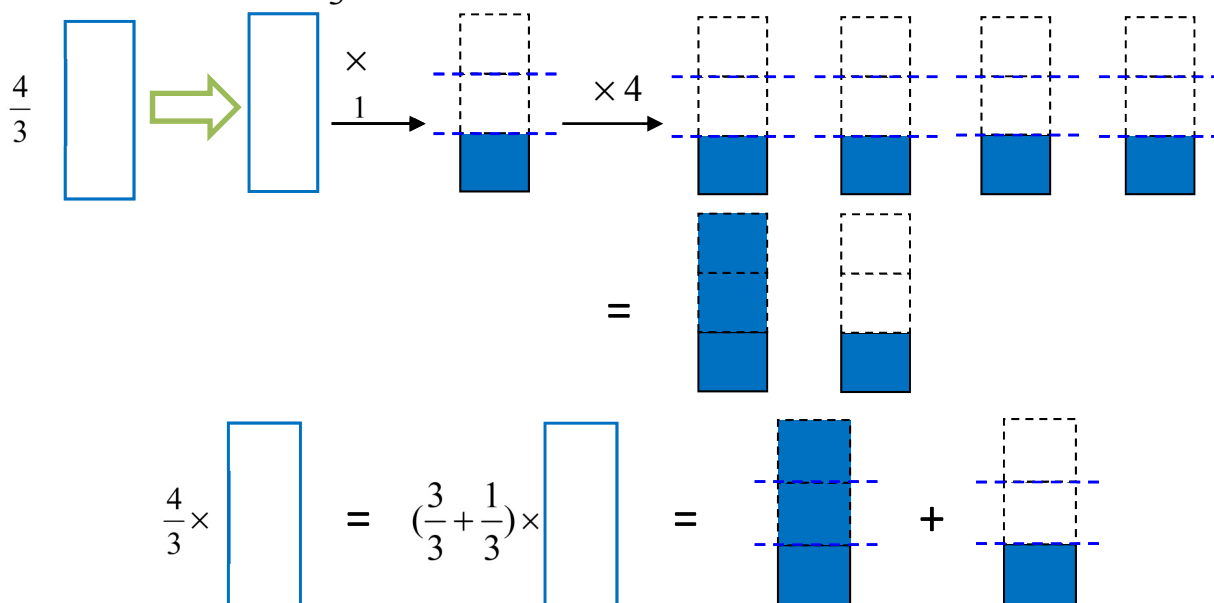
例如：這 1 塊蛋糕是 2 塊蛋糕的 $\frac{1}{2}$ ；2 塊蛋糕的 $\frac{1}{2}$ 是 1 塊蛋糕；



5. 我們來看看 $\frac{2}{3}$ 「三分之二」的作用：



6. 我們來看看 $\frac{4}{3}$ 「三分之四」的作用：



★我們可以將「分數」看作：先「分」再「尸×✓」，先作等分再數（取）幾份。

★數字的功能可以看成 _____ 的作用，
_____ 會將作用對象變大、變多；_____ 會將作用對象變小、變少。_____ 這個數對於作用對象完全沒有改變；_____ 這個數對於作用對象是變成沒有。

★真分數把作用對象 _____ ；假分數把作用對象 _____ 。

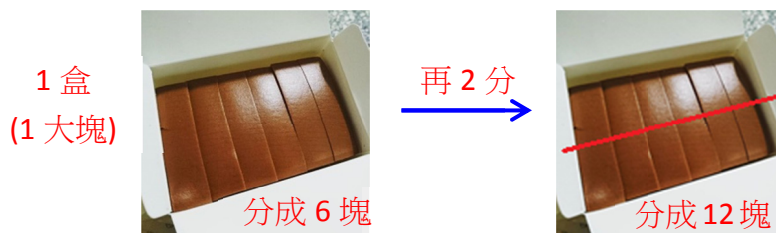
◎概念二：等值分數

你知道塵蟎是會吃皮屑的節肢動物嗎？一般塵蟎長 170～500 微米，假設我們用可以放很大能夠看得到牠吃皮屑的顯微鏡，當牠咬了一塊皮屑一口時，請問從放大的顯微鏡所看到的那一塊皮屑和那一口皮屑，是不是和不用顯微鏡看的時候都一樣呢？又比如，一瓶 500 cc 的運動飲料，每口喝 100 cc 時 5 口可以一飲而盡；或者每口喝 50 cc 時 10 口可以啜飲喝完！咦~上面講得這些和分數有什麼關係呢？

