

屏東縣107學年度「數學生根教學」

國中領域教學共備人才培訓

學員手冊

09月05日 單元

整數與整數的四則運算

數線

科學記號與指數律

分數與分數的四則運算

因數與倍數

目錄

共備研習內容

一、整數與整數的四則運算、數線、科學記號與指數律..	1
二、分數與分數的四則運算.....	13
三、因數與倍數.....	25

整數與數線

一、單元名稱：整數、數線、絕對值、相反數、科學記號、指數律

二、反思提問：

1.我們經常在使用 1、2、3 這種自然數，這些數字本身跟量詞作用在一起而成一種數量的感覺，請問，自然數在數量中扮演著什麼角色？量詞又扮演著什麼角色呢？或者說，數字發揮了什麼功用呢？

2.在沒有量詞的情況下，兩個數字的加、減運算，跟乘、除運算分別代表什麼意思？乘法是連加嗎？除法是連減嗎？還是，有其他更精準的說法呢？

3.我們已經有自然數的系統來描述數量，似乎，所有的(完整性的)數量都可以用自然數來描述，那麼，為什麼會有負數的需求呢？負數在數量中扮演著什麼角色？學習負數的好處何在？

4.我們在教 $7 - (-5) = 7 + 5$ 的時候，會請學生利用負負得正的口訣進行計算，這是正確的念法嗎？應該怎麼念比較好？ $5 - (6 - 2) = 5 - 6 + 2$ 、 $(-2) \times (-3) = 6$ 、 $6 \div (-2) = -3 \dots$ ？這些又應該怎麼念才對？

5.生活中，我們經常看到或使用到的數線有哪些？我們是怎麼使用數線的？數線上的數字代表什麼意思？當我們想要製作數線的時候，我們心中要先確立哪些原則呢？書上經常告訴我們，數線有三要素，這三要素想要提供我們哪些訊息呢？數線上一定要呈現出這三要素嗎？

6. $a-b$ 除了可以直譯成 a 減去 b 之外，在數線上，我們可以看到 $a-b$ 所代表的意義是什麼呢？那， $a \div b$ 可以有哪些種意義呢？
7. 如果樓層標記是要表示整個樓層空間，就數線的概念，大樓的三樓(3F) 你覺得 3F 應該標記在哪裡呢？天花板、牆壁還是地板呢？地下 3F 呢？有第 0 樓嗎？
8. 我們被教導 5 比 -10 大，為什麼是 -10 比較小呢？這是根據什麼觀點我們才會做這樣的定義？
9. 一個數在加減法以及乘除法中，他分別有各自的相反數(0 沒有乘除法的相反數)，相反數的意義何在？相反數有什麼功用是什麼呢？
10. 我們以自然數為基礎創造了正負數(正整數與負整數)來描述具有相反性質的量詞，那麼，生活中，什麼時候我們又會不想要這個性質相反的正負數呢？在使用到絕對值的想法中，絕對值的功用是把數字變成正數？還是？
11. 關於數字大小的表現方式，國小學到使用不同位址具有不同的位值來呈現一個數字的大小，到了國中，我們用科學記號的方式來呈現一個很大或很小的數，在高中，我們又學了對數函數，請問，位址(位值)、科學記號與對數函數這三者之間有什麼關係呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

負數

負數的運算

數線

絕對值

相反數

科學記號

指數律

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
負數			
負數的運算			
數線			
絕對值			
相反數			
科學記號			
指數律			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1)數學新世界--CA 教數學--20180706 基隆市明德國中 入班教學 平面直角坐標(數線)
- (2)談「正負數」(擷取自數學新世界 CA 談數學 20170915 臺南市永仁高中 part1)
- (3)數學新世界--CA 談數學--20180411 高雄市國教輔導團 數線 part2
- (4)數學新世界--CA 談數學--20140911 屏東縣琉球國中 正負數 絕對值數的變化第 1 堂課
- (5)數學新世界--CA 談數學--20140911 屏東縣琉球國中 正負數 絕對值數的變化第 2 堂課
- (6)數學新世界--CA 談數學--20161013 桃園山腳國中 科學記號 part1
- (7)數學新世界--CA 談數學--20161013 桃園山腳國中 科學記號 part2
- (8)數學新世界--CA 談數學--20160805 和群國中 指數律 part1
- (9)數學新世界--CA 談數學--20160805 和群國中 指數律 part2

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中七年級教材

負數、數線、一元一次方程式

1. 請試著讓下面的所做的事情不見了。

- (1) 裝了 1 杯茶 (2) 脫掉外套 (3) 從家裡走到學校
(4) 把窗簾拉起來 (5) 捲起袖子 (6) 琵琶遮臉

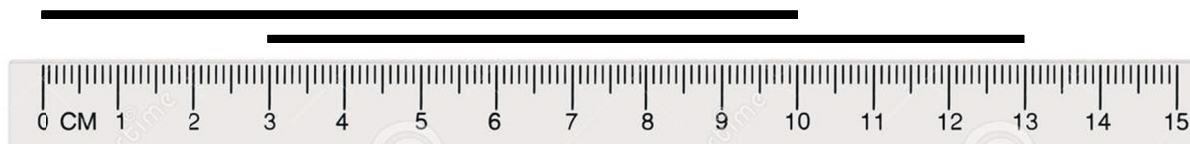
2. 小結論：想讓做過的事情不見了，可以透過相反的做法來抵銷掉

這相反的概念就是_____

這具有抵銷作用的量的大小就稱為_____

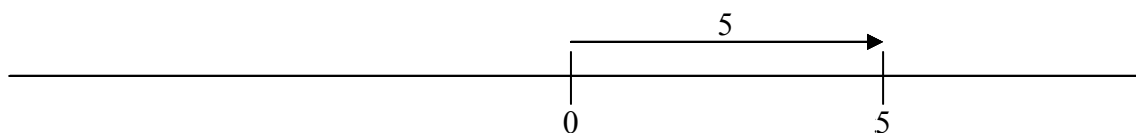
3. 量量看，下面的粗黑線條有多長？你會選擇哪一種擺法來測量呢？

☐ 上面 ☐ 下面

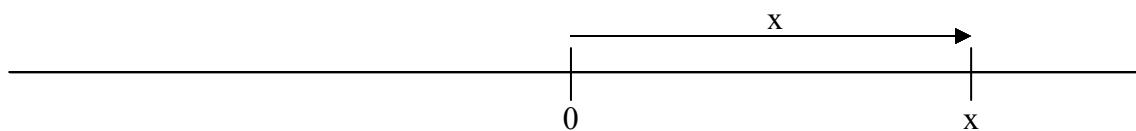


4. 承上，有沒有發現，直尺上的數字代表什麼意思呢？請你試著在上面的直尺上畫出數字 5 在直尺上真正代表的意思！

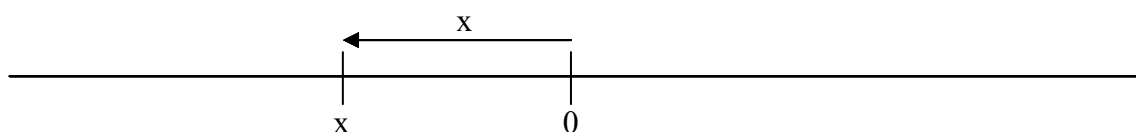
5. 觀察下面數字 5 的位置，數字-5 應該畫在哪裡，才會有表達出負號代表想法，又可以將數字 5 抵銷掉的感覺呢？



