

屏東縣107學年度「數學生根教學」

國小鄉鎮教學共備人才培訓

## 學員手冊

09月12日 單元

---

平面圖形

對稱圖形

比與比值

正比例與反比例

# 目錄

## 共備研習內容

|             |    |
|-------------|----|
| 一、平面圖形..... | 1  |
| 二、對稱圖形..... | 15 |
| 三、比與比例..... | 25 |



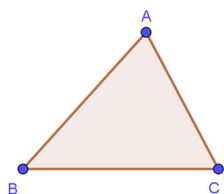
## 一、反思問題

1. 平面圖形這個單元有兩個主角，一個是「平面」另一個是「圖形」，在教學上，您是否有特別說明過這兩個概念呢？讓我們先想一想，什麼是形？

2. 有些物品會因外力而變形，有些則不會；關於變形-形狀的改變實際上是因為什麼變了而產生形的改變？請試著觀察下圖來回答。



3. 請試著移動下圖 A、B 或 C 其中一點的位置，很明顯的，三角形 ABC 的形狀被改變了！想一想，形的“定形”，它是什麼決定了而形也跟著決定了？



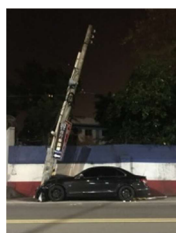
4. 角，是一個形嗎？如果是形，您會怎麼描述它？  
我們在什麼情況下，會想要知道角的大小？也就是，定義角的需求是什麼？

5. 我們用 90 度角來說兩直線的垂直，更貼切的說法是什麼？

圖一：你覺得電線桿還差多少可以被扶正呢？

圖二：平交道的柵欄還差多少可以放平呢？

您覺得這兩個圖跟數學所談的什麼概念是同出一轍的呢？

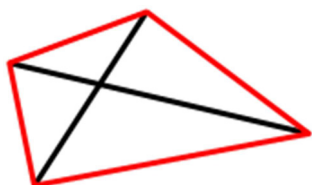


圖一



圖二

6. 課本定義平行為「兩條直線之間一樣寬」，在我們生活周遭眼見所及，看到的平行，除了一樣寬，還有其他的說法嗎？盡可能用各式各樣的說法說說看。
7. 國中數學在談兩直線平行的說法是：若平面上兩條直線都垂直於同一直線，則此兩條直線稱為平行線。想一想，如果不在平面上呢？垂直於同一直線的兩條直線有沒有可能不會保持一樣寬呢？也就是兩直線可能會愈來愈接近或者愈來愈分開。
8. 內角和外角是怎麼區別的呢？三角形的內角和一定是180度嗎？什麼情況是？什麼情況不是？
9. 實際操作一下，我們拿兩枝不同（或相同）長度的竹筷，將它交疊綁在一起，如下圖，當我們任意轉動兩枝竹筷，可以看到四邊形會變形。請試著回答，怎麼讓學生感受到對角線對於四邊形的重要？為什麼在四邊形這個單元我們要談對角線性質呢？



10. 圓的大小是從哪裡看呢？是半徑還是直徑？  
我們講口徑、蛋糕的大小都是用什麼來講呢？
11. 在國小的教材中，圓周率是透過量直徑長和圓周長之後，計算圓周長是直徑長的3點多倍得知的。圓周率想表達的是什麼？
12. 不論是切比薩或蛋糕，我們通常都會想要切過圓心，其實我們真正想做的是什麼？這樣的想法經常用在哪裡？學習扇形這個單元的核心是什麼呢？



## 二、核心概念

1. 幾何的核心本質

2. 垂直

3. 平行

4. 歐基里德平面的幾何性質

5. 多邊形

6. 圓

7. 扇形

## 三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

|            |  |
|------------|--|
| 幾何<br>核心本質 |  |
| 垂直         |  |
| 平行         |  |

|            |  |
|------------|--|
| 歐基里德<br>平面 |  |
| 多邊形        |  |
| 圓          |  |
| 扇形         |  |

#### 四、觀摩、討論與修改

##### 1. 參考影片

-  [數學新世界-CA 談數學-20180521 臺東縣初鹿國中 圓 平面幾何 立體幾何](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-歐基里德的內角與外角 20180330 \(湖北武漢觀摩課\)](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-圓周率與圓面積 20171016 \(臺東縣大南國小\) PART1](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-尺規作圖 20170405 \(屏東生根鶴聲國中\) PART1](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-尺規作圖 20170405 \(屏東生根鶴聲國中\) PART2](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-20161028 僑孝小五 平面圖形-平行四邊形 part1](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-20161028 僑孝小五 平面圖形-平行四邊形 part2](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-20160930 僑孝小五 平面圖形-多邊形內角和 part1](#)
-  [數學新世界-CA 談數學-20160930 僑孝小五 平面圖形-多邊形內角和 part2](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

## 五、概念發展學習單

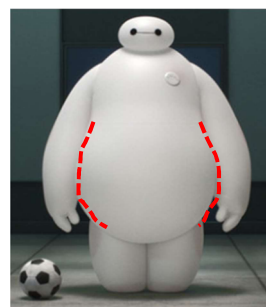
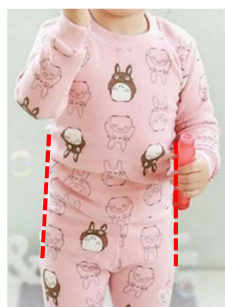
完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

### ◎概念三：平面圖形

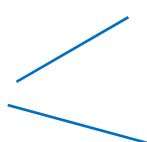
我們的臉是「平面」的嗎？為什麼面膜需要將邊邊剪開呢？



再看一看下面三種不同的腰身，不同的身形有不同的曲線，本來是直直的腰，吃胖一點肚子就會變成像球一樣，如果瘦身有成就可以有窈窕曲線！我們用一張紙試著模擬身形，哪個身形可以被紙張做出來，哪個不可以呢？有沒有感覺，將兩條平行線貼在這三種身形時，會有不同的變化？國小、國中所討論的平面圖形，都是被畫在和紙張一樣的平面上！