動動筆想數學

1. 有一大塊蛋糕被切成了 6 片（如下圖），老師吃了其中的 2 片，所

以老師吃了 $\frac{2}{6}$ 大塊的蛋糕。

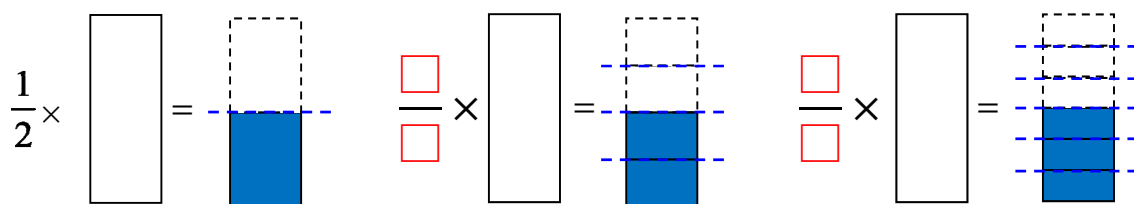


若我們想要分享給更多的人，我們需要把蛋糕再細分。
假設，將 6 片的每一塊都再細分成 2 小塊，總共細分成 12 小塊；
如果，老師還想吃和剛剛一樣多的 2 片蛋糕，那麼，應該拿取細分成 12 小塊中的幾小塊呢？

隔天，老師新買了一盒還沒被切的蛋糕，如果，一樣想吃 $\frac{2}{6}$ 大塊的蛋糕，應該切成幾等分，然後，拿取其中的一片就可以呢？

2.

(1) 請試著理解分數 $\frac{1}{2}$ 的作用，然後在 內填上適當的數字。

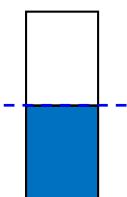


(2) 請寫出 5 個和 $\frac{1}{2}$ 這個數字作用相同的數字。

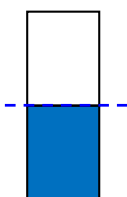
(3) 請寫出 5 個和 $\frac{2}{3}$ 這個數字作用相同的數字。

3. 請試著將已經 2 分、3 分或 4 分的長條“再細分”！

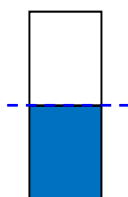
請變成 4 分



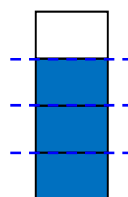
請變成 6 分



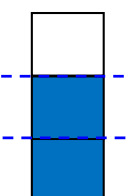
請變成 8 分



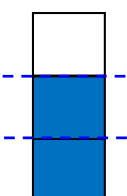
請變成 6 分



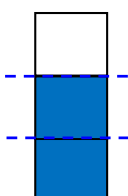
請變成 5 分



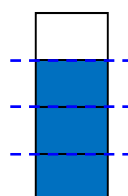
請變成 6 分



請變成 9 分

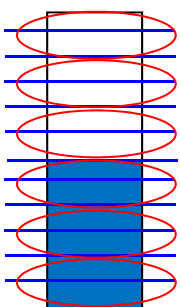


請變成 8 分

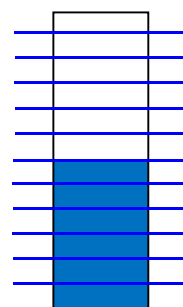


4. 請試著將已經細分的長條“合併”！把它圈起來！

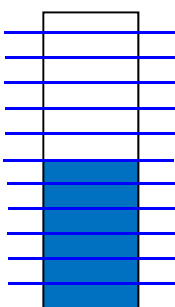
請變成 6 分



請變成 4 分



請變成 3 分



請變成 2 分



12 分，每 2 個一併

5. 請在()內填入適當的數字讓等號成立。

(1)

