

屏東縣107學年度「數學生根教學」

國中領域教學共備人才培訓

學員手冊

09月06日 單元

一元二次方程式

乘法公式、多項式

因式分解、配方法

平行線截比例線段

相似形

目錄

共備研習內容

一、一元二次方程式.....	1
二、相似形.....	19

一元二次方程式

一、單元名稱：乘法公式、多項式的運算、因式分解、配方法、公式解、一元二次方程式

二、反思提問：

1.從一次方程式到二次方程式，甚至是日後的三次或更多次的方程式，試著寫寫看，什麼樣的情境有機會出現二次或以上的關係式或算式？也就是說，在什麼樣的情境下會出現 $A \times B$ ，而且 A 和 B 都是使用相同的變數 x 的一次式？面積問題(從總長度的不變看面積的變)？旅行社(從單價和數量的變看總收入的變)或果樹問題(從產量和數量的變看總產量的變)？拋物線問題(從時間的變看高度的變)？還有嗎？

2.什麼情況下你會說 x 是未知數？什麼情況下你會說 x 是變數？未知數和變數有什麼不同？

3.下面的應用問題，你會說牙籤的長度是未知數還是變數呢？

偉明用牙籤去量一張長方形的紙片，發現紙片的長比牙籤長的兩倍少 1 公分，寬比牙籤長多 2 公分。若已知紙片的面積為 88 平方公分，則牙籤的長為幾公分？

4.二次函數和一元二次方程式有什麼不同？不同的觀點底下，在問題的解決的歷程中，函數與方程式的圖形分別代表什麼意義？這些圖形對問題的解決有什麼幫助？

5.因式分解法對於二次函數和一元二次方程式的意義分別是什麼？

6.配方法對於二次函數和一元二次方程式的意義分別是什麼？

7.多項式的『多』是什麼意思呢？『項』是什麼呢？那，『式』又是什麼呢？

8.多項式當中的 x 和方程式當中的 x ，有什麼不同呢？是未知數嗎？是變數嗎？還是，既不是未知數也不是變數呢？

9.算式「 $7 \div 2 = 3 \dots 1$ 」和「 $(x^2 + 1) \div x = x \dots 1$ 」有什麼不同呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

未知數

變數

乘法公式

多項式

因式分解

配方法

一元二次方程式

二次函數

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
未知數			
變數			
乘法公式			
多項式			
因式分解			
配方法			
一元二次方 程式			
二次函數			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1)數學新世界--CA 談數學--20170927 臺北市三民國中 多項式函數 part1
(23:50-1:09:20)

(2)數學新世界--CA 談數學--黎明國中資優課程 一元二次方程式 part1

(3)數學新世界--CA 談數學--黎明國中資優課程 一元二次方程式 part2

(4)數學新世界--CA 談數學--黎明國中資優課程 一元二次方程式 part3

(5)數學新世界--CA 談數學--20161223 彰泰國中 八年級 一元二次方程式

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中八年級教材

一元二次方程式

1. 手機 iphone8 有兩種尺寸，4.7 吋和 5.5 吋，你覺得面板大小，5.5 吋會是 4.7 吋的幾倍大呢？

$$\square \frac{5.5}{4.7} \quad \square \frac{5.5}{4.7} \times \frac{5.5}{4.7}$$

2. 一條長度為 18 的繩子可以圍出來的矩形面積可以有多大呢？

矩形

(1) 請完成下面空格

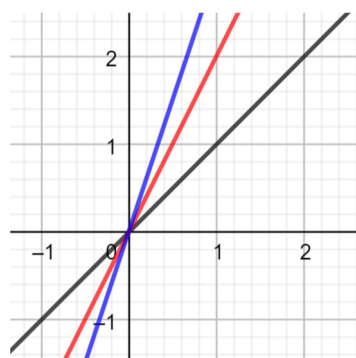
長	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
寬	9	8								0
面積	0	8								0

(2) 矩形面積最大可以有多大呢？

(3) 有沒有辦法圍出面積是 6 的矩形呢？☐ 可以 ☐ 不可以

(4) 面積是 12 的矩形的長和寬有多長呢？

3. 右邊是 $y = x$ 、 $y = 2x$ 、 $y = 3x$ 的圖形，猜猜看， $y = xx$ 的圖形會長什麼樣子呢？試著大膽的畫畫看！直覺就好喔！不用很準！



4. 阿雄將成本為 40 元的杯子，以 50 元的價格賣出，能賣出 500 個。若阿雄將售價調漲 1 元，則杯子就會少賣 10 個。今天阿雄想淨賺 8000 元，則他要將杯子定價為多少元？可銷售多少個杯子？

5. 承上題， $(50+x-40)(500-10x)=8000$ 。

(1) 什麼情況下會完全賺不到錢？

(2) 利用(1)的解法思考 $(50+x-40)(500-10x)=8000$ 該怎麼算？

分開算和一起算

1. 分開算和一起算 part1

- (1) 甲班有 27 個學生，班上要舉辦慶生活動，為每個學生買了一塊蛋糕和一杯飲料，一塊蛋糕的價錢是  元，一杯飲料是  元，請將全班的花費列式。

- (2) 甲乙兩班聯合舉辦慶生活動，為每個學生買了一塊蛋糕和一杯飲料，一塊蛋糕的價錢是  元，一杯飲料是  元，請列出兩班的總花費。

(3) 完成下面空格

一起算	分開算
a. $2 \times (\star + \diamond)$	$= 2 \times \star + 2 \times \diamond$
b. $100 \times (\star + \diamond)$	$= \underline{\hspace{2cm}}$
c.  $\times (\star + \diamond)$	$= \underline{\hspace{2cm}}$
d. $2 \times \star + 2 \times \diamond$	$= 2 \times (\star + \diamond)$
e. $\odot \times \star + \odot \times \diamond$	$= \underline{\hspace{2cm}}$
f. $\times \times (\star + \diamond) + \circ \times (\star + \diamond)$	$= \underline{\hspace{2cm}}$
g. $(\star + \diamond) \times (\times + \circ)$	$= \times \times (\underline{\hspace{1cm}}) + \circ \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $= \underline{\hspace{2cm}}$
h. $\times \times (\underline{\hspace{1cm}}) + \circ \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $= (\underline{\hspace{1cm}}) \times (\underline{\hspace{1cm}})$	$= \times \times \star + \times \times \diamond + \circ \times \star + \circ \times \diamond$