6. 觀察下面數字 x 的位置，數字-x 應該畫在哪裡，才會有表達出負號代表想法，又可以將數字 x 抵銷掉的感覺呢？

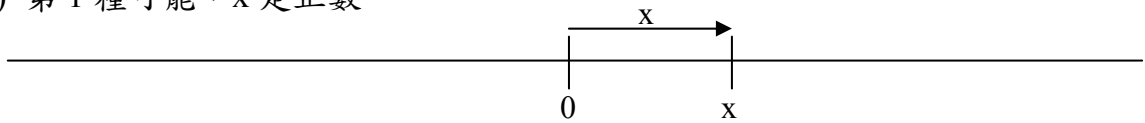


7. 觀察下面數字 x 的位置，數字-x 應該畫在哪裡，才會有表達出負號代表想法，又可以將數字 x 抵銷掉的感覺呢？

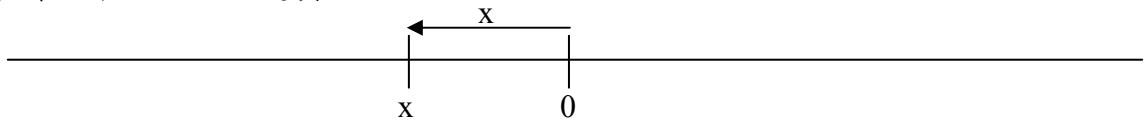


8. 請你試著在下面直線上畫出 $2x+3$ ，先不考慮 x 可能是零喔。

(1) 第 1 種可能， x 是正數



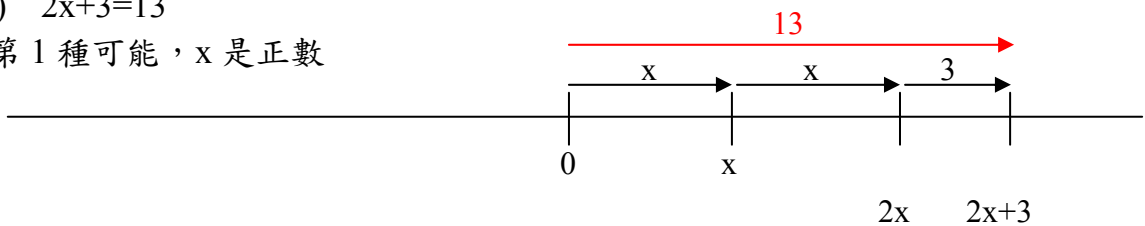
(2) 第 2 種可能， x 是負數



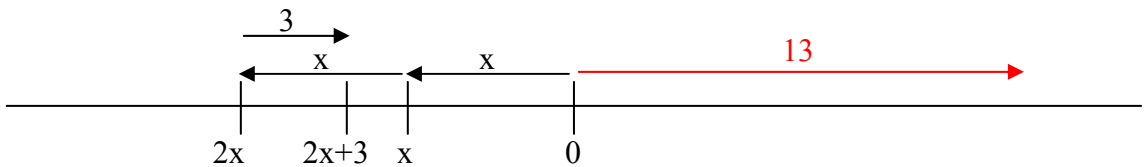
9. 我們來畫圖表現下面關係式中的圖形，哪一種畫法才是正確的？

(1) $2x+3=13$

□ 第 1 種可能， x 是正數



□ 第 2 種可能， x 是負數



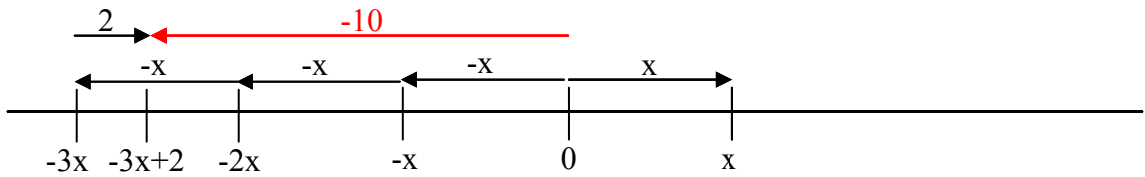
(2) 請算出 x 的值

(3) 試著將圖形解題的方法寫成橫式的數學算式來解題，加油！

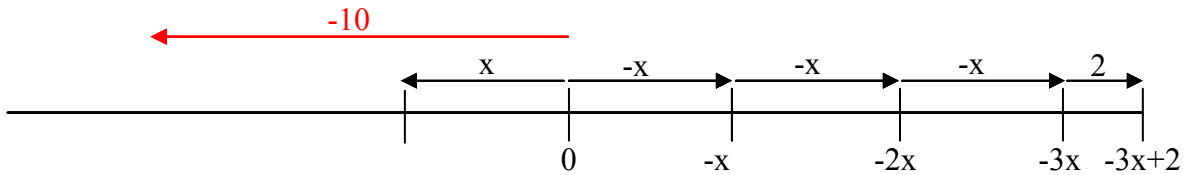
10. 我們來畫圖表現下面關係式中的圖形，哪一種畫法才是正確的？

(1) $-3x+2=-10$

□第 1 種可能， x 是正數



□第 2 種可能， x 是負數



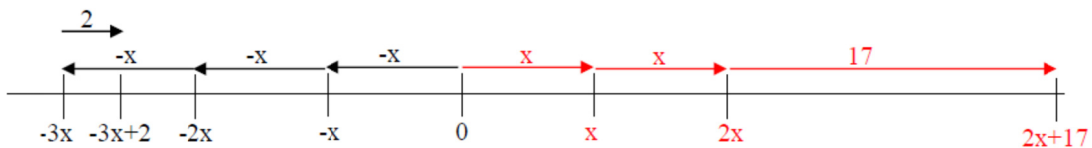
(2) 請算出 x 的值

(3) 試著將圖形解題的方法寫成橫式的數學算式來解題，加油！

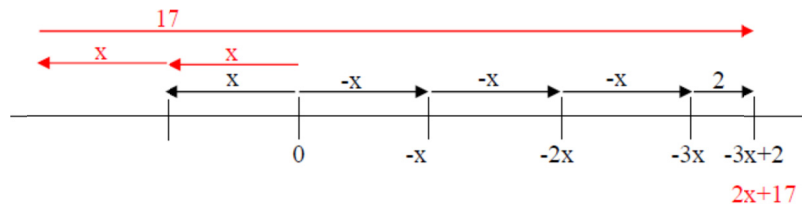
11. 我們來畫圖表現下面關係式中的圖形，哪一種畫法才是正確的？

(1) $-3x+2=2x+17$

□第 1 種可能， x 是正數



□第 2 種可能， x 是負數



(2) 請算出 x 的值

(3) 試著將圖形解題的方法寫成橫式的數學算式來解題，加油！

科學記號

1. 數字 432659871 和 91275685，誰比較大？

☐ 91275685 比較大

因為**最前面**的數字 $9 > 4$

432659871

91275685

☐ 432659871 比較大

因為 432659871 數字**比較長**

432659871

91275685

伏筆：位址、等級

2. 請在數字下方空格中填入數字真正代表的位值

留空位給位值的指數寫法

伏筆：指數律

單位	萬	千	百	十	個	十分	百分	千分
位址	1	1	1	1	1	1	1	1
位值				10	1	0.1		

晉級

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

$\leftarrow \times 10$

降級

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

$\rightarrow \times \frac{1}{10}$

3. 我們知道 $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000$ ，那數字 10000000000000000000 應該怎麼做紀錄比較方便呢？請發揮你的創意。

讓學生發揮創意，再簡化紀錄為指數，

再回第 2 題寫上位值的指數寫法，引導出 10^0 、 10^{-1} ...

4. 薪水 9999 和 10000 明明只相差 1 元而已，但是，怎麼讓人感覺上差很大！？你知道為什麼嗎？

	9	9	9	9		1	0	0	0	0
+										

滿 10 就晉級

不足 1 就降級

5. 數字 0.00083479635 和 0.00256，誰比較大？

☐ 0.00083479635 比較大

因為**最前面**的數字 $8 > 2$