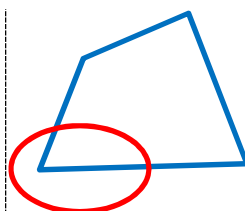
看看下方的圖，想一想：



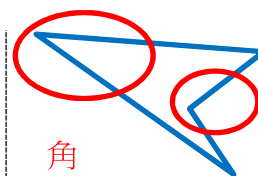
2 個邊可以圍成封閉圖形嗎？



3 個邊可以圍成封閉圖形嗎？



這個四邊形沒有凹陷

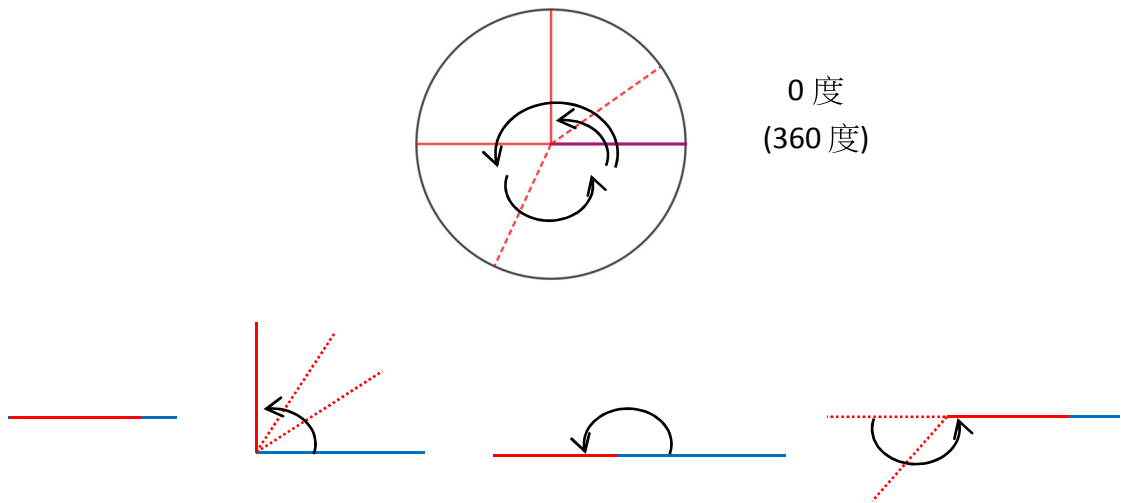


這個四邊形有凹陷

給兩個邊（直線線段）不能圍成一個封閉的圖形，至少需要三個邊才可以，所以「多邊形」指的是三個邊以上所圍成的封閉圖形，而有的是凸的多邊形，有的則是凹的多邊形。

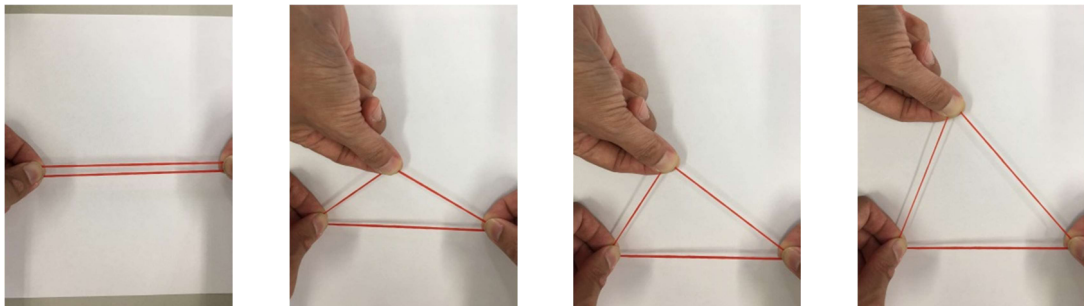
在多邊形中，任意兩個邊會構成像牛角、羊角一樣尖尖的形，這樣的形在數學上我們也稱作「角」。我們將一個圓分成 360 格，因此

角可以被度量，從 0 度到 360 度；兩個邊自重合開展到「擺正」，然後到「放平」，再持續擴大直到重合繞了一圈為止，周而復始。



### 動動筆想數學

- 請拿出一條橡皮筋，先拉成圖①，然後慢慢拉動其中一邊，分別可以拉出不同的三角形，如圖②③④。在拉動橡皮筋的時候，可以感覺到橡皮筋的長度從原來的長度被拉的更長了。

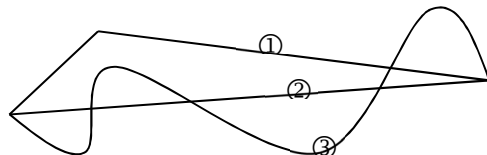


你是否能從這個三角形的形成操作中，看到三角形的兩邊和會比第 3 個邊長嗎？

☐ 是 ☐ 否

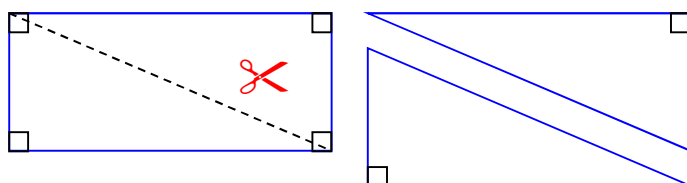
- 從 A 往 B 走，如果選擇一條最短的路徑走，是哪一條呢？

☐ ① ☐ ② ☐ ③

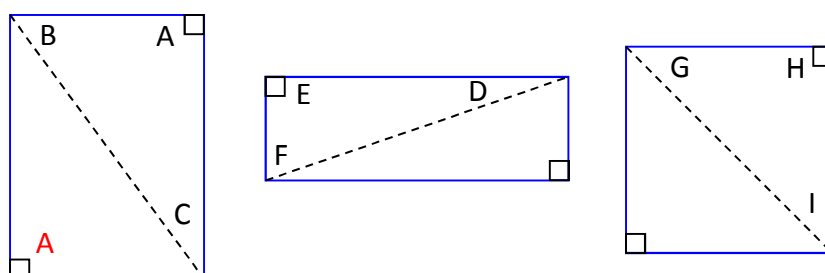


- 動手做一做：請拿出一張矩形的紙張，沿著矩形的其中一條對角線剪開，可以剪出兩個直角三角形，把這兩個直角三角形拿來疊疊看，可不可以完全重疊呢？是不是一模一樣呢？

(矩形：四個角都是直角的四邊形，也就是規規矩矩的四邊形，所以矩形包含正方形和長方形)



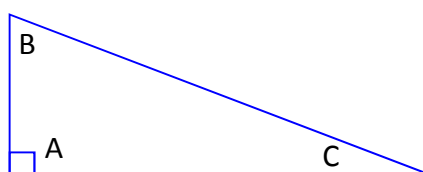
- (1) 請在同一個矩形中，標示出與角 A、B、C、...、H、I 一樣大的角 (使用相同符號)。



- (2) 仔細觀察上面的圖形，請問編號 B 和 C 的角度相加會是幾度呢？  
 編號 D 和 F 相加是幾度呢？  
 編號 G 和 I 相加是幾度呢？

4. 如圖，有一個直角三角形 ABC，試回答下列問題：

- (1)  $\angle B + \angle C$  會是幾度呢？  
 請寫下你的理由。

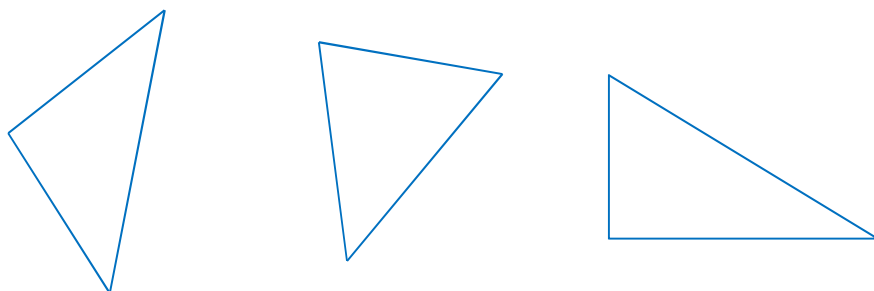


- (2) 直角三角形內角和  $\angle A + \angle B + \angle C$  是幾度呢？

5. 下面有一些三角形，請你試著把各個三角形切成 2 個直角三角形；接著，在空格內隨意畫一個三角形，也試著切成兩個直角三角形。你覺得各式各樣的三角形都可以切成 2 個直角三角形嗎？

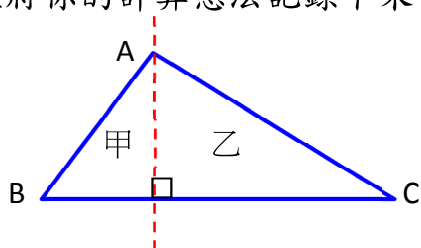
☐ 都可以 ☐ 有的不可以

有沒有不能切成 2 個直角三角形的三角形呢？ ☐ 有 ☐ 沒有



自己再畫一個三角形  
切切看！

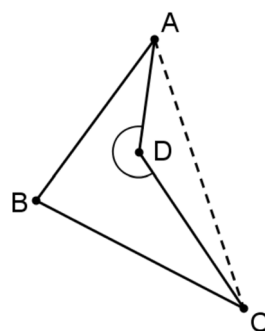
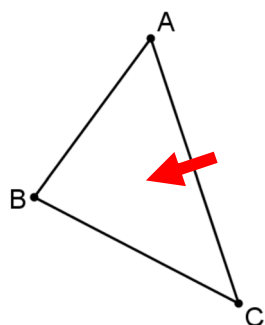
6. 我們將下方這個三角形，切成兩個直角三形（甲和乙），請試著利用這兩個直角三角形，計算出三角形 ABC 的三個內角和是幾度？並將你的計算想法記錄下來。



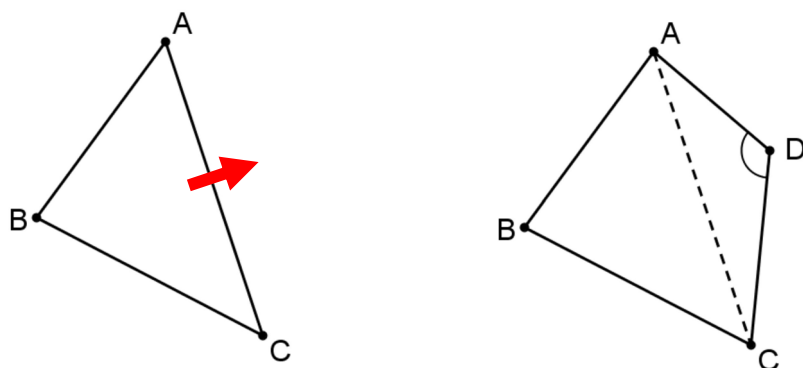
- ★將矩形從對角線切開，可以切出兩個一樣的直角三角形；矩形的四個角是直角，所以直角三角形的三個角的和是 \_\_\_\_\_ 度。  
任意（哪一個都好）的三角形，都可以被切成 2 個直角三角形。