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()}$$

$\frac{4}{6} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()}$

拿多份
 細分
 倍，擴分(倍數)
 “加倍分割，加倍數”

(2)

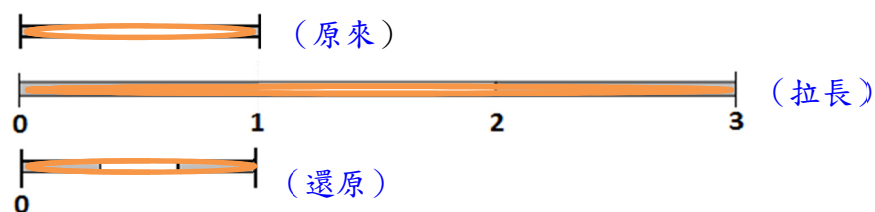
$$\frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()}$$

$\frac{12}{18} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()} \quad \frac{()}{()}$

拿少份
 合併
 併，約分(因數)
 “合併分割，減量數”

6. 下面是 1 條還沒被拉長，很有彈性且不會拉斷的橡皮筋：

現在我們將它拉長，拉到長度是它原本的 3 倍，並在其上標記 0、1、2 和 3。



請問當我們將它放鬆回到原來的長度時，被標記 1 的位置現在會是多少？被標註 2 的位置現在會是多少？

★如果要得到一樣，分愈細，拿愈 _____ ；
合併的越大，拿得愈 _____ 。

7. 比較下面題目中兩個數字的大小。

(1) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{5}{8}$

(2) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{3}{11}$

(3) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{5}{7}$

(4) $\frac{3}{8}$ 、 $\frac{2}{7}$

(5) $\frac{3}{29}$ 、 $\frac{2}{27}$

(6) $\frac{35}{5}$ 、 $\frac{33}{4}$

★分一樣大，比 _____（同分母）；拿一樣多，比 _____（同分子）。

8. 請將下列各分數變成最簡單的分數：

(1) $\frac{12}{15}$

(2) $\frac{1}{18}$

(3) $\frac{30}{20}$

(4) $\frac{48}{320}$

9. 請仿照數字 1~10 的分解，完成數字 11~50 的**完全（徹底）分解**。

1 不用考慮	11	21	31	41
2 無法分解	12	22	32	42
3 無法分解	13	23	33	43
4=2×2	14	24	34	44
5 無法分解	15	25	35	45
6=2×3	16	26	36	46
7 無法分解	17	27	37	47
8=2×4 =2×2×2	18	28	38	48
9=3×3	19	29	39	49
10=2×5	20	30	40	50

★數字 1 不考慮分解，因為 _____。

無法分解的數，我們稱它為 _____；

可以分解的數，我們稱它為 _____。

★若數字 $a = b \times c$ (a 、 b 、 c 不為 0)，

則 a 是 b 和 c 的 _____， b 和 c 是 a 的 _____。

◎概念三：分數的加法與減法

動動筆想數學

- 中午吃飯時，哥哥吃了一碗飯（第 1 個圖），覺得沒吃飽又吃了一碗飯（第 2 個圖），所以，哥哥今天中午總共吃了兩碗飯？

還是應該說，哥哥總共吃了一大碗和一小碗飯？

到底哥哥吃了多少的飯呢？

如果，哥哥用湯匙吃飯，大碗挖了 15 匙吃完，小碗挖了 10 匙吃完，這時候我們可以怎麼說哥哥吃了多少飯呢？



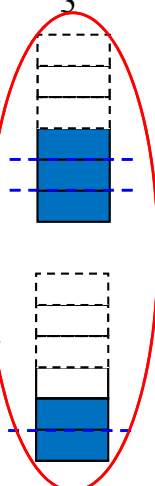
- 我們來看看 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ：

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \times \boxed{} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \boxed{} + \frac{1}{3} \times \boxed{} = \boxed{} + \boxed{} = ?$$