0.00083479635

0.00256

☐ 0.00083479635 比較大

因為數字**比較長**

0.00083479635

0.00256

☐ 0.00256 比較大

因為千分比萬分大，越分會越小

0.00083479635

0.00256

6. 請改寫下面空格中所填的數字，讓我們更能**直接看到(讀出)**數字真正的大小

單位	萬	千	百	十	個	十分	百分	千分
位址	0.3			12		43	0.7	
改寫								

有發現嗎？當空格中的數字是多少的時候，我們就可以**直接看到(讀出)**數字真正的大小，而不需要再做改寫？

讓學生感覺到科學記號前端數字必須有規定才能直接展現出數字真的等級

7. 請試著完成下面的計算

(1) $2.3 \text{ 萬} + 5.1 \text{ 千}$

(2) $2.3 \text{ 萬} - 5.1 \text{ 千}$

科學記號是數字等級化的紀錄方式，加減計算時仍須要回歸到同單位，乘除法則利用晉級降級的語詞進行運算，除法可以利用等值分數概念(分以分母同時縮放倍數不變)

(3) $2.3 \text{ 萬} \times 5.1 \text{ 千}$

(4) $2.3 \text{ 萬} \div 5.1 \text{ 千}$

(5) $2.3 \text{ 萬分} + 5.1 \text{ 千分}$

(6) $2.3 \text{ 萬分} - 5.1 \text{ 千分}$

(7) $2.3 \text{ 萬分} \times 5.1 \text{ 千分}$

(8) $2.3 \text{ 萬分} \div 5.1 \text{ 千分}$

8. 西元 1999 年 9 月 21 日台灣集集 7.6 級大地震，西元 2011 年 3 月 11 日日本福島 9.0 級大地震，都產生極大的災情，這兩個地震級數相差 1.4 級，這表示地震的強度 9.0 級大約是 7.6 級的幾倍呢？

☐1000 倍 ☐幾 1000 倍

註：芮氏地震規模與能量關係，規模每相差 1.0，釋放的能量就相差 $10^{1.5}$ 倍，即約 32 倍；每相差 2.0，釋放的能量則相差 10^3 倍，即 1000 倍。

9. 小明在網路上搜尋到水資源的資料如下：「地球上水的總儲量為 1.36×10^{18} 立方公尺，其中可供人類使用的淡水只占全部的 0.3%。」根據他搜尋到的資料，判斷可供人類使用的淡水有多少立方公尺？

10. 將 4.31×10^{-5} 寫成小數形式，則其小數點後第四位數字為何？

指數律

1. 數字運算的下方是數字運算的簡記方式，請按照表格填寫規則完成其它空格的填寫

結果			8	4	2			
數字 運算			$2 \times 2 \times 2$	2×2	2			
簡記			2^3	2^2	2^1			

晉級

$\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$ $\xleftarrow{\times 2}$

降級

$\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{2}}$

這是小學位址表的另一種表現方式

2. 數字運算的下方是數字運算的簡記方式，請按照表格填寫規則完成其它空格的填寫

結果			-8	4	-2			
數字 運算			$(-2) \times (-2) \times (-2)$	$(-2) \times (-2)$	-2			
簡記			$(-2)^3$	$(-2)^2$	$(-2)^1$			
改寫			-2^3	2^2	-2^1			

晉級

$\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$ $\xleftarrow{\times (-2)}$

降級

$\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$ $\xrightarrow{\times (-\frac{1}{2})}$