2. 改變紀錄方式！

一起算 $\Rightarrow$ 分開算	分開算 $\Rightarrow$ 一起算
(1) $2 \times (\star + \diamond) = 2 \times \star + 2 \times \diamond$ $\begin{array}{r} \star \quad + \diamond \\ \times) \quad \quad 2 \\ \hline 2 \times \star \quad + 2 \times \diamond \end{array}$	(2) $2 \times \star + 2 \times \diamond = 2 \times (\star + \diamond)$ $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \quad \square \\ \hline 2 \times \star \quad + 2 \times \diamond \end{array}$

一起算 ⇨ 分開算	分開算 ⇨ 一起算
(3) 🍌×(☆+◇)= _____ $\begin{array}{r} \star \quad + \diamond \\ \times) \quad \quad \quad \text{🍌} \\ \hline \square \quad \square \end{array}$	(4) 🍌×☆+🍌×◇= _____ × _____ $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \quad \square \\ \hline \text{🍌} \times \star \quad + \text{🍌} \times \diamond \end{array}$
(5) (☆+◇)×(※+○)= _____ $\begin{array}{r} \star \quad + \diamond \\ \times) \quad \quad \quad \text{※} \quad + \circ \\ \hline \circ \times \star \quad + \circ \times \diamond \\ \text{※} \times \star \quad + \text{※} \times \diamond \end{array}$	(6) ※×☆+※×◇+○×☆+○×◇ $= \frac{\quad \times \quad}{\quad \times \quad}$ $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \square \quad \square \\ \hline \circ \times \star \quad + \circ \times \diamond \\ \text{※} \times \star \quad + \text{※} \times \diamond \end{array}$
(7) (a+b)×(c+d)= _____ $\begin{array}{r} a \quad + b \\ \times) \quad c \quad + d \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \end{array}$	(8) d×a + d×b + c×a + c×b = ()×() $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \square \quad \square \\ \hline d \times a \quad + d \times b \\ c \times a \quad + c \times b \end{array}$
(9) (a+b)×(a+b)= _____ $\begin{array}{r} a \quad + b \\ \times) \quad a \quad + b \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \quad \square \end{array}$	(10) $a^2 + 2ab + b^2$ = ()×()=()² $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \\ \hline a^2 \quad + 2ab \quad + b^2 \end{array}$
(9) (a-b)×(a-b)= _____ $\begin{array}{r} a \quad - b \\ \times) \quad a \quad - b \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \quad \square \end{array}$	(10) $a^2 - 2ab + b^2$ = ()×()=()² $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \\ \hline a^2 \quad - 2ab \quad + b^2 \end{array}$

一起算 ⇨ 分開算	分開算 ⇨ 一起算
(13) $(a+b) \times (a-b) =$ _____ $\begin{array}{r} a \quad +b \\ \times) \quad a \quad -b \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \quad \square \end{array}$	(14) $a^2 - b^2 = (\square) \times (\square)$ $\begin{array}{r} \square \quad \square \\ \times) \quad \square \quad \square \\ \hline \square \quad \square \\ \square \quad \square \\ \hline a^2 \quad 0 \quad -b^2 \end{array}$
(15) $(x+3) \times (x+3) =$ _____ $\begin{array}{r} x \quad +3 \\ \times) \quad x \quad +3 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(16) $x^2 + 6x + 9$ $= (\square) \times (\square) = (\square)^2$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad +6x \quad +9 \end{array}$
(17) $(x-5) \times (x-5) =$ _____ $\begin{array}{r} x \quad -5 \\ \times) \quad x \quad -5 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(18) $x^2 - 10x + 25$ $= (\square) \times (\square) = (\square)^2$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad -10x \quad +25 \end{array}$
(19) $(x+7) \times (x-7) =$ _____ $\begin{array}{r} x \quad +7 \\ \times) \quad x \quad -7 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(20) $x^2 - 49$ $= (\square) \times (\square) = (\square)^2$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad +0x \quad -49 \end{array}$

一起算 ⇨ 分開算	分開算 ⇨ 一起算
(21) $(x+3) \times (x+5) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\begin{array}{r} x \quad +3 \\ \times) \quad x \quad +5 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(22) $x^2 + 8x + 15 = (\underline{\hspace{1cm}}) \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad + 8x \quad + 15 \end{array}$
(23) $(x-4) \times (x-6) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\begin{array}{r} x \quad -4 \\ \times) \quad x \quad -6 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(24) $x^2 - 10x + 24 = (\underline{\hspace{1cm}}) \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad - 10x \quad + 24 \end{array}$
(25) $(x+4) \times (x-6) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\begin{array}{r} x \quad +4 \\ \times) \quad x \quad -6 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(26) $x^2 - 2x - 24 = (\underline{\hspace{1cm}}) \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad - 2x \quad - 24 \end{array}$
(27) $(2x+3) \times (4x+5) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\begin{array}{r} 2x \quad +3 \\ \times) \quad 3x \quad +5 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(28) $8x^2 + 22x + 15 = (\underline{\hspace{1cm}}) \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline 8x^2 \quad + 22x \quad + 15 \end{array}$
(29) $(3x+4) \times (2x-7) = \underline{\hspace{2cm}}$ $\begin{array}{r} 3x \quad +4 \\ \times) \quad 2x \quad -7 \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline \square x^2 \quad \square x \quad \square \end{array}$	(30) $6x^2 - 13x - 28 = (\underline{\hspace{1cm}}) \times (\underline{\hspace{1cm}})$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ \square x^2 \quad \square x \\ \hline 6x^2 \quad - 13x \quad - 28 \end{array}$