7. 請拿一條橡皮筋把它撐出一個三角形，進行下面的實驗，同時觀察角度有什麼變化。

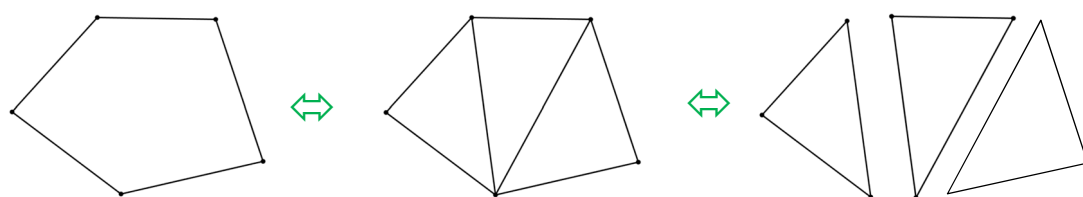
任選一邊，往三角形內部拉，形成凹四邊形



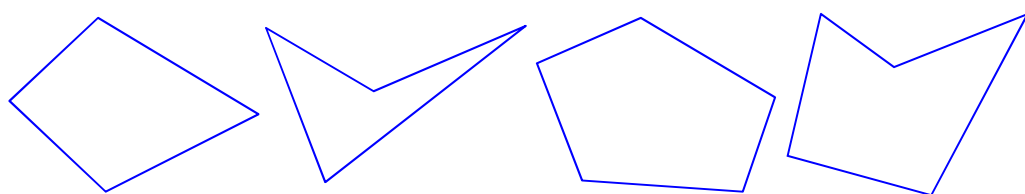
任選一邊，往三角形外面拉，形成凸四邊形



8. 請拿一條橡皮筋把它撐出一個四邊形，試著拉動其中一邊，讓它形成一個凹五邊形或凸五邊形。
9. 一個矩形可以從對角線 **切** 成 2 個直角三角形，這 2 個直角三角形也可以 **拼** 回去變成矩形，就像下面的五邊形可以切成一些三角形，一個一個切下來，也可以一個一個拼回去。



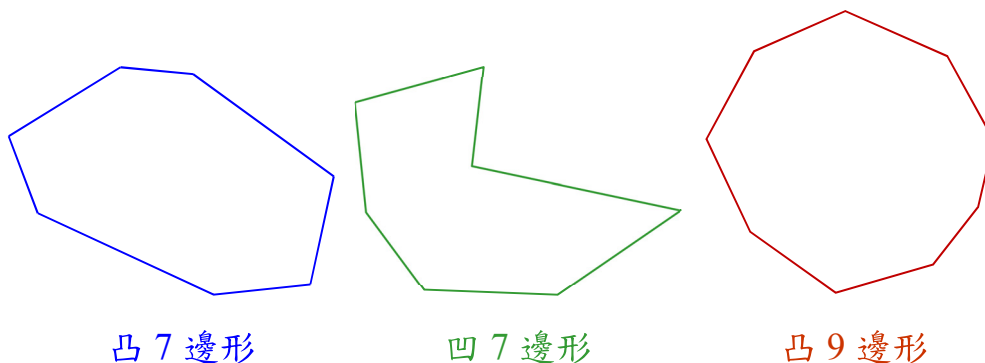
- (1) 請將下面的多邊形切成一些三角形，盡可能用不同的方式切切看。



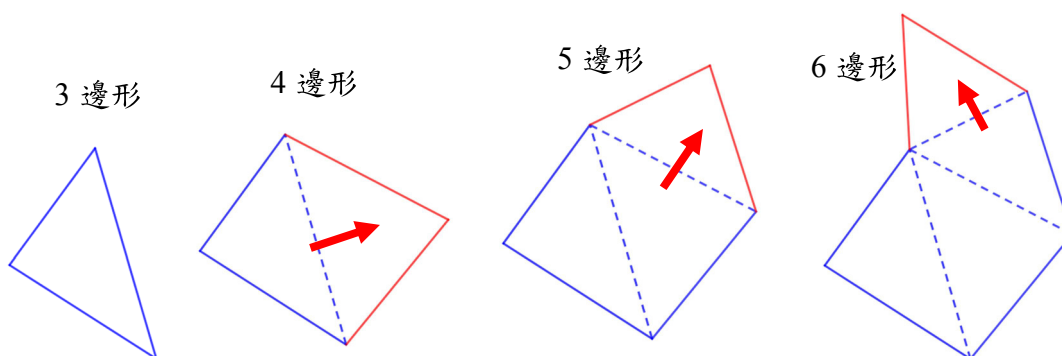
- (2) 請利用三角形內角和  $180^\circ$  計算出四邊形和五邊形的內角和。



(3) 請計算下面這三個多邊形的內角和。



(4) 我們來觀察，當 3 邊形其中一邊往外拉，增加為 4 邊，再往外拉增為 5 邊、..更多邊形時，它的邊數和三角形的個數關係。



| ? 邊形   | 3 | 4     | 5     | 6     | 7 | 100 | n |
|--------|---|-------|-------|-------|---|-----|---|
| 邊數     | 3 | 3-1+2 | 4-1+2 | 5-1+2 |   |     |   |
| 三角形的個數 | 1 | 2     | 3     |       |   |     |   |

測試一下，你目前使用的課桌有沒有搖晃呢？如果有，是什麼原因呢？有時候我們為了使桌子不搖晃的做法是在桌腳墊張紙，這樣的做法是想調整什麼呢？再看看右邊抬擔架的圖片，怎麼抬才能讓患者感到最舒適呢？



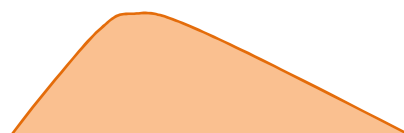


## 動動筆想數學

1. 請看下圖，如果左右兩邊的樓梯階數相同但陡度不同的樓梯，那麼，從左邊樓梯爬 6 階跟從右邊樓梯爬 6 階，所上升的高度會一樣嗎？



2. 如右圖，如果山的左側和右側都有階梯，且階數都相同，那麼，如果從左側上山 200 階和右側上山 200 階，所到達的高度會一樣嗎？



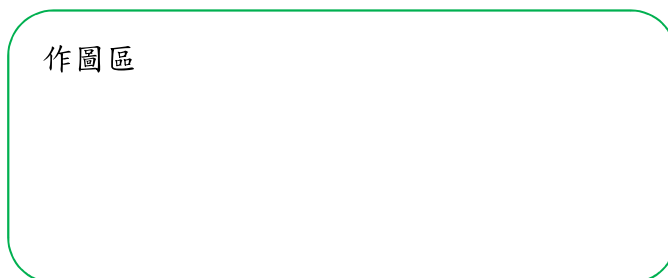
3. 左圖和右圖中兩條粗黑的直線有沒有互相平行？你是怎麼判斷的？



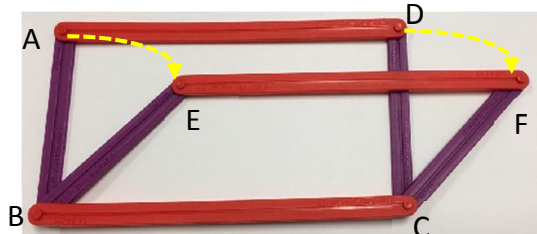
4. 請將第 3 題沒有互相平行的直線調整成可以互相平行，請直接畫在圖形上。
5. 下方有 2 個線段，請你再增加 2 個線段，讓這 4 個線段可以形成一個平行四邊形並畫出來。(可用顏色區分原來的和你自己加的線段，或者使用扣條實際操作)