負數的次方學生容易出錯，要很慢！

3. 請比較下面這些數字的大小

(1) 2^8 、 4^6 、 8^3

(2) $(-2)^8$ 、 $(-4)^6$ 、 $(-8)^3$

利用比較大小談出指數律。指數律應該來自於數字的分解，什麼時候才會有將數字分解的需求呢？應該是在利用短除法化簡公倍數的時候出現

(3) $(2 \times 3)^{15}$ 、 $2^{14} \times 3^{16}$

(4) $2^{13} \times 4^9$ 、 $4^{12} \times 8^3$

(5) $(2^9)^8$ 、 $(2^{10})^7$

4. 計算 $7^3 + (-4)^3$ 之值為何？

5. 下列敘述何者正確？

- (A) $2^3 - (-2)^3 = 0$ (B) $2^4 - (-2^4) = 0$
(C) $(-2)^3 - (-2^3) = 0$ (D) $(-2)^4 - (-2^4) = 0$

6. 計算 $11 - 3^2 \times [2 - (-3)^2] + 6$ 之值為何？

7. 算式 $(-3)^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^3}$ 之值為何？

分數的運算

一、單元名稱：分數與分數四則運算、因數、倍數、質數、短除法

二、反思提問：

1. 我們什麼時候會用到分數？分數本質上想用來表示什麼？

2. 將下面 7 塊蛋糕平分給 2 人，你會怎麼分呢？每個人可以拿到多少？
怎麼講呢？

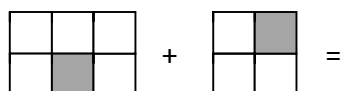


3. 「 $\frac{2}{3}$ 」應該怎麼念？

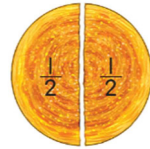
(1)三，分之二 (2)三分，之二 (3)三分之，二。

4. 請問 $\frac{1}{2}$ 張 Pizza 比較大，還是 $\frac{1}{4}$ 張 Pizza 比較大？

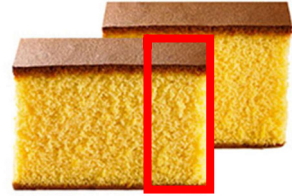
5. 請算出下面圖示中灰色部分的大小。



6. 右邊的圖示中 $\frac{1}{2}$ 這個數字想要表達的意思是什麼呢？先唸唸看，如果覺得怪怪的，那麼，要怎麼改比較好？



7. 右圖紅色框框內的蛋糕大小算不算是 1 塊蛋糕的 $\frac{1}{3}$ 呢？怎麼檢查呢？



8. 有 1 盒 Pizza 平分成 8 片，被吃掉 5 片，下面有兩種方式來表現剩下的 Pizza，在什麼情況下你會用(1)？在什麼情況下你會用(2)？

(1) 剩下 3 片 (2) 剩下 $\frac{3}{8}$ 盒。

9. 分數，是「先分再數 su」，以這樣的觀點來看「真分數」和「假分數」的真和假，它的道理是什麼？

10. 哥哥和姊姊各有 1 塊相同大小的蛋糕，如果哥哥分給弟弟 $\frac{1}{2}$ 塊，姊姊分給弟弟 $\frac{1}{3}$ 塊，弟弟會怎麼說他拿到多少的蛋糕呢？

11. 我們在操作什麼計算時，會較頻繁的使用因數、倍數和質數呢？

12. 「1」不是質數也不是合數的道理是什麼？質數和合數的差別是什麼？
『質』數是想要用來標記數的什麼性質？

13. 我們會利用短除法計算兩數以上的最大公因數和最小公倍數，怎麼說明短除法的計算過程，才能讓學生可以理解這個做法，每一個步驟背後的涵義，而不是背下短除法的寫法。

3	12	18	15
2	4	6	5
	2	3	5

14. 教分數的加減法，最主要應該好好談清楚的核心概念是什麼？在什麼情況下，分數的運算跟整數一模一樣？

15. 教分數的乘法，最主要應該好好談清楚的核心概念是什麼？

怎麼跟學生說明 $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$ 和 $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7}$ ？

16. 整數的除法和分數的除法，它們的異同是什麼？

在做小數的除法時，我們是如何進行的？其核心想法是什麼？

17. 怎麼跟學生說明 $\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$ ，才不會只是在記「乘以一個分數等於乘上它的倒數」這個算則？

18. 請列出學生學習這個單元常見的錯誤想法，我們可以怎麼說清楚來幫助學生澄清概念？例如：

(1) 將 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 計算成 $\frac{1+1}{2+3}$ 。(2) 題目： $\frac{2}{3} = \frac{2+(\quad)}{3+6}$ ，將()內的數字也寫 6。

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

分數

分數的運算

因數

倍數

質數

短除法

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
分數			
分數的運算			
因數			
倍數			
質數			
短除法			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1)數學新世界--CA 談數學--20180613 彰化縣大湖國小 教案設計討論 (分數 1:02:20~1:20:20)
- (2)數學新世界--CA 談數學--20180319 臺東縣初來國小 入班教學 五年級分數的意義和分數乘法
- (3)數學新世界--CA 談數學--20180528 彰化縣豐崙國小 四年級 入班教學 等值分數 part2
- (4)數學新世界--CA 談數學--20180319 臺東縣初來國小 入班教學 六年級分數除法
- (5)談「短除法」擷取自 數學新世界--CA 談數學--20170920 彰化縣民生國小 除法 短除法 part2

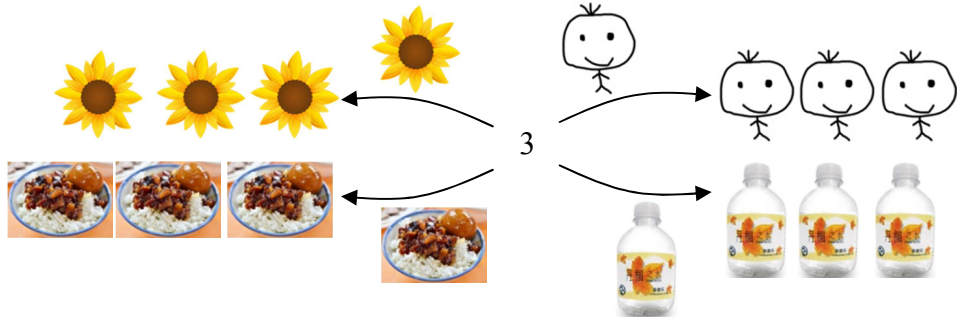
2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界五、六、七年級教材

分數

1. 我們會使用數字3講出3個人、3杯飲料、3瓶水、3朵花、3碗飯...，如果把3換成4，會變成什麼呢？3或4這樣的數字發揮了什麼作用呢？



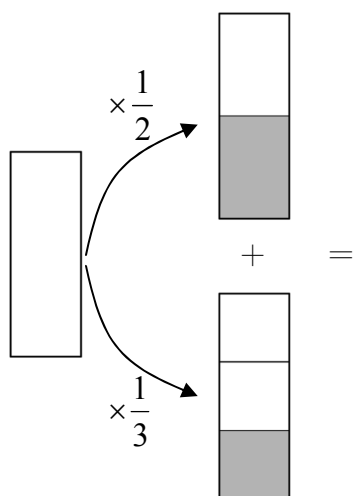
2. 下面有幾種錯誤表示 $\frac{1}{2}$ 的圖形，請你修正成正確的。



3. 阿寶家裡有3個小孩，糖果要買幾個才不會有分配不公平的問題呢？有哪幾種買法？
4. 把相同大小的橡皮筋串成一串，將橡皮筋一起拉長或一起變短的時候，什麼改變了，但什麼關係不會改變呢？



5. 請利用畫圖畫出 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$



$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = 2 \times \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = 3 \times \frac{1}{6}$$

從不一樣大塊
變成一樣大塊

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = 5 \text{ 個 } \frac{1}{6}$$

小提問 1：

哪一種說法比較好？

☐ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 等於 2 塊

☐ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 等於 1 小塊 + 1 大塊

小提問 2：

從分開算到一起算

怎麼把不一樣大塊(分開算)