多項式的乘法和除法

1. 慢慢地做乘法：

- ①乘開 $(x+2) \times (x+3)$
 ②作合併
 ③怎麼”排”比較容易對齊來作合併

$$(x+2) \times (x+3)$$

=

先由老師說明
再由學生做！

2. 慢慢地做乘法：

- ①乘開 $(x^2-4x+3) \cdot (3x-2)$
 ②作合併
 ③怎麼”排”比較容易對齊來作合併

$$(x^2-4x+3) \cdot (3x-2)$$

=

3. 乘開，並依照上題的方式來記錄結果。

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ \times) \quad 3x+4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ \times) \quad 3x-4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ \times) \quad -3x+4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x-5 \\ \times) \quad -3x-4 \\ \hline \end{array}$$

4. 填填看～

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ \times) \quad \square-1 \\ \hline -3x-4 \\ 15x^2+20x \\ \hline 15x^2+17x-4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x-1 \\ \times) \quad \square-5 \\ \hline \square+\square \\ \square+\square \\ \hline 8x^2-22x+5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -3x+2 \\ \times) \quad \square+\square \\ \hline \square+\square \\ \square+\square \\ \hline -24x^2+31x-10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \square+\square \\ \times) \quad \square+\square \\ \hline \square+\square \\ \square+\square \\ \hline 3x^2+16x+5 \end{array}$$

5. 請仔細想想下列兩題的關係：

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ \times) \quad \square+\square \\ \hline \square+\square \\ \square+\square \\ \hline 6x^2+23x+20 \end{array}$$

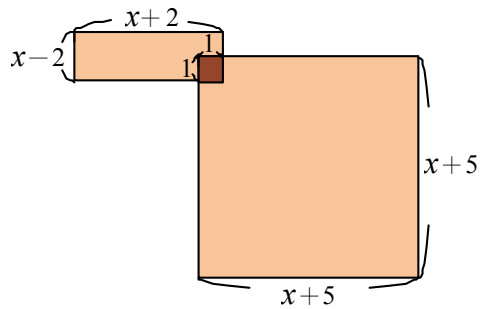
$$(6x^2+23x+20) \div (2x+5)$$

6. 承上題，請仔細想想下列兩題的關係：

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ \times) \quad \square+\square \\ \hline \square+\square \\ \square+\square \\ \hline 6x^2+23x+\square \end{array}$$

$$(6x^2+23x+21) \div (2x+5)$$

1. 如右圖，一個矩形與一個正方形重疊在一起。如果重疊處(咖啡色部分)是邊長為 1 的正方形，那麼疊合後的總面積為多少？(以 x 的多項式表示)



2. 若 $(383 - 83)^2 = 383^2 - 83 \times a$ ，求 a 的值。
3. 化簡 $(8x^2 + 5x - 6) + (ax^2 - 6x + b)$ 的結果，若 x^2 項係數為 2，常數項是 3，求 a 、 b 的值。
4. 解一元二次方程式
- (1) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ (2) $x(x - 8) = 1584$
5. 小芳一年前年齡的平方恰好等於 11 年後的年齡，那麼小芳今年幾歲？

配成平方法

1. 請在空格中填入適當的答案，透過搭配一個數字來配成完全平方。

$$\begin{array}{r}
 (1) \quad x \quad +3 \\
 \times) \quad x \quad +3 \\
 \hline
 \quad \quad +3x \quad +9 \\
 \hline
 x^2 \quad +3x \\
 \hline
 x^2 \quad +6x \quad +9
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (x+3)^2 &= (x+3)(x+3) \\
 &= x^2 + 6x + 9 \\
 x^2 + 6x + 9 &= (x+3)(x+3) \\
 &= (x+3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (2) \quad x \quad +5 \\
 \times) \quad x \quad +5 \\
 \hline
 \quad \quad \square \quad \square \\
 \hline
 \square \quad \square \\
 \hline
 \square \quad \square \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (x+5)^2 &= (x+5)(x+5) \\
 &= \underline{\hspace{2cm}} \\
 \underline{\hspace{2cm}} &= (x+5)(x+5) \\
 &= (x+5)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (3) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad +8x \quad +16
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (\quad)^2 &= (\quad)(\quad) \\
 &= x^2 + 8x + 16 \\
 x^2 + 8x + 16 &= (\quad)(\quad) \\
 &= (\quad)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (4) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad -14x \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (\quad)^2 &= (\quad)(\quad) \\
 &= x^2 - 14x + \square \\
 x^2 - 14x + \square &= (\quad)(\quad) \\
 &= (\quad)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (5) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad +5x \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (\quad)^2 &= (\quad)(\quad) \\
 &= x^2 + 5x + \square \\
 x^2 + 5x + \square &= (\quad)(\quad) \\
 &= (\quad)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 (6) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad -7x \quad \square
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (\quad)^2 &= (\quad)(\quad) \\
 &= x^2 - 7x + \square \\
 x^2 - 7x + \square &= (\quad)(\quad) \\
 &= (\quad)^2
 \end{aligned}$$

(7)(8)(9)也希望可以模仿上面作法，透過搭配一個數字來配成完全平方，但必須做部分調整喔，請在算式下方寫出完整的算式調整和轉化的過程。

$$\begin{array}{r}
 (7) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad +10x \quad +22 \\
 \quad \quad \quad +\square
 \end{array}$$

$$x^2 + 10x + 22 + \square = (\quad)^2$$

$$\begin{array}{r}
 (8) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad -6x \quad +4 \\
 \quad \quad \quad +\square
 \end{array}$$

$$x^2 - 6x + 4 + \square = (\quad)^2$$

$$\begin{array}{r}
 (9) \quad x \quad \square \\
 \times) \quad x \quad \square \\
 \hline
 \quad \quad \square x \quad \square \\
 \hline
 x^2 \quad \square x \\
 \hline
 x^2 \quad +4x \quad +2 \\
 \quad \quad \quad +\square
 \end{array}$$

$$x^2 + 4x + 2 + \square = (\quad)^2$$

2. 請在空格中填入適當的答案，目標是可以透過搭配一個數字或經過調整，可以變成完全平方。

x	□	(1) $x^2+12x+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$	(4) $x^2-2x+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$
×) x	□	(2) $x^2-8x+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$	(5) $x^2+7x+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$
□x	□	(3) $x^2+14x+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$	(6) $x^2-11x+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$
x ² □x		(7) $x^2+12x+25+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$	
x ² +12x	□	(8) $x^2-2x-5+\underline{\hspace{1cm}}=(\underline{\hspace{1cm}})^2$	