結果是 2 個 $\frac{1}{2}$ 嗎？是 2 個 $\frac{1}{3}$ 嗎？可以合併算嗎？



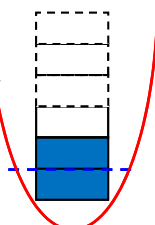
再 3 分 $\Rightarrow$



$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$



再 2 分 $\Rightarrow$



現在可以合併算了嗎？
會是多少呢？

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{(\quad)}{(\quad)}$$

3. 試計算 $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ 的值：

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \dots$$

$$\frac{10}{12} \quad \frac{15}{18} \quad \frac{20}{24} \quad \frac{25}{30} \quad \frac{30}{36}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \dots$$

$$\frac{6}{8} \quad \frac{9}{12} \quad \frac{12}{16} \quad \frac{15}{20} \quad \frac{18}{24}$$

$\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ 合併算需要分的一樣多，

我們將 $\frac{5}{6}$ 和 $\frac{3}{4}$ 分別擴分，

請把兩數擴分後，

可以合併算的圈起來並相連。

並想一想，分母可以是多少呢？

4. 試計算 $\frac{11}{30} - \frac{7}{24}$ 的值：

把分母 30 和 24 變成一樣大（通分），再相減（一起算）；

也就是先將 $\frac{11}{30}$ 和 $\frac{7}{24}$ 做通分，通分就是找分母 30 和 24 的公倍數，

再計算。

30 和 24 的公倍數，最簡便的算法是？ _____

我們喜歡數字小一點，因為數字愈小比較好算，所以，30 和 24 最簡化的公倍數怎麼算呢？

5. 30×24 是 30 的 _____ 倍，

短除法

30×24 是 24 的 _____ 倍，

把公倍數變小的簡化寫法

所以， 30×24 是 30 和 24 的 _____。

24×30 $\Rightarrow$ 24 和 30 的公倍數
兩數徹底分解

$2 \times 2 \times \textcircled{2} \times 3 \times 2 \times \textcircled{3} \times 5$

相同共用

$2 \times 2 \times \textcircled{3} \quad \underline{2} \quad \textcircled{3} \times 5$

相同再共用

$2 \times 2 \quad 2 \times \underline{3} \quad 5$

$2 \times 2 \times \textcircled{2} \times \textcircled{3} \times 5$ $\Rightarrow$ 24 和 30 的最小公倍數

$\Downarrow$

24 和 30 的最大公因數

$$\text{因此，} \frac{11}{30} - \frac{7}{24} = \frac{11 \times 4}{30 \times 4} - \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = \frac{44 - 35}{120} = \frac{9}{120} = \frac{3}{40}$$

$$\begin{array}{r} 2 \mid \textcircled{24} \times 30 \\ \hline 12 \times 15 \end{array}$$

相同共用

$$\begin{array}{r} 2 \mid 24 \times 30 \\ \times \textcircled{3} \mid 12 \times 15 \\ \hline \times 4 \times 5 \\ \downarrow \\ 2 \times 2 \end{array}$$

相同再共用

6. 試計算 $12\frac{3}{4} - 4\frac{5}{12}$ 。

方法一： $12\frac{3}{4} = 12 + \frac{3}{4}$ ， $4\frac{5}{12} = 4 + \frac{5}{12}$ ；

先整數減整數 $12 - 4 = 8$ ；再分數減分數 $\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} - \frac{5}{12}$

$$\text{所以，} 12\frac{3}{4} - 4\frac{5}{12} = (12 - 4) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{12}\right)$$

$$= 8 + \left(\frac{9}{12} - \frac{5}{12}\right) = 8\frac{4}{12}$$

方法二： $12\frac{3}{4}-4\frac{5}{12}$ ，因為整數比較好算；

$$\begin{aligned}12\frac{3}{4}-4\frac{5}{12}, \text{ 拿 } 5 \text{ 去減掉 } 4\frac{5}{12} &\Rightarrow 12\frac{3}{4}-4\frac{5}{12} \\&= 7\frac{3}{4}+5-4\frac{5}{12} \\&= 7\frac{3}{4}+\frac{7}{12}=7\frac{9+7}{12}=7\frac{16}{12}=8\frac{4}{12}\end{aligned}$$