變成一樣大塊(一起算)呢？

6. 分得越細，拿得越多；併的越多，拿得越少 $\Rightarrow$ 才能保證拿到一樣大

(1) 填入適當的數字讓等號成立 (2) 填入適當的數字讓等號成立

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} = \frac{2 \times ()}{3 \times ()} \quad \frac{24}{36} = \frac{24 \div 2}{36 \div 2} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()} = \frac{24 \div ()}{36 \div ()}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ \frac{4}{6} & \frac{()}{()} & \frac{()}{()} & \frac{()}{()} & \frac{12}{18} & \frac{()}{()} & \frac{()}{()} \end{array}$$

小結論： $\frac{2}{3}$ 把 $\frac{1}{3}$ 再分成 5 份 $= \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}$ 擴分

把 5 個 $\frac{1}{5}$ 併成 1 個 $\frac{1}{3}$ $= \frac{10}{15} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5}$ 約分 $\frac{2}{3}$

7. 請將下面的分數變成最簡單的分數

提示：從比較小的數字做分解，再檢查是不是可以和比較大的數字進行約分

(1) $\frac{8}{10}$

(2) $\frac{12}{15}$

(3) $\frac{1}{18}$

(4) $\frac{30}{20}$

數字分解是為後面的通分求公倍數做準備

8. 請仿照數字 1-10 的分解，完成 11-50 數字的徹底分解

1 不用考慮	11	21	31	41
2 無法分解	12	22	32	42
3 無法分解	13	23	33	43
4=2×2	14	24	34	44
5 無法分解	15	25	35	45
6=2×3	16	26	36	46
7 無法分解	17	27	37	47
8=2×4=2×2×2	18	28	38	48
9=3×3	19	29	39	49
10=2×5	20	30	40	50

9. 想求 $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$ 的數值

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{5 \times 3}{6 \times 3} = \frac{5 \times 4}{6 \times 4} = \frac{5 \times 5}{6 \times 5} = \frac{5 \times 6}{6 \times 6} = \dots$$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{10}{12} & \frac{15}{18} & \frac{20}{24} & \frac{25}{30} & \frac{30}{36} \end{array}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3 \times 4}{4 \times 4} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{3 \times 6}{4 \times 6} = \dots$$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{6}{8} & \frac{9}{12} & \frac{12}{16} & \frac{15}{20} & \frac{18}{24} \end{array}$$

10. 想求 $\frac{11}{30} + \frac{5}{24}$ 的數值

把分母變成一樣大最簡單的算法如下：

$$\frac{11}{30} = \frac{11 \times 24}{30 \times 24}$$

$$\frac{5}{24} = \frac{5 \times 30}{24 \times 30}$$

但是，數字越小越好算，有機會讓分母變小嗎？

11. 把公倍數變小！

30×24 是 30 的 24 倍也是 24 的 30 倍

所以，24×30 是 30 和 24 的公倍數

$$\begin{array}{rcl} & 24 & \times \quad 30 \\ \text{徹底分解} & 2 \times 2 \times 2 \times 3 & \times \quad 2 \times 3 \times 5 \\ \text{相同共用} & 2 \times 2 \times 3 & \times \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \times 5 \\ \text{相同共用} & 2 \times 2 & \times \quad \boxed{2} \quad \boxed{3} \times 5 \\ & & \text{共用的} \end{array}$$

30 和 24 的公倍數

從 24×30 簡化為 2×2×2×3×5

24 最少必須多乘_____變成 30 跟 24 的公倍數

30 最少必須多乘_____變成 30 跟 24 的公倍數

我們稱_____是 30 和 24 的最小公倍數

我們稱_____是 30 和 24 的最大公因數

因此 $\frac{11}{30} + \frac{7}{24} = \frac{11 \times 4}{30 \times 4} + \frac{7 \times 5}{24 \times 5} = \frac{44 + 35}{120} = \frac{79}{120}$

12. 請仿照第 11 題把公倍數變小的做法，計算 $\frac{8}{45} + \frac{7}{30}$ 的數值。

小結論：

1. 短除法—把公倍數變小的簡化寫法

$$\begin{array}{r} 2 \times \overline{24 \times 30} \\ 3 \overline{12 \times 15} \\ \times \quad 4 \times 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 2 \overline{24 \quad 30} \\ 3 \overline{12 \quad 15} \\ \quad 4 \quad 5 \end{array}$$

2. 通分就是分數分別擴分成相同分母的公倍數
分母一樣大代表一樣大塊才能一起算

13. 計算 $\frac{5}{24} + \frac{7}{36} + \frac{9}{40}$ 的數值。

短除法做到這裡，已經做出了什麼呢？

短除法做到這裡，公倍數還可以再簡化嗎？

$$\begin{array}{r} 2 \overline{24 \quad 36 \quad 40} \\ 2 \overline{12 \quad 18 \quad 20} \\ \quad 6 \quad 9 \quad 10 \end{array}$$

14. 負數的負代表什麼意思？負數又具有什麼功能呢？「 $-a$ 」是正數還是負數呢？

15. 為什麼 $\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$ ？

$-\frac{2}{3}$ 可唸成「負 $\frac{2}{3}$ 」，也可以唸成「負的 $\frac{2}{3}$ 」

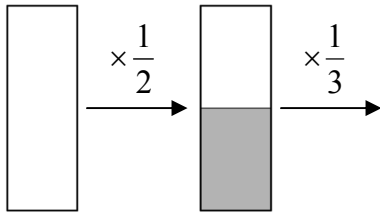
16. $-2\frac{1}{3}$ 應該唸成「負的 2 又 $\frac{1}{3}$ 」 $\Rightarrow -(2 + \frac{1}{3})$ ，還是「負 2 又 $\frac{1}{3}$ 」 $\Rightarrow -2 + \frac{1}{3}$ 呢？

17. $\frac{2}{3} + (-\frac{1}{2}) =$

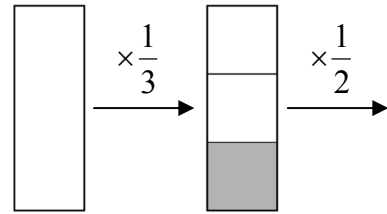
18. $-\frac{5}{12} - \frac{2}{15} =$

19. $-\frac{3}{5} - (\frac{2}{3} - \frac{1}{2}) =$

20. 請利用畫圖畫出 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$



21. 請利用畫圖畫出 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$



22. 請寫出右邊計算的想法 $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = 3 \times \frac{1}{5} \times 2 \times \frac{1}{7} = 3 \times 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$

23. $\frac{2}{3} \times (-\frac{4}{7}) =$

24. $-\frac{3}{5} \times (-\frac{7}{12}) =$

25. $-\frac{4}{5} \times (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{3}{4}) =$