因式分解法

1. 請在空格中填入適當的答案，不見得一樣！讓算式完成因式分解。

(1) x +2	(2) x +3	(3) x □
×) x +5	×) x +2	×) x □
+5x +10	□ □	□x □
x ² +2x	□ □	x ² □x
x ² +7x +10	□ □ □	x ² +8x +12
$(x+2)(x+5)=x^2+7x+10$	$(x+3)(x+2)=\underline{\hspace{1cm}}$	$(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})=x^2+8x+12$
$x^2+7x+10=(x+2)(x+5)$	$\underline{\hspace{1cm}}=(x+3)(x+2)$	$x^2+8x+12=(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})$
(4) x □	(5) x □	(6) x □
×) x □	×) x □	×) x □
□x □	□x □	□x □
x ² □x	x ² □x	x ² □x
x ² -7x +12	x ² +2x -15	x ² -3x -24
$(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})=x^2-7x+12$	$(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})=x^2+2x-15$	$(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})=x^2-3x-24$
$x^2-7x+12=(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})$	$x^2+2x-15=(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})$	$x^2-3x-24=(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})$

2. 請在空格中填入適當的答案，讓算式可以成功的完成因式分解。

(1) 3x +4	(2) 5x +2	(3) □x □
×) 2x +7	×) 4x +3	×) □x □
+21x +28	□ □	□x □
6x ² +8x	□ □	□x ² □x
6x ² +29x +28	□ □ □	15x ² +22x +8
$(3x+4)(2x+7)=6x^2+29x+28$	$(5x+2)(4x+3)=\underline{\hspace{1cm}}$	$(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})=15x^2+22x+8$
$6x^2+29x+28=(3x+4)(2x+7)$	$\underline{\hspace{1cm}}=(5x+2)(4x+3)$	$15x^2+22x+8=(\underline{\hspace{1cm}})(\underline{\hspace{1cm}})$

(4) $\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $3x^2 \quad -7x \quad +2$ $(\square)(\square) = 3x^2 - 7x + 2$ $3x^2 - 7x + 2 = (\square)(\square)$	(5) $\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $6x^2 \quad +11x \quad -10$ $(\square)(\square) = 6x^2 + 11x - 10$ $x^2 + 11x - 10 = (\square)(\square)$	(6) $\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $15x^2 \quad -x \quad -6$ $(\square)(\square) = 15x^2 - x - 6$ $15x^2 - x - 6 = (\square)(\square)$
--	---	--

(7) $\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $4x^2 \quad -12x \quad +9$ $(\square)(\square) = 4x^2 - 12x + 9$ $4x^2 - 12x + 9 = (\square)(\square)$	(8) $\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $25x^2 \quad +20x \quad 4$ $(\square)(\square) = 25x^2 + 20x + 4$ $25x^2 + 20x + 4 = (\square)(\square)$	(9) $\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $49x^2 \quad \quad \quad -36$ $(\square)(\square) = 49x^2 - 36$ $49x^2 - 36 = (\square)(\square)$
---	---	--

(10) $\square$ $\square$ $\times$) $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $-4xz \quad -6yz$ $10x^2 \quad +15xy$ $(\square)(\square) = 10x^2 - 4xz + 15xy - 6yz$ $10x^2 - 4xz + 15xy - 6yz = (\square)(\square)$	(11) $\square$ $\square$ $\square$ $\times$) $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $\square$ $x^3 \quad \quad \quad +1$ $(\square)(\square)(\square) = x^3 + 1$ $x^3 + 1 = (\square)(\square)(\square)$
---	--

3. 請在空格中填入適當的答案，讓算式可以成功的完成因式分解。

$\square x$ $\square$ $\times$) $\square x$ $\square$ $\square x$ $\square$ $\square x^2$ $\square x$ $x^2 \quad +7x \quad -18$	(1) $x^2 + 7x - 18 = (\square)(\square)$ (2) $x^2 - x - 6 = (\square)(\square)$ (3) $6x^2 + 17x + 5 = (\square)(\square)$ (4) $4x^2 + 11x - 3 = (\square)(\square)$	(5) $6x^2 - x - 12 = (\square)(\square)$ (6) $3x^2 - 7x + 2 = (\square)(\square)$ (7) $12x^2 - 8x - 15 = (\square)(\square)$ (8) $6x^2 - 5x - 6 = (\square)(\square)$
---	---	---

4. 請在空格中填入適當的答案，讓算式可以成功的完成因式分解。

$\begin{array}{r} x \quad \square \\ \times) \quad x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad -5x \quad \square \end{array}$	$(1)x^2-5x+\underline{\hspace{2cm}}=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$ $(2)x^2-5x+\underline{\hspace{2cm}}=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$ $(3)x^2-5x+\underline{\hspace{2cm}}=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$ $(4)x^2-5x+\underline{\hspace{2cm}}=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$
$\begin{array}{r} x \quad \square \\ \times) \quad x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad \square x \quad -12 \end{array}$	$(5)x^2+\underline{\hspace{2cm}}x-12=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$ $(6)x^2+\underline{\hspace{2cm}}x-12=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$ $(7)x^2+\underline{\hspace{2cm}}x-12=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$ $(8)x^2+\underline{\hspace{2cm}}x-12=(\underline{\hspace{2cm}})(\underline{\hspace{2cm}})$