7. (1) $\frac{8}{45}+\frac{7}{30}$ (2) $\frac{7}{12}-\frac{4}{9}$ (3) $8\frac{3}{4}-3\frac{1}{6}$ ；

請完整保留計算過程並寫下計算的想法。

(1) $\frac{8}{45}+\frac{7}{30}$ (2) $\frac{7}{12}-\frac{4}{9}$ (3) $8\frac{3}{4}-3\frac{1}{6}$

★分數的加減

如果兩個分數分的不一樣就無法合併算，需要先將分數 _____。

分數的通分就是找每個分數它們分母的 _____。

◎概念四：分數的乘法

動動筆想數學

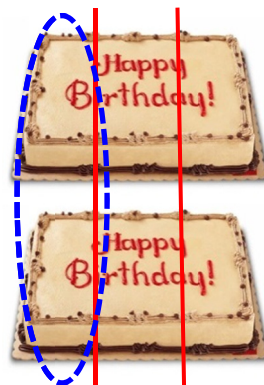
1. $\frac{2}{3}$ 的功用是什麼呢？

2 個蛋糕平分給 3 個人，每一位可以分得多少？

做法如下：

把 2 個蛋糕分別 3 等分，

每一位可以拿到每個蛋糕的 $\frac{1}{3}$ ，總共拿 2 個 $\frac{1}{3}$ 的蛋糕。



也就是說， $\frac{2}{3}$ 我們可以看作是 $2 \div 3$ 的結果，即 $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ 。

2. 那麼， $\frac{3}{5}$ 的功用又是什麼呢？

請試著照著上一題分蛋糕的方式，畫畫看、想想看。

3 個蛋糕平分給 5 個人，每一位可以分得多少？

做法如下：

把 _____ 個蛋糕分別 _____ 等分，

每一位可以拿到每個蛋糕的 _____，總共拿 _____ 個 _____ 的蛋糕。

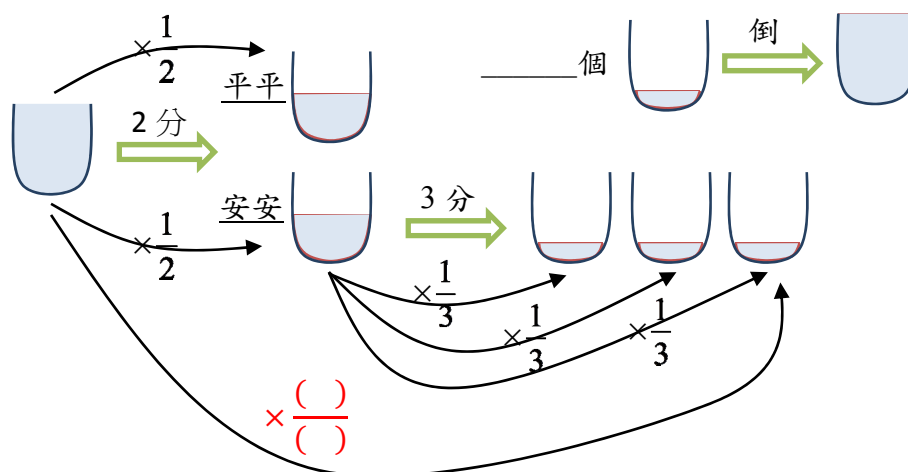
也就是說， $\frac{3}{5}$ 我們可以看作是 $3 \div 5$ 的結果，即 $\frac{3}{5} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 請試著不借助其它工具，手繪畫出下面長度的 $\frac{1}{6}$ ，越準越好！