26. 我們從第 4 題知道橡皮筋一起拉長一起變短時，長度會改變，但是彼此之間的倍數不會改變。

想想看，下面的運算過程的想法是什麼？

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} \div \frac{2}{7} \\
 & \begin{array}{c} \times 7 \downarrow \\ \frac{3}{5} \times 7 \end{array} \div \begin{array}{c} \times 7 \downarrow \\ 2 \end{array} \\
 & \begin{array}{c} \times \frac{1}{2} \downarrow \\ \frac{3}{5} \times 7 \times \frac{1}{2} \end{array} \div \begin{array}{c} \times \frac{1}{2} \downarrow \\ 1 \end{array} \\
 & = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2}
 \end{aligned}$$

小提問：

除以一個數相當於是乘以這個數的倒數
乘以倒數的目的是什麼呢？

27. $\frac{2}{3} \div (-\frac{4}{7}) =$

28. $-\frac{3}{5} \div (-\frac{7}{12}) =$

29. $-\frac{4}{5} \div (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{3}{4}) =$

因數倍數

一、單元名稱：整除、因數、倍數、質數、合數、短除法、最大公因數、最小公倍數

二、反思提問：

- 1.在什麼情況下，我們會使用到因數倍數這樣的觀念或想法呢？
- 2.就概念發展過程而言，哪個先發展比較流暢、比較有意思？是因數，還是倍數呢？
- 3.在學生的學習過程中，什麼時候開始用到因數倍數？
- 4.為什麼 1 不算是一個質數呢？質數是用來標示什麼性質的呢？
PS：質數被定義為：「在大於 1 的自然數中，除了 1 和該數自身外，無法被其它自然數整除的數。」
- 5.在考慮幾個數的公倍數的時候，直接將數字相乘就可以求得公倍數了，可是，這個直接乘出來的公倍數可能太大且不方便使用，這時候，我們會考慮比較小的公倍數了，在求得最小公倍數以及最大公因數的時候，我們會使用短除法，你知道短除法設計的原理嗎？請說明看看！

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

整除

因數

倍數

質數

短除法

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
整除			
因數			
倍數			
質數			
短除法			

五、評量

1. 林老師將數量為 147 個及 185 個的 A 、 B 兩種糖果平均分給班上同學後，分別剩下 A 糖果 3 個及 B 糖果 5 個，請問：該班學生可能的人數。
2. 歐太太有三個女兒，長女 7 日一歸，次女 11 日一歸，幼女 15 日一歸。某日三女同歸，歐太太為使三女下一次早些同歸相聚，便叫三女把歸家日期各縮短一天，但幼女說：不如把歸家日期各延長一天，便可早些相聚。則歐太太與幼女誰言之有理？

六、觀摩、討論&修改

1. 參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1) 數學新世界--CA 談數學--20171221 國立臺北教育大學 因數倍數、質數 part2
 - (2) 數學新世界--CA 談數學--20161103 文光國中 七年級 最大公因數與最小公倍數
 - (3) 數學新世界 CA 談數學 20170914 彰化縣豐崙國小(小五-因數與倍數)
2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。
 3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

七、學習單：完整版請參考數學新世界五、六、七年級教材

因數倍數

你有將零錢存進豬公撲滿的經驗嗎？當存滿了就是剖開豬公算錢的時候！我們會將硬幣 10 個一疊，數出全部有幾疊又剩多少個來計算總共存了多少錢；這個 10 個一疊的動作，正是在操作 10 的倍數！除此之外，在分東西時我們也常運用因倍數的概念，而在數學的計算上，想一想，在做什麼運算的時候會需要用到因數或倍數的概念呢？

◎概念一：可分解的數

動動筆想數學

1. 請依照算式寫出各小題的結果。

(1) $3 \times \heartsuit =$

(2) $6 \times \text{手} =$

(3) $\frac{1}{3} \times \boxed{} =$

(4) $\frac{3}{4} \times \boxed{} =$

(5) $0 \times \text{電話} =$

(6) $1 \times \text{叉} =$

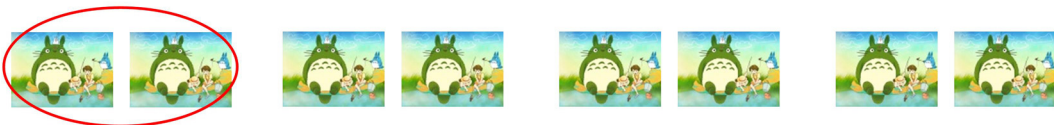
★數可以發揮什麼作用或功能呢？_____

2. 我們想要複製下面的圖形，複製出 6 個；如果利用電腦來複製，我們可以怎麼做呢？

甲：我們可以一個一個複製，複製 (ctrl+c) 再貼上 (ctrl+v) 的動作做 6 次。



乙：先複製出 2 個，再 2 個一組複製後再貼上的動作做 3 次。



請問還有其他的做法嗎？試著描述或畫下來。

3. 請利用電腦複製出下面的圖形 7 個，請問你可以有幾種作法？



4. 承第 2 題和第 3 題，複製 6 個和複製 7 個的做法有什麼不同？
你是否可以區分出數字 6 和 7 的不同是什麼？
如果我們以可不可以「分解」來看數字 6 和 7，它們的不同是什麼？試著寫下來。

5. 再想一想，數字 1 呢？我們需要把 1 拿來分解嗎？為什麼？

6. 觀察下面數字的分解，請從數字 1~30 中找出和 6 同類或者和 7 同類的數字，填入方格中並寫出它的分解：

◎ $6 = 1 \times 6$
 $= 2 \times 3$

◎ $7 = 1 \times 7$

7. 從 $10 = 2 \times 5$ ，我們可以看到

(1) 10 可以分解為 2 和 5 相乘，所以我們會說，2 和 5 是 10 的
_____。

(2) 10 是 5 的 2 倍，10 是 2 的 5 倍，所以我們會說，
10 是 5 的 _____，10 是 2 的 _____，
10 是 2 和 5 的 _____。

8. 請試著分解 96 這個數字：

$$96 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$
$$= \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \dots \text{ (分成 2 階段)}$$

$$96 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$
$$= \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \dots \text{ (分成 3 階段)}$$

$$96 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$
$$= \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times \underline{\quad} = \dots \text{ (分成 4 階段)}$$

9. 哪些數字可以由 2 和其它數字相乘呢？

這些數字的特徵是什麼呢？

10. 哪些數字可以由 5 和其它數字相乘呢？

這些數字的特徵是什麼呢？

11. ◎範例

$$645 = 15 \times 43; 15 \times 43 = 645$$

我們說

645 可以被 15 整除

645 是 15 的倍數

15 是 645 的因數 (整除數)

或是說

645 可以被 43 整除

645 是 43 的倍數

43 是 645 的因數 (整除數)

也就是說

15 和 43 都可以將 645 整除 (分解)

15 和 43 都是 645 的因數 (分解數)