求一元二次方程式的解

一、準備

1. 求平方根 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ 、 $(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = 3$	2. 兩數相乘等於零 $a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ 或 $b = 0$
(1) 求方程式 $x^2=5$ 的解 $x^2=5$ $\Rightarrow (\quad x \quad) \times (\quad x \quad) = 5$ $\Rightarrow (\quad \quad) \times (\quad \quad) = 5$ $\Rightarrow x = (\quad \quad)$ (2) 求方程式 $x^2=0$ 的解 $x^2=0$ $\Rightarrow (\quad x \quad) \times (\quad x \quad) = 0$ $\Rightarrow (\quad \quad) \times (\quad \quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad \quad)$ (3) 求方程式 $x^2=-5$ 的解 $x^2=-5$ $\Rightarrow (\quad x \quad) \times (\quad x \quad) = -5$ $\Rightarrow (\quad \quad) \times (\quad \quad) = -5$ $\Rightarrow x = (\quad \quad)$	(1) 求方程式 $(x-2)(x-5)=0$ 的解 $(x-2)(x-5)=0$ $\Rightarrow (\quad \quad) = 0$ 或 $(\quad \quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad \quad)$ (2) 求方程式 $(x+1)(x+4)=0$ 的解 $(x+1)(x+4)=0$ $\Rightarrow (\quad \quad) = 0$ 或 $(\quad \quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad \quad)$ (3) 求方程式 $(x-2)(3x+1)=0$ 的解 $(x-2)(3x+1)=0$ $\Rightarrow (\quad \quad) = 0$ 或 $(\quad \quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad \quad)$

1. 求平方根	2. 兩數相乘等於零
(4) 求方程式 $(x-3)^2=5$ 的解 $(x-3)^2=5$ $\Rightarrow (x-3) \times (x-3) = 5$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = 5$ $\Rightarrow x = (\quad)$	(4) 求方程式 $(x)(x+3)=0$ 的解 $(x)(x+3)=0$ $\Rightarrow (\quad) = 0$ 或 $(\quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad)$
(5) 求方程式 $(x-3)^2=0$ 的解 $(x-3)^2=0$ $\Rightarrow (x-3) \times (x-3) = 0$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad)$	(5) 求方程式 $(x)(2x-7)=0$ 的解 $(x)(2x-7)=0$ $\Rightarrow (\quad) = 0$ 或 $(\quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad)$
(6) 求方程式 $(x-3)^2=-5$ 的解 $(x-3)^2=-5$ $\Rightarrow (x-3) \times (x-3) = -5$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = -5$ $\Rightarrow x = (\quad)$	(6) 求方程式 $x^2+4x=0$ 的解 $x^2+4x=0$ $\Rightarrow (x) \times (\quad) = 0$ $\Rightarrow (\quad) = 0$ 或 $(\quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad)$
(7) 求方程式 $2(x+3)^2=5$ 的解 $2(x+3)^2=5$ $\Rightarrow (x+3) \times (x+3) = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow x = (\quad)$	(7) 求方程式 $3x^2-5x=0$ 的解 $3x^2-5x=0$ $\Rightarrow (x) \times (\quad) = 0$ $\Rightarrow (\quad) = 0$ 或 $(\quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad)$

二、執行

1. 配成平方法(一定可以)	2. 因式分解法(有時不行)
(1) 求方程式 $x^2+8x+7=0$ 的解 $x^2+8x+7=0$ $\Rightarrow x^2+8x+7+\square=0+\square$ $\Rightarrow (\quad)^2=\square$ $\Rightarrow x=(\quad)$ $\square x \quad \square$ $\times) \quad \square x \quad \square$ $\square x \quad \square$ $x^2 \quad \square x$ $x^2 \quad +8x \quad +7+\square$	(1) 求方程式 $x^2+8x+7=0$ 的解 $x^2+8x+7=0$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = 0$ $\Rightarrow (\quad) = 0$ 或 $(\quad) = 0$ $\Rightarrow x = (\quad)$ $\square x \quad \square$ $\times) \quad \square x \quad \square$ $\square x \quad \square$ $x^2 \quad \square x$ $x^2 \quad +8x \quad +7$

1. 配成平方法(一定可以)	2. 因式分解法(有時不行)
(2) 求方程式 $x^2-10x+21=0$ 的解 $x^2-10x+21=0$ $\Rightarrow x^2-10x+21+\square=0+\square$ $\Rightarrow (\quad)^2=\square$ $\Rightarrow x=(\quad)$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad -10x \quad +21+\square \end{array}$	(2) 求方程式 $x^2-10x+21=0$ 的解 $x^2-10x+21=0$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = 0$ $\Rightarrow (\quad) = 0 \text{ 或 } (\quad) = 0$ $\Rightarrow x=(\quad)$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad -10x \quad +21 \end{array}$
(3) 求方程式 $2x^2+3x-5=0$ 的解 $2x^2+3x-5=0$ $\Rightarrow x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}+\square=0+\square$ $\Rightarrow (\quad)^2=\square$ $\Rightarrow x=(\quad)$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ x^2 \quad \square x \\ \hline x^2 \quad +\frac{3}{2}x \quad -\frac{5}{2}+\square \end{array}$	(3) 求方程式 $2x^2+3x-5=0$ 的解 $2x^2+3x-5=0$ $\Rightarrow (\quad) \times (\quad) = 0$ $\Rightarrow (\quad) = 0 \text{ 或 } (\quad) = 0$ $\Rightarrow x=(\quad)$ $\begin{array}{r} \square x \quad \square \\ \times) \quad \square x \quad \square \\ \hline \square x \quad \square \\ 2x^2 \quad \square x \\ \hline 2x^2 \quad +3x \quad -5 \end{array}$