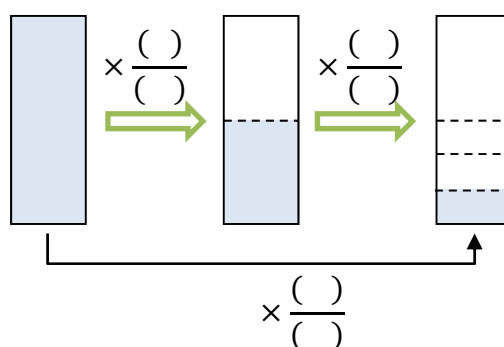
並註記步驟順序。

-
4. 承上題，請再試著畫出下面長度的 $\frac{1}{15}$ 。
-

5. 平平和安安各拿到半杯的飲料，安安將自己的半杯飲料再平分成3杯，請問幾杯再3分後的每杯飲料，倒在一起可以剛好變回滿滿的一杯？



※我們將上面的畫圖改成容易看到平分的長條狀如下，請你在空格中填入適當的數字。



6. 任何計算 $\frac{3}{5} \times 7$ 之值，可以看作是在計算 3 個 $\frac{1}{5}$ 的 7 倍。

請拆解 $\frac{3}{5} \times 7$ 這個算式： $\frac{3}{5} \times 7 = \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}} \times \underline{\hspace{2cm}}$

7. 請觀察下面算式發展的過程：

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} \Rightarrow \text{兩個 } \frac{1}{3} \times \frac{7}{5} \Rightarrow \text{每個 } \frac{1}{3} \text{ 先 5 分再 7 倍}$$

$$2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times 7 \right) = 2 \times \frac{1}{3 \times 5} \times 7 = 2 \times \frac{7}{3 \times 5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5}$$

你是否可以從這個過程的轉換，看出兩個分數相乘的道理呢？

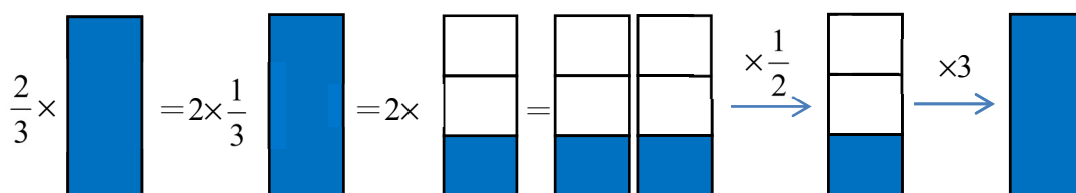
8. 任何東西（或者 1），放大 2 倍後，怎麼做可以回到原來（變回 1）

呢？如果是縮小為 $\frac{1}{2}$ ，該怎麼做可以回到原來（變回 1）呢？

9. 計算 $\frac{2}{3} \times ? = 1$ 、 $? \times \frac{2}{3} = 1$ ， $?$ 應該是多少呢？

也就是說， $\frac{2}{3}$ 乘以多少會等於 1 呢？

或者，多少乘以 $\frac{2}{3}$ 會等於 1 呢？



看看上方的圖示，想想 $?$ 是多少。 $?$ = _____

10. 計算下列各式或完成填空：

(1) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$ (2) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} =$ (3) $\frac{3}{4} \times 5 =$ (4) $13 \times \frac{5}{7} =$

(5) $\frac{(\quad)}{(\quad)} \times \frac{5}{7} = 1$ (6) $3 \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1$ (7) $\frac{(\quad)}{(\quad)} \times 5 = 1$ (8) $\frac{b}{a} \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1$

★我們怎麼利用乘法運算將一個數字變成1呢？

$$\frac{b}{a} \times \frac{(\quad)}{(\quad)} = 1 \Rightarrow \underline{\hspace{4cm}}。$$

◎概念五：分數的除法

動動筆想數學

1. 當我們計算 $12 \div 4$ ，意思是：

(1) 12 是 4 的幾倍？

$\Rightarrow 12 = 4 \times 3$ ，12 是 3 個 4。

(2) 把 12 平分 4 份，每一份會是多少？

(3) 把 4 當作是 1 時，12 會是多少？

(4) 想一想， $24 \div 8$ 、 $6 \div 2$ 、 $\frac{12}{7} \div \frac{4}{7}$ 、...