645 是 15 和 43 的倍數

◎練習 (參考範例並完成填空)

$$36 = 4 \times 9; 4 \times 9 = 36$$

我們說

可以被 整除

是 的倍數

是 的因數

或是說

可以被 整除

是 的倍數

是 的因數

也就是說

和 都可以

將 整除 (分解)

和 都是

的因數 (分解數)

是 和

的倍數

12. 我們來嘗試看看哪些數字可以被 3 分解，也就是說，哪些數字可以被 3 整除呢？

(1) $10 \div 3 =$ (2) $100 \div 3 =$ (3) $1000 \div 3 =$ (4) $10000 \div 3 =$

$$3 \overline{)10}$$

$$3 \overline{)100}$$

$$3 \overline{)1000}$$

$$3 \overline{)10000}$$

(5) $70 \div 3 =$

(6) $700 \div 3 =$

(7) $7000 \div 3 =$

(8) $7770 \div 3 =$

$$3 \overline{)70}$$

$$3 \overline{)700}$$

$$3 \overline{)7000}$$

$$3 \overline{)70000}$$

(9) 請問 89735 可以被 3 成功分解（89735 是 3 的倍數）嗎？

◎概念二：質數與合數

動動筆想數學

1. 下面是我們將 12 個笑臉框起來的方式：

12×1



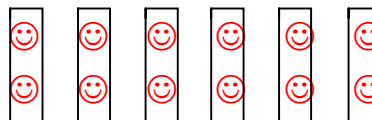
1×12



6×2



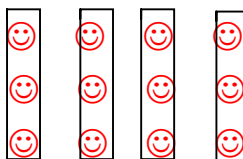
2×6



4×3



3×4



如果我們有 45 顆（或 36 顆、54 顆、60 顆）糖果，可以怎麼分裝呢？幾顆裝成 1 包可以剛好分完呢？

顆 ⇔ 包 顆 ⇔ 包 顆 ⇔ 包 顆 ⇔ 包

45 = 5 × 9 36 = 2 × 18 54 = 2 × 27 60 = 2 × 27

×	×	×	×
×	×	×	×
	×	×	×
	×	×	×
		×	×

★在此題中，糖果的總數 a 顆來表示，是由 1 包有 b 顆可以裝成 c 包相乘而得（ a 、 b 、 c 都是數字）；也就是 $a = b \times c$ ，那麼， a 會是 b 和 c 的 因數，而 b 和 c 會是 a 的 倍數。

2. 有 18 個男生和 24 個女生合起來分組，要讓每一組的男生一樣多，女生也一樣多，全部的人分組完成後可以分成幾組？

3. 五年 3 班有 27 位學生，請問老師需要買幾顆糖果，當全部的糖果平分給學生時可以剛好分完？



每個人分到的數量	老師總共需買幾顆	老師買的糖果數量和 27 有什麼關係？
1 顆		
2 顆		
3 顆		
10 顆		
? 顆		

4. 分別用長 4 公分和 6 公分的玩具鐵軌，在桌上各自排成一列。
當兩種鐵軌排成一樣長時，此時鐵軌的長度可能是幾公分？

5. 關於數字的放大與分解

$$3 \times \text{☺} = \text{☺☺☺}$$

$$1 \times \text{☺} = \text{☺}$$

$$5 \times \text{☺} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(畫出答案)

$$4 \times \text{☺} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(畫出答案)

✱ 我們可以看到數字 1 沒有改變物件的能力，意思是，乘以 1 不會變多也不會變少。

$$6 = 3 \times 2$$

我們說 6 可以被 3 和 2 分解

$$6 = 1 \times 6$$

✱ 這樣的寫法沒有成功的將 6 進行分解，因為 1 沒有改變物件的能力。

6.

質數：無法被分解的數

只能經過 1 階段放大後得到的數

$$3 = 1 \times 3$$

3 只能透過經過 1 次放大 3 倍獲得
3 是質數

1~30 中是質數的還有哪些呢？

合數：可以被分解的數

可以透過兩階段以上放大後合成的數

$$6 = 3 \times 2$$

6 可以透過 3 和 2 兩階段放大後合成

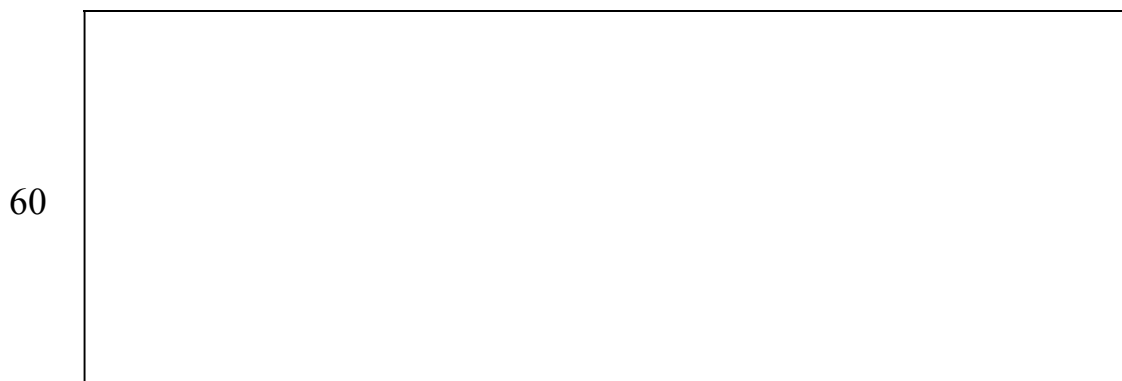
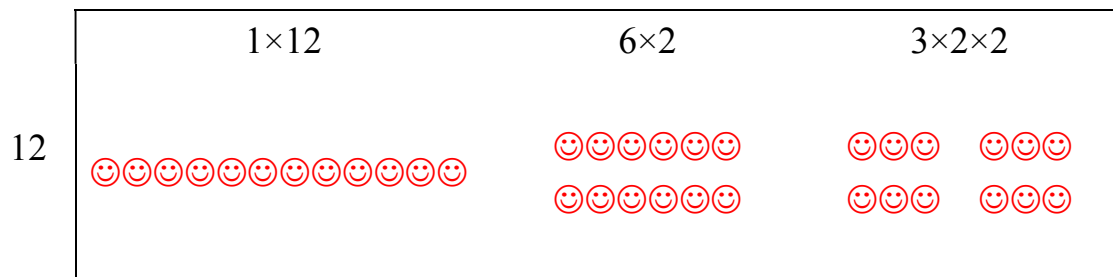
6 是合數