作圖區



6. 我們利用 4 根扣條組成一長方形 ABCD，ABCD 四個頂點都是可以轉動的軸心，如果我們將長方形 ABCD 連動成四邊形 EBCF：



- (1) 請問四邊形 EBCF 是平行四邊形嗎？為什麼呢？

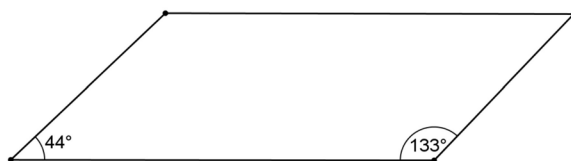
- (2) 請觀察並寫下，從長方形 ABCD 轉動變成四邊形 EBCF 的過程中，有哪些是不變的？有哪些地方變了？  
(可能是角、邊、面積…等)

- (3) 如果  $\angle ABE = 47^\circ$ ，請問  $\angle EBC$ 、 $\angle DCF$  各是幾度？

- (4) 如果  $\angle ABE = 47^\circ$ ，請問  $\angle BCF$  是幾度？

- (5) 你可以看出  $\angle ABE$  和  $\angle BCF$  這兩個角的角度關係嗎？請寫出它們的關係。

7. 右邊這個四邊形是平行四邊形嗎？為什麼呢？

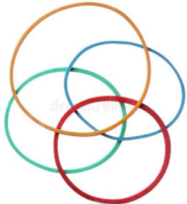


- ★(1) 兩條直線平不平行，是怎麼判斷的呢？ \_\_\_\_\_  
(2) 平行四邊形的特徵有哪些呢？ \_\_\_\_\_

## ◎概念一：圓

### 動動筆想數學

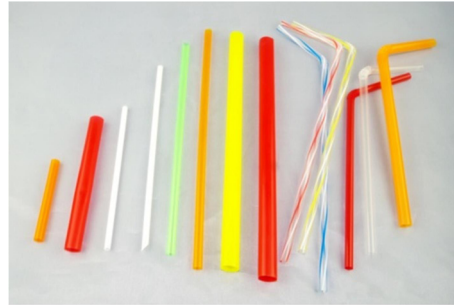
1. 圓是具有什麼特徵的形狀呢？它的特徵可以用在什麼地方呢？
2. 如果不使用圓規和有圓形的器具，我們還可以用什麼工具來畫圓？請勾選你覺得可以拿來畫圓的工具。

|                                                                                                                 |                                                                                                                 |                                                                                                                  |                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <br><input type="checkbox"/>   | <br><input type="checkbox"/>   | <br><input type="checkbox"/>   | <br><input type="checkbox"/>   |
| <br><input type="checkbox"/> | <br><input type="checkbox"/> | <br><input type="checkbox"/> | <br><input type="checkbox"/> |

3. 屏東小琉球有個烏鬼洞可以讓人鑽進去洞裏感受伸手不見五指的感覺，在還沒有進去之前，你會怎麼判斷自己可不可以進到洞裏呢？



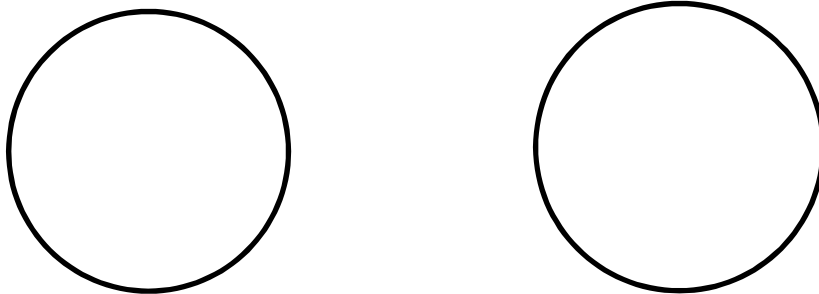
4. 哪一個水壺的瓶口出水量會比較大呢？  
如果喝珍珠奶茶想吸到波霸粉圓，是不是要用粗一點的吸管呢？



5. 下面有兩塊 Pizza，哪一塊比較大呢？  
我們可以量 Pizza 的哪個地方來比出它們的大小呢？



底下這兩個圓，哪一個比較大？可以比哪裏呢？



- ★從直觀來看，圓的大小可以比較圓的 \_\_\_\_\_ 。
- 若圓愈大它的圓周長也愈長，所以，我們可以用單位圓的放大縮小得到任何圓的大小。



## 一、反思問題

1. 您對於對稱的直覺是什麼？您會怎麼解釋說明「對」和「稱」呢？
2. 對稱普遍地出現或者應用在我們的生活之中，您可以列舉幾個例子嗎？  
我們通常都利用對稱來完成什麼或達成什麼目的？
3. 線對稱圖形，將「對稱軸」當作摺線對摺，而軸線兩邊的圖形可完全的疊合。  
對摺的操作呼應了「軸」這個字，依此想一想，除了圖形的對稱，生活中的哪  
些事物也用到了線對稱的想法？例如：蓋印章。
4. 當我們看到一個圖形，我們是怎麼判斷它是不是對稱圖形，可以怎麼檢查呢？  
而我們又是如何繪製對稱圖形？只要掌握住什麼就可以輕鬆地完成繪製呢？
5. 國小國中都會學習線對稱圖形，小學著重在認識，國中著重在應用。在小學階  
段進行線對稱圖形的教學時，應該關注在哪些概念的養成，才能讓學生到國中  
的學習可以順利的使用幾何性質？（5-s-04 能認識線對稱與簡單平面圖形的線  
對稱性質。8-s-06 能理解線對稱的意義，以及能應用到理解平面圖形的幾何性  
質。）
6. 左圖是這塊布的一小部分，右圖是一整塊布；當在教對稱圖形時，除了對稱圖  
形的繪製與判別、對稱軸的條數，我們還可以談什麼呢？在理解、辨識與判別  
之後，教對稱應該掌握什麼核心，使得之後的學習能感受到對稱的用處。



7. 您知道有一種對稱圖形是「螺旋對稱」嗎？如下圖。

對稱有原封不動 1 比 1 的對稱，也有以固定比率變動的對稱；不論是哪種形式的對稱，只要設定一個初始圖形，接著說清楚怎麼對稱以及幾次的對稱之後，我們就可以得到一個整體的圖形。



## 二、核心概念

1. 對稱

---

2. 對稱軸

---

3. 對稱圖形

---

4. 線對稱圖形

---

5. 點對稱圖形

---

## 三、概念發展脈絡

|    |  |
|----|--|
| 對稱 |  |
|----|--|

|           |  |
|-----------|--|
| 對稱軸       |  |
| 對稱圖形      |  |
| 線對稱<br>圖形 |  |
| 點對稱<br>圖形 |  |

#### 四、觀摩、討論與修改

##### 1. 參考影片

 [數學新世界--CA 談數學--20170317 僑孝國小 五年級 對稱圖形 PART 1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20170317 僑孝國小 五年級 對稱圖形 PART 2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20180412 彰師大 教材教法專題 對稱圖形（開始~06:20）](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。



## 五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

「對稱」的「對」和「稱」分別指的是什麼意思呢？我們把「對」解釋為你和我、彼此或者一對，而「稱」這個字有“恰合、適合、相當”的意思；秤東西是使秤達到平衡來看被秤的物件有多重，此時，左右兩邊的重量相當（一樣）。那麼，是不是只要是一對一對且一樣的圖形就算是「對稱圖形」呢？（此想法來自許瑜庭老師）



## 動動筆想數學

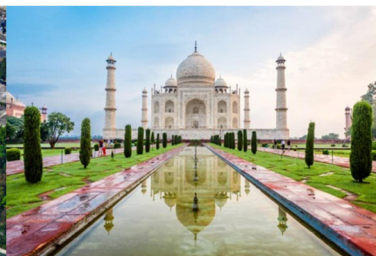
1. 底下的圖片有哪些讓你有「對稱」的感覺呢？請填○或×！



(   )



(   )



(   )



(   )



(   )

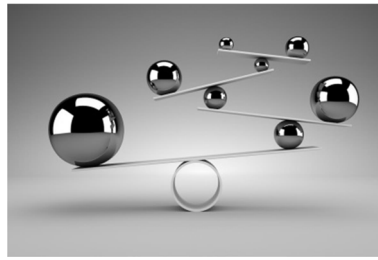


(   )





( )



( )



( )



( )



埃舍爾鑲嵌圖形

( )



( )