$$\begin{array}{ccc} \times \frac{1}{4} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{12} \div 4 \end{array} & \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \times \frac{1}{4} \end{array} \\ & \frac{12}{4} \div 1 & \\ \Rightarrow & 3 \div 1 & \\ & = 3 & \end{array}$$

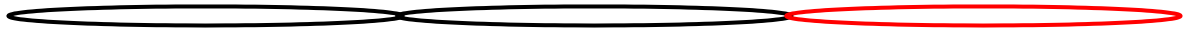
當被除數、除數同倍率放大或縮小時，它們計算所得的值是相同的嗎？

2. 下面有三條一模一樣的橡皮筋

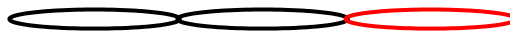
(1) 請問黑色總長度會是紅色長度的幾倍？_____倍



(2) 我們將橡皮筋一起拉長變成下面的樣貌，這時候黑色總長度會是紅色長度的幾倍？_____倍



(3) 我們將橡皮筋一起縮短變成下面的樣貌，這時候黑色總長度會是紅色長度的幾倍？_____倍



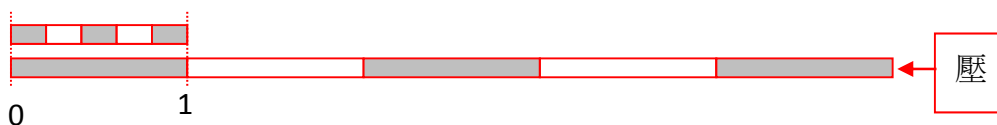
(4) 若我們將黑色橡皮筋的部分當作被除數，紅色橡皮筋的部分當作除數，拉動橡皮筋的過程像是將被除數和除數同時_____，被除數÷除數的結果 ☐相同 ☐不相同。

(5) 當我們在計算分數的除法時，可以將除數調整為最好計算的情況，即將除數調整為哪個數字呢？

3. $1 \div 5$ ，除以 5 是什麼意思呢？

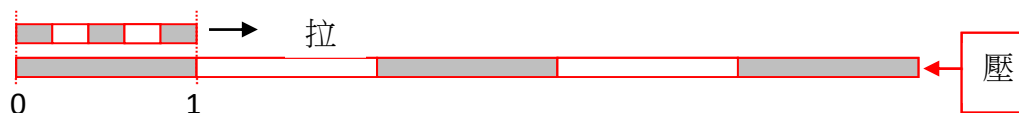
除以 5 就是把 1 平分成 5 等分，每 1 等分就會是 $\frac{1}{5}$ 。

那不就是相當於是把 5 壓成只有 1 的時候，原來的每 1 小段就都是 $\frac{1}{5}$ 囉。



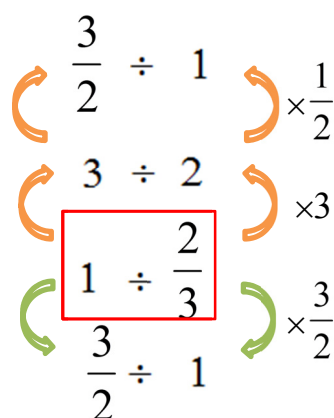
$1 \div 5$ ，也可以看成 1 是幾個 5；也就是把 5 當作是 1，而這個時候的 1 會是多少？

4. 試著說說看 $1 \div \frac{1}{5}$ ，除以 $\frac{1}{5}$ 是什麼意思呢？你可以從下面的圖形知道 $1 \div \frac{1}{5}$ 所代表的意思嗎？



5. 怎麼計算 $1 \div \frac{2}{3}$ 呢？

一起想想除以 $\frac{2}{3}$ 是什麼意思呢？



6. 利用之前橡皮筋的想法，我們重新計算一下 $5 \div \frac{2}{3}$ ，請完成下面的

填空。 $5 \div \frac{2}{3} = ?$

5 是 $\frac{2}{3}$ 的幾倍？

× _____ × _____ → 同時相乘一數，同時放大
(橡皮筋拉長)

$$15 \div 2 = ?$$

× _____ × _____ → 同時相乘一數，同時縮小
(橡皮筋縮短)

$$\frac{15}{2} \div 1 = ?$$

把除數縮放成 1，

是最容易看出 5 是 $\frac{2}{3}$ 的幾倍！

$$5 \div \frac{2}{3} = (5 \times 3) \div \left(\frac{2}{3} \times 3\right) = (5 \times 3) \div 2 = (5 \times 3 \times \frac{1}{2}) \div (2 \times \frac{1}{2}) = (5 \times 3 \times \frac{1}{2}) \div 1 = 5 \times \frac{3}{2}$$