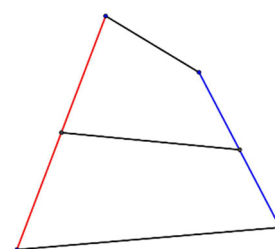
相似形

一、單元名稱：平行線截等比例線段、相似形

二、反思提問：

1.課本採用面積比來說明平行線截比例線段，平行線所截出來的線段比例的相等，是指什麼的相等？是面積的相等嗎？還是？

2.想要用線段成比例來做出平行線，可是右邊的畫法卻失敗了，明明紅線和藍線都被分割成 1:1 了！問題出在哪裡？



3.當我們強調兩個矩形是否相似的時候，我們會同時談對應邊成比例，對應角相等，可是，在談三角形的相似時，我們又可以只談邊長成比例，難道三角形以上的多邊形相似都要邊角一起談嗎？

4.課本採用透過縮放和三角形的全等證明三角形的相似性質，三角形的全等性質的證明則是透過尺規作圖做出來再進行疊合後看到，也就是說，三角形的相似感覺上是一種直覺！就是一定會這樣！一定嗎？還是只有在平面上才會有？在非平面上呢？在頭上、在脖子上做得出相似形嗎？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

平行線

平行線截等比例線段

相似形

形狀

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
平行線			
平行線截等比例線段			
相似形			
形狀			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1)數學新世界--CA 談數學--20180409 彰師大非歐幾何(10:30-45:00)

(2)數學新世界--CA 談數學--20170927 桃園市中壢國中 相似形教學

(3)數學新世界--CA 談數學--20171022 安徽省黃山市 公開課 三角形內角和

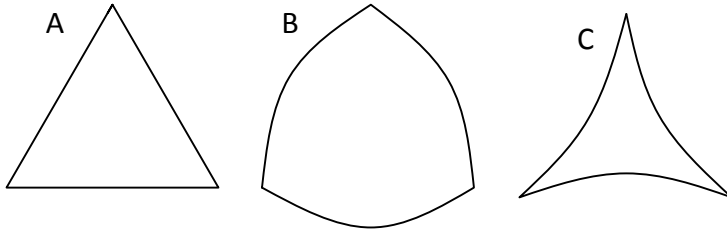
2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中九年級教材

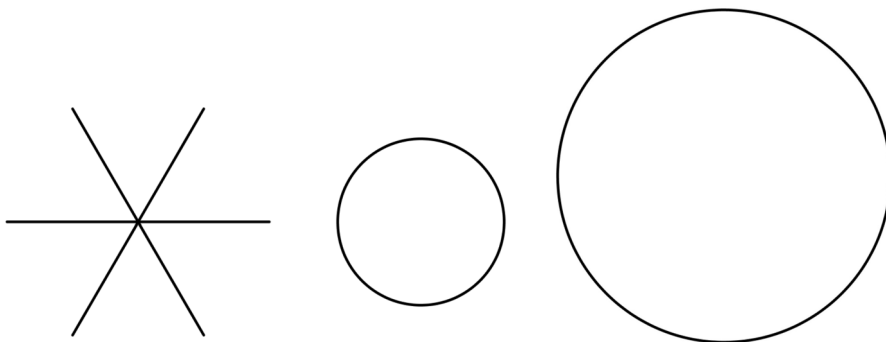
從相似形到平行線截等比例線段

1. 請你拿一條橡皮筋在不同的面上拉出一個正三角形(大約就好)，三角形的長相會像哪一種呢？註：橡皮筋必須貼在面上才可以喔。

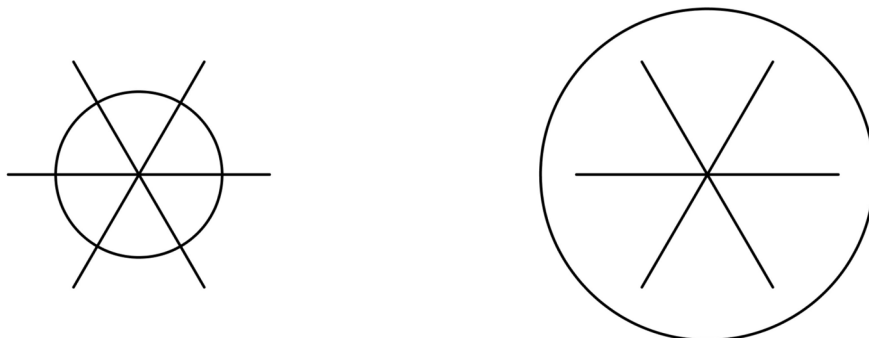


- (1) 桌面 ☐ A ☐ B ☐ C
 (2) 籃球面 ☐ A ☐ B ☐ C
 (3) 玻璃瓶瓶口側面 ☐ A ☐ B ☐ C

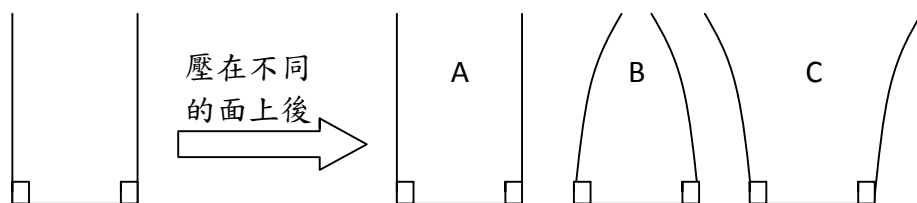
2. 我們使用很有彈性的玻璃纖維條做出下面 3 個圖形：



- (1) 當我們硬是將小圓和放射線段的端點接起來，圖形看起來會像什麼呢？猜猜看！
 (2) 當我們硬是將大圓和放射線段的端點接起來，圖形看起來會像什麼呢？猜猜看！