2. 看到印章上的圖案和蓋在紙上的圖案會一樣嗎？



印章上的圖案



紙上的圖案

☐ 會一樣

☐ 不會一樣

如果不一樣，是哪裡不一樣，為什麼會這樣呢？

3. 老師想蓋個優點章給學生，他挑選了一個印章看一看，然後，蓋在聯絡簿上！哪一個會是在聯絡簿上的圖案呢？

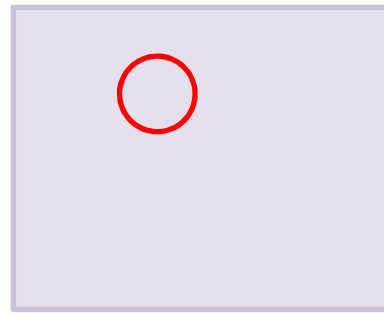


☐

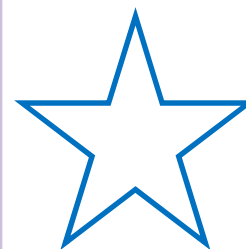
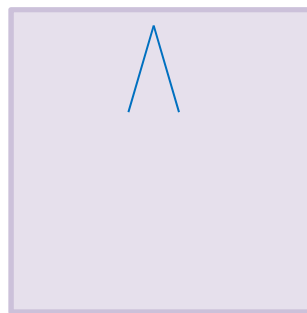


☐

4. 請在色紙的任何一處畫一個一模一樣的圓。接著，你可以用哪些方法讓這兩個圓疊合在一起呢？



5. 紙上已經畫了一個圖像，請把它複製成五角星，你是怎麼做的呢？  
請將你的方法記錄下來。



6. 請憑你的直覺連連看！



•

•

旋轉



•

•

翻轉



•

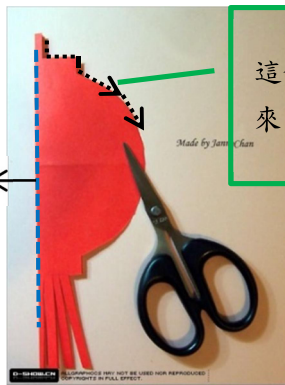
•

平移

以圖形來說，對稱圖形分為「線對稱圖形」和「點對稱圖形」。看看下面幾個漂亮的剪紙作品，它們都是將紙張對摺之後，再做裁剪的。在剪紙的過程中，你能不能想像完成後，它攤開來會是什麼圖形呢？一個圖形如果能找到至少一條翻轉的軸線，讓軸線兩邊的圖形完全的疊合，就是「線對稱圖形」。



對折的折線



這個剪紙作品，攤開來會是什麼圖形呢？

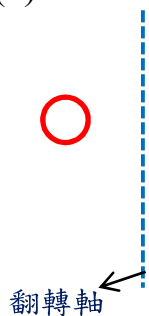
接著，看看風車的造型，是不是覺得風車不管怎麼轉，停下來之後，看起來都差不多一樣呢？下面各種風車的頁扇轉幾度之後，又會跟原本的圖片看起來一模一樣呢？如果一個圖形，繞著旋轉中心轉了180度之後，和原來的圖形能完全疊合，這樣的圖形就稱為「點對稱圖形」。



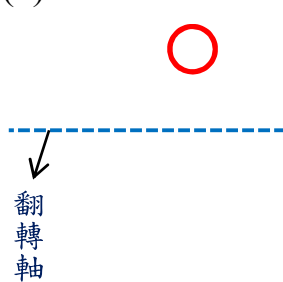
## 動動筆想數學

1. 下方各圖中都有一條對稱軸，請試著在對稱軸的另一邊畫出一模一樣的圖形。

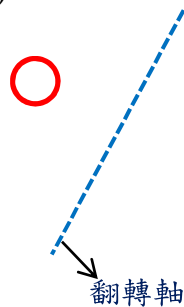
(1)



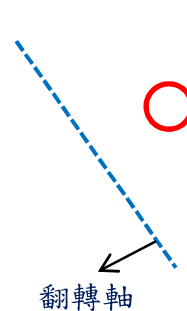
(2)



(3)

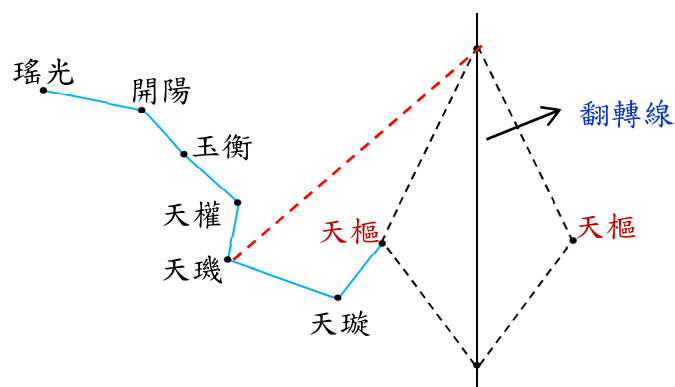


(4)

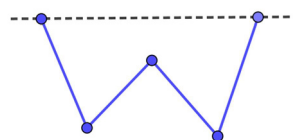
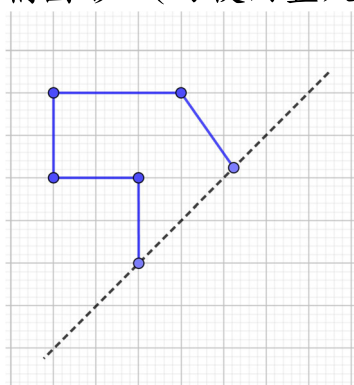
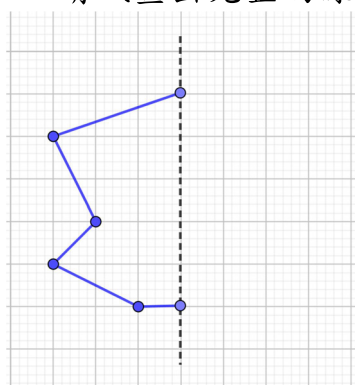


2. 我們想將左邊的北斗七星翻轉到右邊，你有沒有看到如何利用「鳶形」將「天樞」這顆星星翻轉過去，請你利用相同的方法將其他星星都翻轉到翻轉線的右邊，並將北斗七星連起來！

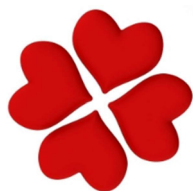
提示：鳶形就是兩個等腰三角形的合體。



3. 請試畫出完整的線對稱圖形。(可使用直尺或圓規)



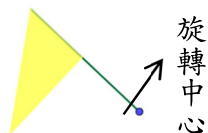
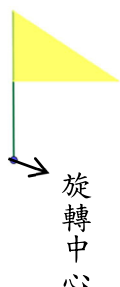
4. 下圖中左邊的 1 個愛心需做幾次的「翻轉複印」才可以變成右邊的 4 個愛心呢？請你試著畫畫看！記得把對稱軸畫出來。



5. 請將下方的圖形繞著旋轉中心，畫出旋轉 180 度之後的圖形。

順時針轉 180 度和逆時針轉 180 度會不會一樣呢？

☐ 會一樣      ☐ 不會一樣



6. 下列哪些圖形是線對稱圖形？哪些是點對稱圖形？

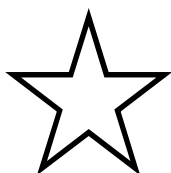
線對稱圖形：\_\_\_\_\_；點對稱圖形：\_\_\_\_\_。



①



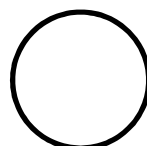
②



③



④



⑤



⑥

★ 對稱圖形，如果用一個四字成語來說明它的核心概念應該是

\_\_\_\_\_；對稱圖形有一種和諧、舒適的感覺，以及看到部分和整體的關係。





### 一、反思問題

1. 在日常生活中，我們常常會說：我比你高；妳比我快他比較瘦；今天的食慾比較好；這家賣的飲料跟那家賣的飲料相比，口味一樣，可是價錢差很多等等。這些句子中的比，就數學的方式是如何描述的？我們使用比這個字的時候，我們是想要說明什麼或表達什麼意涵？
2. 再思考一次，比是什麼？  
你會怎麼定義比，你是想要獲得什麼樣的性質才會使用比這個定義？
3. 在談比的時候，比的項目中，它們的單位要不要一樣呢？  
可以有項目是 0 的嗎？（甚麼時候可以？甚麼時候沒有意義？）
4. 在我們習慣的比當中，沒有等號的比是什麼意思？有等號的又是什麼意思？有等號的比當中，等號代表著什麼是相等的呢？有等號的比跟沒有等號的比我們是如何命名的呢？這樣的命名，背後的想法是什麼呢？
5. 課本講的比例式  $a:b=c:d$ ，這個比的相等是什麼關係的相等？什麼情形之下，我們會說  $4:6=4:5$ ？什麼情形之下，我們會說  $4:6=8:3$ ？以及什麼情況我們則會說  $4:6=8:12$ ？