7. 請觀察下方兩種不同的計算過程，並寫下你的發現。

通分

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} &= \frac{2 \times 4}{5 \times 4} \div \frac{3 \times 5}{4 \times 5} \\ &= (2 \times 4) \div (5 \times 3) \\ &= \frac{2 \times 4}{5 \times 3} \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\end{aligned}$$

擴分、約分

$$\begin{aligned}\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} &= \left(\frac{2}{5} \times 4\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 4\right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \times 4 \times \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{3}{4} \times 4 \times \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\right) \div 1 \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}\end{aligned}$$

8. 承上題，試著利用通分或擴分與約分，一步一步的計算 $\frac{4}{9} \div \frac{7}{8}$ 。

通分

$$\frac{4}{9} \div \frac{7}{8}$$

擴分、約分

$$\frac{4}{9} \div \frac{7}{8}$$

9. 請你試著算算看 $\frac{b}{a} \div \frac{d}{c}$ 。

★ $a \div b$ ，就是把 b 當作是 1 時， a 會是多少；

所以，若 b 要變成 1 就是把 b 乘以它的倒數。

★ 被除數、除數，同倍率的 _____，所得到的結果不會變。

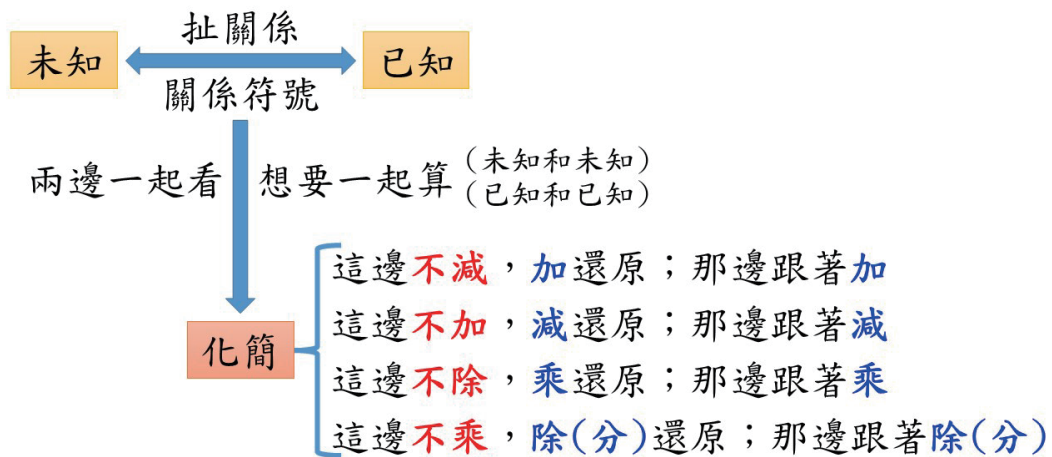
★ 除以一個分數等同於，先乘以這個分數的 _____（擴分），再除以這個分數的 _____（約分）。



這是被放大的塵蟎，如果放得太大是無法一眼看出牠的全貌的，必須做適當地縮放才能看到我們想看的！

分數的除法中，把除數變成 1 就是這樣的想法喔！

概念發展脈絡範例：等量公理



主辦單位：教育部國民及學前教育署

承辦單位：國立彰化師範大學數學系

計畫電話：(04)7232105#3288

計畫信箱：nhmath@nhmath.com

計畫地址：500彰化市進德路1號數學系

計畫官網：<http://tw.newhorizonofmathematics.com>

數學新世界官網