3.使用很有彈性的玻璃纖維條做出下面的圖形，我們把圖形壓在不同的面上後會變成什麼模樣？



(1)環保杯側面 ☐A ☐B ☐C

(2)籃球面 ☐A ☐B ☐C

(3)玻璃瓶瓶口側面 ☐A ☐B ☐C

4.回到第 1 題，在不同的面上拉出來的三角形內角和會幾度呢？

(1)在哪一種面上拉出來的三角形內角和=180 度呢？

☐環保杯側面 ☐籃球面 ☐玻璃瓶瓶口側面

(2)在哪一種面上拉出來的三角形內角和>180 度呢？

☐環保杯側面 ☐籃球面 ☐玻璃瓶瓶口側面

(3)在哪一種面上拉出來的三角形內角和<180 度呢？

☐環保杯側面 ☐籃球面 ☐玻璃瓶瓶口側面

5.分別在不同的面上，使用橡皮筋先拉出一個小正三角形，再將三角形邊長拉長 2 倍，如左下圖，請觀察邊長 2 倍拉長之後的三角形的角度會改變嗎？



(1)環保杯側面 ☐角度不變 ☐角度變大 ☐角度變小。

(2)籃球面 ☐角度不變 ☐角度變大 ☐角度變小。

(3)玻璃瓶瓶口側面 ☐角度不變 ☐角度變大 ☐角度變小。

6.能夠在長度拉長(或縮短)後角度維持不變的圖形，我們稱為放大(或縮小)圖形，也就是相似圖形。

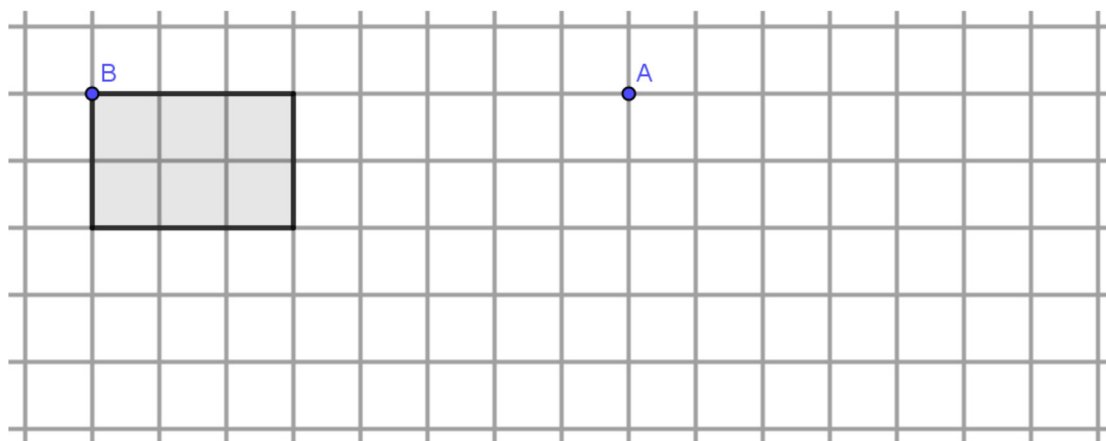
(1)在哪一些面上可以做出相似圖形呢？

☐環保杯側面 ☐籃球面 ☐玻璃瓶瓶口側面。

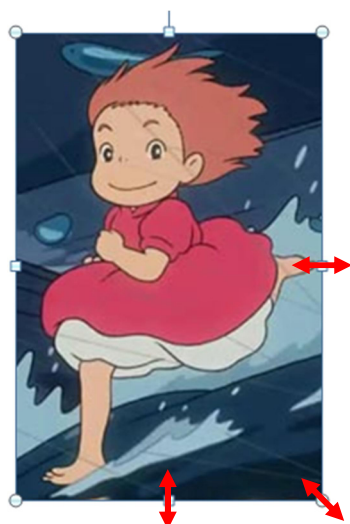
(2)在哪一些面上無法做出相似圖形呢？

☐環保杯側面 ☐籃球面 ☐玻璃瓶瓶口側面。

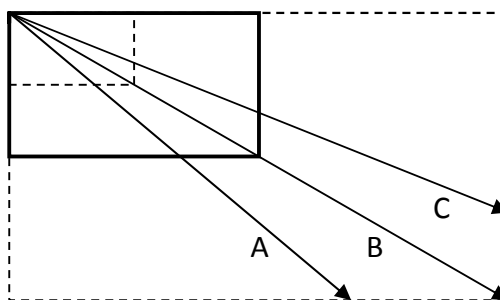
7.請分別從 A、B 兩點畫出下面矩形的 2 倍放大圖形。



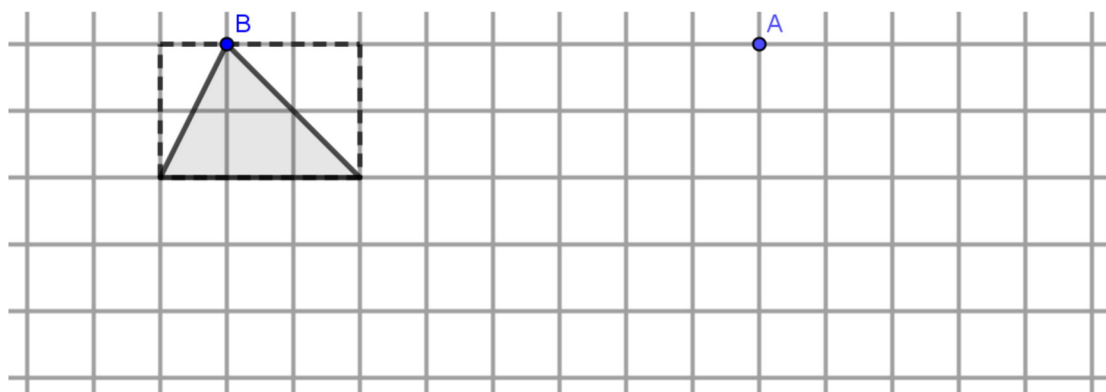
8.在電腦上想將下面可愛的波妞放大，請問你會選擇拉動哪一個箭頭呢？



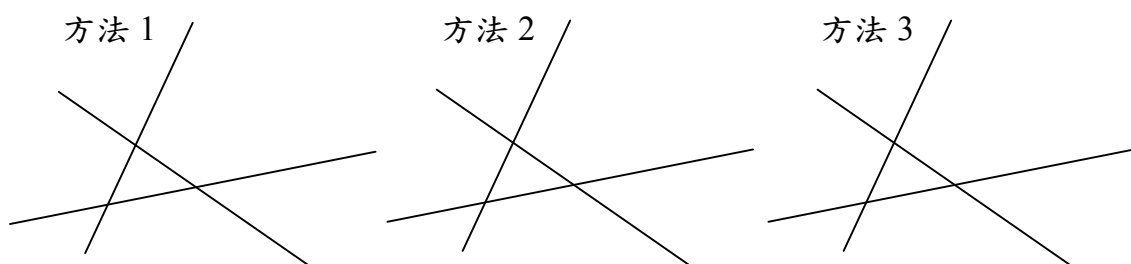
9.在電腦上把下面矩形放大或縮小的操作是沿著哪一條直線拉動的呢？ ☐A ☐B ☐C



9.請分別從 A、B 兩點畫出下面三角形的 2 倍放大圖形。