6. 哪些例子可以用來談正比，而正比的相等指的是怎麼樣的項目關係？
7. 哪些例子可以用來談反比，而反比的相等指的是怎麼樣的項目關係？
8. 兩個相等的比，它的格式怎麼書寫比較好？由左至右還是上下並列？
9. 讓我們再想一想，什麼需求底下我們才會改變比例也就是計算比例？  
比如說，若已經知道一杯有點酸又不會太酸、有點甜又不會太甜的檸檬水的配方，什麼情況之下，我們會想要改變配方？什麼時候我們不改變配方但同時放大或縮小配方的各項目的比例？
10. 有一杯 500c.c 的檸檬水，這杯檸檬水的成份有 450c.c 的水、50c.c 的檸檬原汁以及 10c.c 的蜂蜜，這杯檸檬水的口味，其成份的比例可以寫成 45:5:1，簡化約分過的比例可以用來表示什麼？
11. 我們把比約成最簡的好處是什麼？「最簡整數比」的用意是什麼？在生活情境中，我們實際上所用的比都是最簡整數比嗎？
12. 「 $3:5 = \frac{3}{5}$ 」這樣寫對不對呢？如果不對，應該怎麼修正呢？
13. 課本對「比值」的定義為：前項除以後項所得到的值。比值用除法來看的道理是甚麼？後項除以前項不也是得到一個比值嗎？比值想要表示什麼意涵以及看到什麼關係？



14. 「比值」其實在生活中經常被使用，您能列舉幾個嗎？
15. 反比有比值嗎？如果反比有比值，那麼應該如何詮釋呢？
16. 正比有連比，那麼，反比有連比嗎？為什麼有或者沒有？
17. 如果 A 和 B 成反比、B 和 C 也成反比，A 和 B 會成正比嗎？  
什麼情況會？什麼情況不會？
18. 速率(100km/hr)、體積( $\text{cm}^3$ )、單價(30 元/公斤)、...等等，它們的“單位”透露什麼訊息？我們可以從單位得知構成單位的項目間其關係是什麼嗎？
19. 請列出學生學習這個單元常見的錯誤想法，我們可以怎麼說清楚來幫助學生澄清概念？例如：
- (1) 直接把比當作是實際的數來計算。
  - (2) 將「內項乘積等於外項乘積」類推到三數的連比為「內內、中中、外外」。
  - (3) 將「正比」想成兩數一起變大；將「反比」想成一數變大另一數變小。(提醒：正負號)

## 二、核心概念

1. 比

2. 比的相等

3. 比例

4. 比的虛與實

5. 最簡整數比

6. 比值

7. 單位

8. 正比

9. 反比

## 三、概念發展脈絡

|      |  |
|------|--|
| 比    |  |
| 比的相等 |  |

|           |  |
|-----------|--|
| 比例        |  |
| 比的<br>虛與實 |  |
| 最簡<br>整數比 |  |
| 比值        |  |
| 單位        |  |
| 正比        |  |
| 反比        |  |

#### 四、觀摩、討論與修改

##### 1. 參考影片

 [數學新世界-CA 談數學-20180425 臺北三民國中 機率、除法、比、比值](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20171112 雲嘉數咖共備 part2 比與比例](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20170915 高雄輔導團 part1 比、比例、比值 part1 \(20:00~1:148:30\)](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20170703 馬祖介壽國中 part1 比與比例](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20170703 馬祖介壽國中 part2 比與比例](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

## 五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

### ◎概念一：比

#### 動動筆想數學

- (1) 人的身材環肥燕瘦，我們可以用三圍來大概知道一個人的身材如何嗎？
- (2) 想要自己做一杯檸檬水消暑，你會準備哪些材料呢？
- (3) 想要在大窗戶的旁邊再做一個形狀一樣，大小要小一倍的窗戶，那麼尺寸要怎麼決定呢？
- (4) 跑得比較快？比較慢？這是怎麼比較的呢？



請列出可描述  
身材的項目



請列出檸檬水  
的材料



請列出決定一  
個矩形形狀的  
項目



請列出表示速  
率需要的項目

★當我們想談一件事情或標的時（例如：身材、口味、矩形、...等），我們會先把跟它相關的項目一一表列，這個項目的表列就是「比」。

2. 下列是一些比較，你有感覺到在比什麼嗎？

(1) 游泳比賽

(2) 網球比賽

(3) 分數

| Lane | Name             | Nationality   | Time  |
|------|------------------|---------------|-------|
| 4    | Sarah Sjöström   | Sweden        | 55.48 |
| 2    | Penny Oleksiak   | Canada        | 56.46 |
| 6    | Dana Vollmer     | United States | 56.63 |
| 8    | Chen Xinyi       | China         | 56.72 |
| 7    | Lu Ying          | China         | 56.76 |
| 3    | Rikako Ikee      | Japan         | 56.86 |
| 5    | Emma McKeon      | Australia     | 57.05 |
| 1    | Jeanette Ottesen | Denmark       | 57.17 |



(4) 高矮



(5) 腕力



(6) 魚商喊價



★競賽中的「比」(長度、時間、分數等)主要用來比出 \_\_\_\_\_。  
比數中的項目：甲方的數字、乙方的數字以及甲乙兩方數字的差，  
這種比我們在乎的是 \_\_\_\_\_；這種比允許 0 的出現，因為  
它代表沒差！這是一種加減法的一模一樣。

## ◎概念二：比例

### 動動筆想數學

1. 你喜歡喝什麼飲料呢？飲料店可以做出這麼多種的飲品任君挑選，  
這些琳瑯滿目的飲品它們是有什麼不同呢？



你喜歡喝奶茶嗎？為什麼在 A 家買的奶茶和 B 家買的奶茶，喝起來的口味會不會一樣呢？

雖然都是奶茶，它們是哪裡相同？哪裡又有所不同呢？

2. 我們來自製一杯屬於自己口味的奶茶：
- (1) 你會需要那些材料呢？請你列下來。
  - (2) 一杯 500c.c.的奶茶，各項材料配方需要多少的量呢？  
請寫下你的配方。

|    |  |  |  |  |  |
|----|--|--|--|--|--|
| 材料 |  |  |  |  |  |
| 份量 |  |  |  |  |  |

(3) 如果要做一大桶給全班喝，應該怎麼準備材料才能讓大家喝到口味和第(2)小題那一杯 500c.c.的奶茶是相同呢？

3. (1) 小明每天早上泡牛奶的方式都是將 500c.c.的熱水加上 4 匙的奶粉，如果我們想沖泡出一樣濃度的牛奶，那麼空格內應填入的數字是多少？

| 奶粉(匙)                                                                             | 熱水(c.c.) |
|-----------------------------------------------------------------------------------|----------|
|  | 500      |
| 2                                                                                 |          |
|                                                                                   | 1500     |
| 1                                                                                 |          |
| 6                                                                                 |          |



(2) 泡一大瓶牛奶，把它倒在不同大小的杯子，每個杯子內的牛奶的味道有改變嗎？☐有改變 ☐沒有改變 ☐無法判斷

(3) 把幾小杯濃度相同的牛奶集中倒進一個大瓶子，大瓶子內的牛奶和原本小杯的味道一樣嗎？

☐還是一樣 ☐不一樣 ☐無法判斷

(4) 如果我們不管要泡大杯還是小杯，都想要維持相同濃度的牛奶，當奶粉增量或減量時，熱水該怎麼調整？或者當熱水增量或減量時，奶粉該怎麼調整？

(5) 在這個例子中，我們為了維持相同濃度，以一開始奶粉和熱水 4：500 的 \_\_\_\_\_ 關係為對照，來調整奶粉和熱水所需的量。而且，我們可以觀察到，當奶粉增為  $k$  倍，熱水也跟著增為  $k$  倍，這樣的關係，我們即稱在濃度相同的情況下，奶粉的量和熱水的量成 \_\_\_\_\_。

奶粉(匙)：熱水(cc)