1~30 中是合數的還有哪些呢？

✱ 為什麼 1 不是質數呢？

因為它沒有被分解的需要，因此不考慮可不可以分解！

7. 下面是 12 的分解過程，請你試著做 45 和 60 的分解，直到無法分解為止。



◎概念三：公倍數

當我們在做分數的加減法時，例如： $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ ，我們會將兩個分數做「通分」， $\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3}$ 、 $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2}$ ，再做相加 $\frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$ 。你是否有看到，通分的意思是將兩個分數的分母變成一樣的數字，本來的 2 分變成 6 分，本來的 3 分也變成 6 分，分的更細了！6 是 2 的倍數，6 也是 3 的倍數。

動動筆想數學

1. 第(1)題，我們將 20 做分解，分到不能再分；請試著完成(2)(3)題。

$$(1) 20 = 2 \times 10$$

$$(2) 18 =$$

$$(3) 45 =$$

$$= 2 \times 5 \times 2$$

2. 請判斷下面哪些是 20 的倍數呢？

除了把算式計算出來，還有沒有其它的方法呢？

$$\square 2 \times 5 \times 2 \times 7$$

$$\square 2 \times 5 \times 3 \times 7$$

$$\square 2 \times 5 \times 8$$

$$\square 4 \times 15$$

3. 想知道兩個數的公倍數，最簡單的做法是什麼呢？

比如說，想知道 20 和 15 這兩個數的公倍數，最簡便的方式就是 。

因為 是 20 的 _____ 倍；

因為 是 15 的 _____ 倍

4. 請模仿第(1)(2)題，完成第(3)(4)題。

(1) 怎麼求 20 和 15 的最小公倍數

20 $\times$ 15 $\Rightarrow$ 最簡便找公倍數的方法，直接將數字相乘

$\Rightarrow$ 可以把公倍數簡化變小嗎？

$$= 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \quad 20 \text{ 和 } 15 \text{ 分解後都有 } 5,$$

我們可以共用一個 5 就好！

$$2 \times 5 \times 2 \times 3 \Rightarrow \text{這就是 } 20 \text{ 和 } 15 \text{ 的最小公倍數 } 2 \times 5 \times 2 \times 3$$

(2) 求 $3 \times 3 \times 5 \times 7$ 和 $2 \times 3 \times 7 \times 11$ 的最小公倍數

$3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \Rightarrow$ 最簡便找公倍數的方法，將數字直接相乘

$= 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11 \Rightarrow$ 我們可以把 $2 \times 3 \times 7 \times 11$ 當中的 3 和 7 拿掉，
跟 $3 \times 3 \times 5 \times 7$ 共用 3 和 7

$3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 11 \Rightarrow$ 這就是 $3 \times 3 \times 5 \times 7$ 和 $2 \times 3 \times 7 \times 11$ 的
最小公倍數 $3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 2 \times 11$

(3) 請試求 60 和 45 的最小公倍數。

(4) 請試求 30 和 78 的最小公倍數。

5. 「短除法」：請完成第(1)題，想想它的道理，再完成第(2)題。

(1) 求 12 和 15 的最小公倍數

a. 請寫出 12 的倍數

12、24、36、____、____、
____、____...

b. 請寫出 15 的倍數

15、30、45、____、____、
____、____...

c. 請寫出 12 和 15 的公倍數

____、____、____、
____、____...

d. 請寫出 12 和 15 的最小公倍數

e. 我們知道 12×15 是 12 的 15 倍，也是 15 的 12 倍，也就是說， 12×15 是 12 和 15 的公倍數，但是， 12×15 是 12 和 15 的最小公倍數嗎？
可以再簡化變小嗎？

(2) 求 18 和 24 的最小公倍數

a. 請寫出 18 的倍數

18、36、54、____、____、____、
____...

b. 請寫出 24 的倍數

24、48、72、____、____、____、
____...

c. 請寫出 18 和 24 的公倍數

____、____、____、____、
____...

d. 請寫出 18 和 24 的最小公倍數

e. 我們知道 18×24 是 18 的 24 倍，也是 24 的 18 倍，也就是說， 18×24 是 18 和 24 的公倍數，但是， 18×24 是 18 和 24 的最小公倍數嗎？
可以再簡化變小嗎？

f. 短除法原理

$$12 = 6 \times 2 = 3 \times 2 \times 2$$

$$15 = 3 \times 5 = 3 \times 5$$

12 和 15
的公倍數 $\Rightarrow$ $3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$
(最簡便)

12 和 15
公倍數 $\Rightarrow$ $3 \times 2 \times 2 \times 5$
簡化

$$\begin{array}{r|rr} \textcircled{3} & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

共有的因數

12 和 15 的最小公倍數是
 $3 \times 4 \times 5 = 60$

f. 短除法原理

$$18 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$24 = \underline{\hspace{2cm}}$$

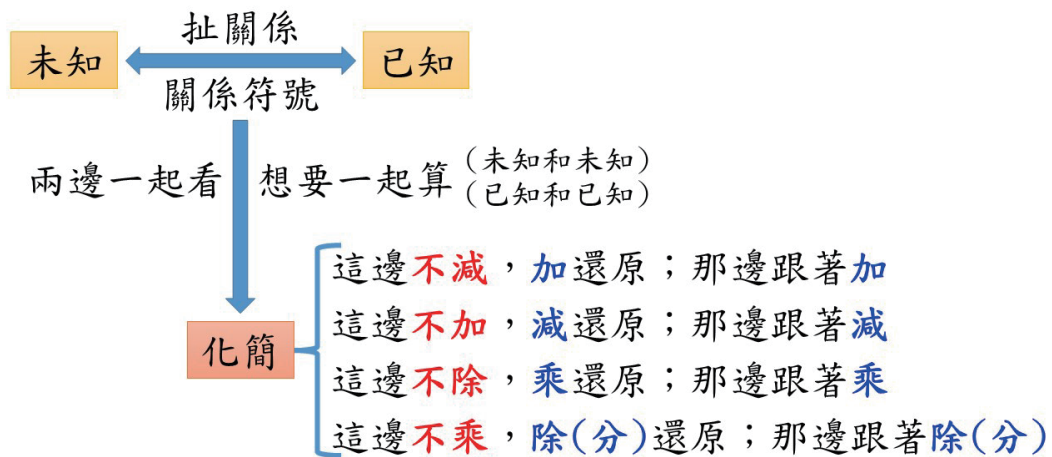
18 和 24 的
公倍數 $\Rightarrow$ $\underline{\hspace{2cm}}$
(最簡便)

18 和 24
公倍數 $\Rightarrow$ $\underline{\hspace{2cm}}$
簡化

$$\begin{array}{r|rr} & 18 & 24 \\ \hline & & \end{array}$$

18 和 24 的最小公倍數是
 $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

概念發展脈絡範例：等量公理



主辦單位：教育部國民及學前教育署

承辦單位：國立彰化師範大學數學系

計畫電話：(04)7232105#3288

計畫信箱：nhmath@nhmath.com

計畫地址：500彰化市進德路1號數學系

計畫官網：<http://tw.newhorizonofmathematics.com>

數學新世界官網