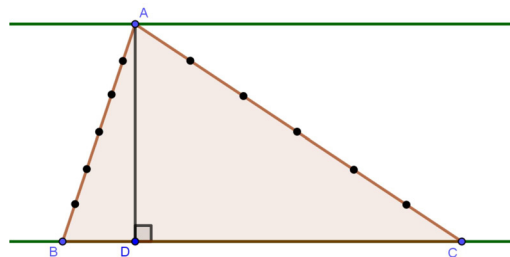
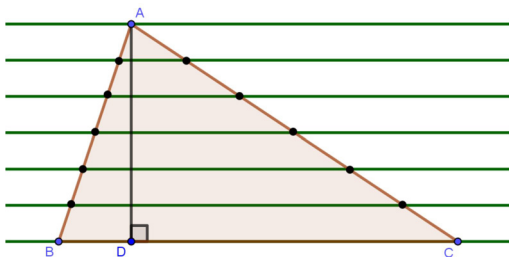
10. 我們利用橡皮筋將 3 根竹籤隨意綁出一個小三角形，請你試著利用竹籤綁出一個 2 倍放大的三角形，請試著利用下面的圖形紀錄你是怎麼做到的？



11. 關於等距平行線：

(1) 作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 兩線段，等距平行線會不會將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 等分？ (2) 請在下面圖形中將原有的平行線畫回去！

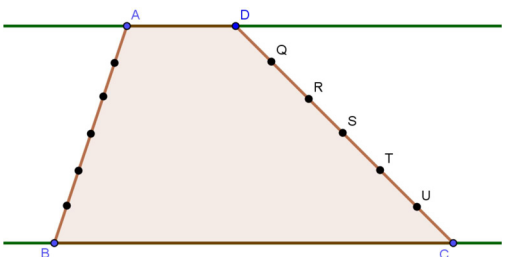
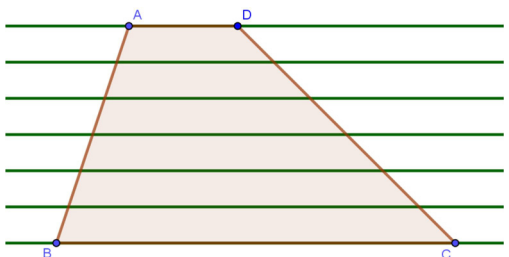
☐ 會 ☐ 不會。



(3) 圈圈看！ $\triangle ABC$ 分別是哪一個三角形的 2 倍、3 倍、5 倍放大圖形？

(4) 作 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 兩線段，等距平行線會不會將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DC}$ 等分？ (5) 請在下面圖形中將原有的平行線畫回去！

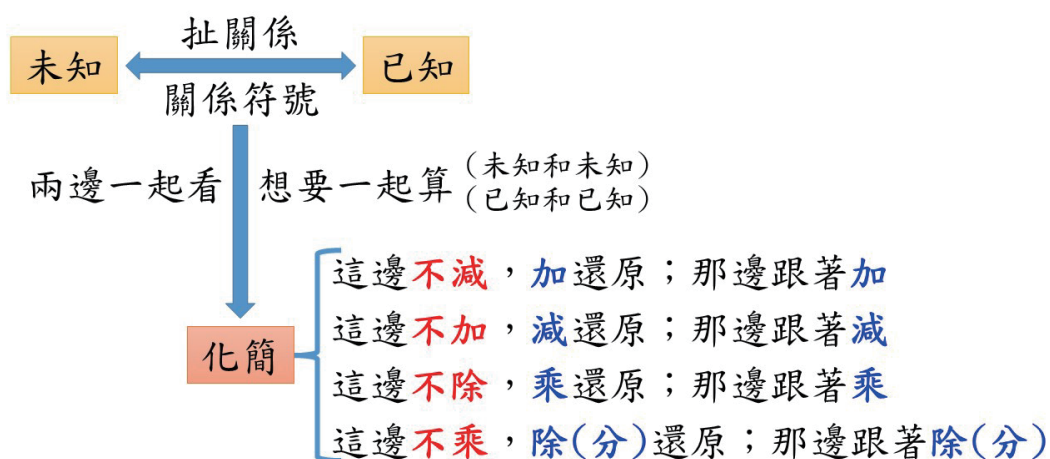
☐ 會 ☐ 不會。



(6) 梯形 ABCD 會是哪一個梯形的放大圖形呢？☐ 找得到 ☐ 找不到。

(7) 如果 $\overline{AB} = 4$ 、 $\overline{BC} = 16$ ，請試著算出其它梯形的底邊長。

概念發展脈絡範例：等量公理



主辦單位：教育部國民及學前教育署

承辦單位：國立彰化師範大學數學系

計畫電話：(04)7232105#3288

計畫信箱：nhmath@nhmath.com

計畫地址：500彰化市進德路1號數學系

計畫官網：<http://tw.newhorizonofmathematics.com>

數學新世界官網