4：500



$k$  倍



4k：500k

奶粉的量是熱水的幾倍？

熱水的量是奶粉的幾倍？

★通常我們在意且需要計算的比是 \_\_\_\_\_ 關係的比；為了保持某個標的（口味、形狀、面積等）它的不變或者如何改變之下，而變動表現這個標的各個項目的份量。

★比例提供了一個對照，可以讓我們得知整體和彼此間的倍數關係。

### ◎概念三：比值

#### 動動筆想數學

1. 有一水果攤的甘蔗，老闆定價為 5 斤賣 120 元。

(1) 阿明只想買 3 斤，請問他應該付多少錢呢？\_\_\_\_\_ 元

(2) 小花身上有 200 元，請問她可以買多少甘蔗呢？\_\_\_\_\_ 斤

| 重量(斤) | 價格(元) |
|-------|-------|
| 5     | 120   |
| 3     |       |
|       | 200   |
| 1     |       |
|       | 1     |

2. 金莎巧克力 1 顆 45 克，下方表格的最上面是做成 1 顆金莎巧克力所需要的成份與份量。如果目前有充足的各項材料，但是只有 1 支湯匙可以用來取各項材料，我們怎麼用這支湯匙取到我們想要的份量，做出口味相同大小不同的金莎巧克力呢？

| 糖                                                                                      | 奶粉                                                                                     | 榛果                                                                                     | 可可                                                                                       |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 6g                                                                                     | 9g                                                                                     | 12g                                                                                    | 18g                                                                                      |
|                                                                                        |                                                                                        | 4×  |                                                                                          |
| 1×  |                                                                                        |                                                                                        |                                                                                          |
|                                                                                        | 1×  |                                                                                        |                                                                                          |
|                                                                                        |                                                                                        | 1×  |                                                                                          |
|                                                                                        |                                                                                        |                                                                                        | 1×  |



3. 以下的比都是「正比」關係，請試著在空格中填入正確的數字。

(1)

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad 7 \\ = & \quad 2 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 1 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 5 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 35 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 1 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 6 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad 3/4 \quad : \quad 5 \\ = & \quad 1/4 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 1 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 8 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 20 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 1 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 3 \end{aligned}$$

\*當我們把比寫成  $1:?$  或者  $?:1$  的時候，我們的用意是什麼？

\*  $1:?$  是以          為基準；  $?:1$  是以          為基準。

★比不一定是實際的值，將比約成最簡整數比的目的是         。

★藉由已知的比例可選擇以哪個項目為基準，轉換為單價的概念，使得項目間的換算更為簡易與方便。

★「比值」是以某個項目為基準（單價），來看其他項目會是多少。

## ◎概念四：正比與反比

### 動動筆想數學

1. 媽媽準備包水餃當作今天的晚餐：

(1) 媽媽先準備了內餡材料 1200 公克，心想：該包大顆一點還是小顆一點的？請幫忙計算各種包法所需的水餃皮數量和每顆內餡重量。

例如：每顆內餡 40 公克，水餃皮 30 片，  
則內餡總量為 1200 公克。



| 包法 | 水餃皮 (片) | 每顆內餡 (g) | 內餡總量 (g) |
|----|---------|----------|----------|
| A  |         | 30       | 1200     |
| B  | 80      |          | 1200     |
| C  |         | 15       | 1200     |

\*當內餡總量不變時，  
每顆內餡的重量增加，  
水餃皮的數量就要        。  
每顆內餡的重量減少，  
水餃皮的數量就要        。



- (2) 媽媽買了一袋 90 片的水餃皮，要把這些水餃皮包完。  
請幫忙計算各種包法所需的每顆內餡重量和內餡總量。

| 包法 | 水餃皮<br>(片) | 每顆內餡<br>(g) | 內餡總量<br>(g) |
|----|------------|-------------|-------------|
| A  | 90         | 30          |             |
| B  | 90         |             | 1800        |
| C  | 90         | 40          |             |

\*當水餃皮的數量不變時，  
每顆內餡的重量增加，  
內餡總重量就要\_\_\_\_\_。  
每顆內餡的重量減小，  
內餡總重量就要\_\_\_\_\_。

- (3) 媽媽打算包每顆內餡 12 公克的迷你一口水餃。  
請幫忙計算各種包法所需的水餃皮數量和內餡總量。

| 包法 | 水餃皮<br>(片) | 每顆內餡<br>(g) | 內餡總量<br>(g) |
|----|------------|-------------|-------------|
| A  | 50         | 12          |             |
| B  |            | 12          | 1200        |
| C  | 25         | 12          |             |

\*當每顆內餡的重量不變時，  
水餃皮的數量增加，內餡總重量就要\_\_\_\_\_。  
水餃皮的數量減少，內餡總重量就要\_\_\_\_\_。

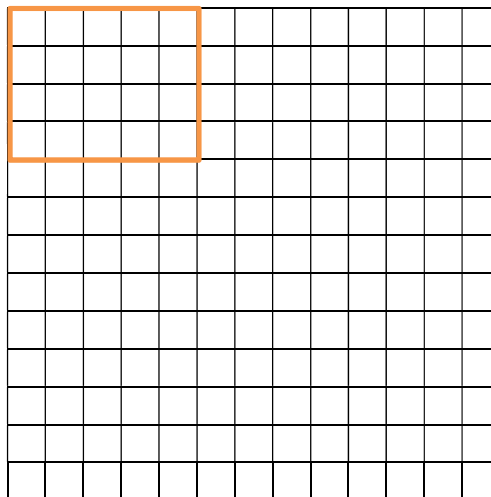
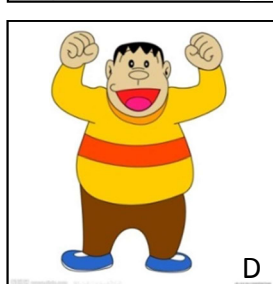
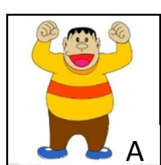
- (4) 我們可以從前面各題的作答，觀察到〈水餃皮數量〉、〈每顆內餡重量〉和〈內餡總重量〉三個項目間的關係：

- ① 當內餡總重量不變時，(水餃皮的數量)增為 3 倍，  
則(每顆內餡的重量)\_\_\_\_\_。
- ② 當水餃皮的數量不變時，(每顆內餡的重量)增為 3 倍，  
則(內餡的總重量)\_\_\_\_\_。
- ③ 當每顆內餡的重量不變時，(水餃皮的數量)增為 3 倍，  
則(內餡的總重量)\_\_\_\_\_。

★當項目確立後，根據每個不同項目的份量變化，我們就可以觀察特定的對象的變化了！

2. (1) 下面有四張胖虎的照片，B、C、D 哪一張是由 A 放大得到的？

請利用方格，畫出和下面形狀相同但大小不同的矩形。



- (2) 甲矩形實際的長、寬各是 20，乙矩形實際的長是 12、寬是 4。請在空格中填入適當的數字，能表現與甲、乙形狀相同但大小不同的矩形。

| 甲矩形     |   |       | 乙矩形     |   |       |
|---------|---|-------|---------|---|-------|
| 長       | : | 寬     | 長       | : | 寬     |
| 20      | : | 20    | 12      | : | 4     |
| = 40    | : | _____ | = 60    | : | _____ |
| = _____ | : | 5     | = _____ | : | 2     |
| = 1     | : | _____ | = 96    | : | _____ |

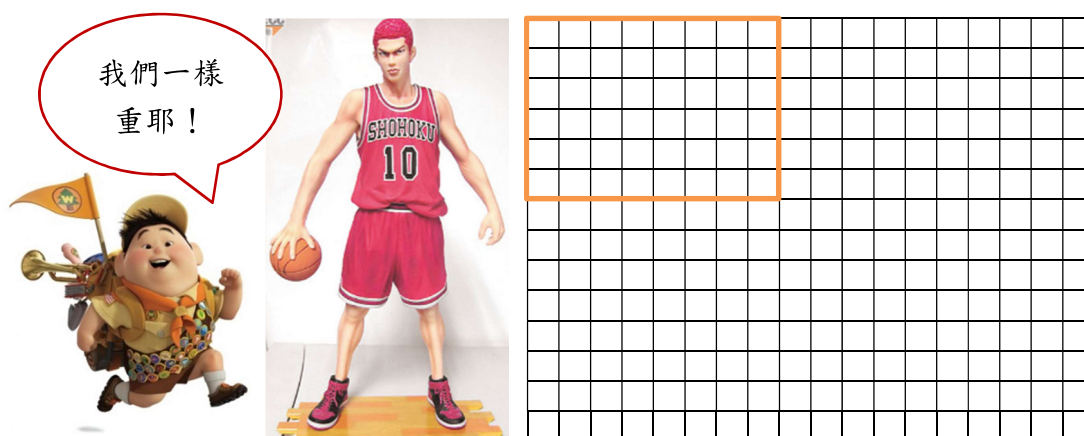
\*想想等號是什麼相等呢？

- (3) 說說看，矩形若先不論大小如何，想要保持形狀一樣，矩形的長和寬這兩個項目它們一組一組相等的比例，彼此之間有什麼關係呢？

若矩形的長變為 2 倍，則寬要變為\_\_\_\_\_；

若矩形的長變為  $\frac{1}{2}$  倍，則寬要變為\_\_\_\_\_。

3. (1) 請利用方格，畫出和下列長方形面積一樣的矩形。



(2) 已經知道甲矩形和乙矩形的面積各是 400 和 48，請在空格中填入適當的數字，這些數字可以表現出和甲矩形與乙矩形，相同面積的矩形。

| 甲矩形   |   |       | 乙矩形   |   |       |
|-------|---|-------|-------|---|-------|
| 長     |   | 寬     | 長     |   | 寬     |
| 20    | : | 20    | 12    | : |       |
| = 40  | : | _____ | = 60  | : | _____ |
| =     | : | 5     | =     | : | 2     |
| _____ | : |       | _____ | : |       |
| = 1   | : | _____ | = 96  | : | _____ |

\*想想等號是什麼相等呢？

(3) 說說看，矩形若想要保持面積一樣，矩形的長和寬這兩個項目它們一組一組相等的比例，彼此之間有什麼關係呢？  
 若矩形的長變為 2 倍，則寬要變為\_\_\_\_\_；  
 若矩形的長變為  $\frac{1}{2}$  倍，則寬要變為\_\_\_\_\_。

- ★當矩形的形狀不變，大小不同，長與寬的關係會是\_\_\_\_\_。
- ★當矩形的面積不變，形狀不同，長與寬的關係會是\_\_\_\_\_。

## ◎概念五：連比

### 動動筆想數學

1. 右邊的長方體，長是 4 公分、寬是 4 公分、高是 3 公分，體積則是 48 平方公分。

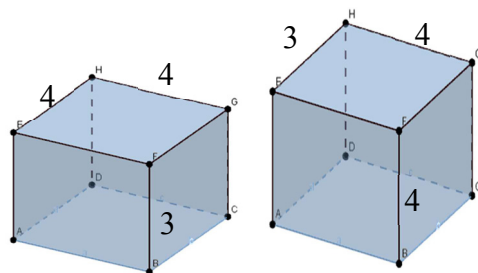
(1) 如果維持長方體的體積和高不變，我們調整它的長和寬，我們會說長和寬是哪一種關係呢？☐正比 ☐反比

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高}$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

$$48 = 8 \times \underline{\quad} \times 3$$

$$48 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times 3$$



- (2) 如果維持長方體的體積和長不變，我們調整它的寬和高，我們會說寬和高是哪一種關係呢？☐正比 ☐反比
- (3) 如果維持長方體的體積和寬不變，我們調整它的長和高，我們會說長和高是哪一種關係呢？☐正比 ☐反比

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高}$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

$$48 = 4 \times 2 \times \underline{\quad}$$

$$48 = 4 \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高}$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

$$48 = 2 \times 4 \times \underline{\quad}$$

$$48 = \underline{\quad} \times 4 \times \underline{\quad}$$

- (4) 下面這種說法對嗎？

當甲和乙成反比，而且乙和丙也成反比；這表示甲和丙會是正比關係。☐對 ☐錯

- (5) 下面這種說法對嗎？

當甲和乙成正比，而且乙和丙也成正比；這表示甲和丙會是正比關係。☐對 ☐錯

★連比的兩兩項目間，有可能是正比關係，也有可能是反比關係。

## ◎概念六：速率

### 動動筆想數學

1. (1) 甲跑了 400 公尺，乙跑了 300 公尺，所以甲跑的比乙還要快，這樣說對不對？☐對 ☐不對

理由：\_\_\_\_\_

- (2) 甲跑了 3 分鐘，乙跑了 1 分鐘，所以乙跑的比甲還要快，這樣說對不對？☐對 ☐不對

理由：\_\_\_\_\_

- (3) 要怎麼說才能比較出快和慢呢？

- (4) 請你比較下面甲、乙、丙三個人，他們的快慢。

|   | 距離(公尺) | 時間(秒) |
|---|--------|-------|
| 甲 | 400    | 50    |
| 乙 | 300    | 60    |
| 丙 | 500    | 40    |

最快的是☐甲 ☐乙 ☐丙

最慢的是☐甲 ☐乙 ☐丙

\*花多少時間可以跑多長的距離相比

- (5) 如果甲、乙、丙三個人跑步的快慢是相同的，請在空格填入他們跑的距離或時間。

|   | 距離(公尺) | 時間(秒) |
|---|--------|-------|
| 甲 | 400    | 20    |
| 乙 | 800    |       |
| 丙 |        | 10    |

速率是由距離和時間比出來的！

$$\text{速率} : \frac{400}{20} = \frac{800}{\quad} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{1}$$

⇒ 甲跑 400 公尺花了 20 秒

\*在填格子的時候，你有感覺到我們為了維持速率的相同，當距離增倍時，時間的變化是什麼嗎？

\*當速率相同，距離變為  $k$  倍，時間變為 \_\_\_\_\_ 倍。

(6) 如果甲、乙、丙三個人跑步的距離是相同的，請在空格填入他們跑的速率或時間。

|   | 速率(公尺/秒) | 時間(秒) |
|---|----------|-------|
| 甲 | 5        | 20    |
| 乙 | 10       |       |
| 丙 |          | 5     |

距離是由速率和時間計算出來的！

$$\text{距離} : 5 \times 20 = 10 \times ( ) = ( ) \times 5$$

⇒ 甲以 5 公尺/秒的速率，跑了 20 秒

- \*在填格子的時候，你有感覺到我們為了維持距離的相同，當速率增倍時，時間的變化什麼嗎？
- \*當距離相同，速率變為  $k$  倍，時間變為 \_\_\_\_\_ 倍。

(7) 如果甲、乙、丙三個人花一樣的時間跑步運動，請在空格填入他們跑的速率或距離。

|   | 速率(公尺/秒) | 距離(公尺) |
|---|----------|--------|
| 甲 | 5        | 100    |
| 乙 | 10       |        |
| 丙 |          | 10     |

時間是由速率和距離計算出來的！

$$\text{時間} \Rightarrow \frac{100}{5} = \frac{( )}{10} = \frac{10}{( )}$$

⇒ 甲以 5 公尺/秒的速率，跑了 100 公尺

- \*在填格子的時候，你有感覺到我們為了維持時間的相同，當速率增倍時，距離的變化是什麼嗎？
- \*當時間相同，速率變為  $k$  倍，距離變為 \_\_\_\_\_ 倍。

- ★兩個項目 ( $x$  和  $y$ ) 成正比，它們的關係是 \_\_\_\_\_。
- 兩個項目 ( $x$  和  $y$ ) 成反比，它們的關係是 \_\_\_\_\_。



# 數學新世界教師種子生根計畫-重要連結

生根計畫網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>



數學新世界 FB 社團

<https://www.facebook.com/groups/nhmath>

CA 行程表

<https://goo.gl/a6YNxW>



生根計畫官方 LINE

<https://line.me/R/ti/p/%40uje9883i>



Tel: 04-7232105 ext.3288

E-mail: [nhmath@nhmath.com](mailto:nhmath@nhmath.com)

Address: 彰化縣彰化市進德路 1 號數學系

## 概念發展脈絡範例:等量公理



主辦單位：教育部國民及學前教育署

承辦單位：國立彰化師範大學數學系

計畫電話：(04)7232105#3288

計畫信箱：nhmath@nhmath.com

計畫地址：500彰化市進德路1號數學系

計畫官網：<http://tw.newhorizonofmathematics.com>

數學新世界官網

