

屏東縣107學年度「數學生根教學」

國小鄉鎮教學共備人才培訓

## 學員手冊

09月13日 單元

---

怎樣解題

雞羊問題、年齡問題

怎樣解題

平均問題、間隔問題

等量公理

統計圖表

# 目錄

## 共備研習內容

|             |    |
|-------------|----|
| 一、怎樣解題..... | 1  |
| 二、等量公理..... | 13 |
| 三、統計圖表..... | 25 |



## 一、反思問題

1. Polya 怎樣解題有 4 個步驟：了解問題、擬定策略、執行計算和回顧驗算。這 4 個步驟對於老師而言很容易上手，因為老師已解過無數次類似的題目，但對學生而言，卻是初體驗，面對一個全新的問題，我們通常都會怎麼做？最難的部分在哪裡呢？
2. 解題的時候，老師通常都會列算式示範解題的步驟，尤其是老師總是能想出好方法，但是老師也總是困惑於學生明明都學會了，為何考題稍微改變，學生就沒辦法解題了，問題到底出在哪裡呢？
3. 我們試著來練習一下，想像自己是學生，第一次看到下面的題目，我們會先想到什麼呢？會提出什麼質疑呢？
  - (1) 【和差問題】文英和姐姐到觀光果園採橘子，姐姐採了 50 顆，文英採了 34 顆。姐姐要給文英幾顆，兩人的橘子才會一樣多？

Q1：為什麼是姐姐給文英橘子，而不是文英給姐姐呢？  
Q2：什麼是姐姐給文英橘子之前和之後不會改變的？  
Q3：想變成一樣多，代表現在不一樣多，不一樣多代表的意思是？  
Q4：試著使用方程式把解法寫下來，有沒有看到國中的等量公理呢？
  - (2) 【雞兔問題】廚神餐廳裡有 13 張桌子，共有 73 個座位。一張方桌有 4 個座位，一張圓桌有 7 個座位，餐廳有幾張方桌和圓桌？

Q1：餐廳裡只有方桌和圓桌嗎？  
Q2：73 個座位，每 7 個可以坐滿 1 個圓桌，總可以坐滿幾張圓桌呢？怎麼調整才可以讓每張方桌和圓桌都坐滿呢？  
Q3：如果有 10 張圓桌和 3 張方桌，共有幾個座位？拿 1 張圓桌換 1 張方桌會少掉幾個座位？要換幾張才會剛好有 73 個座位？  
Q4：如果餐廳空間夠大，把方桌全換成圓桌，可以多坐幾個人呢？每換 1 張桌子可以多幾個人？可以換幾張桌子？  
Q5：如果餐廳想讓客人有更寬敞的用餐空間，把圓桌全換成方桌，會少坐幾個人呢？每換 1 張桌子會少幾個人？可以換幾張桌子？  
Q6：試著使用方程式把解法寫下來，有沒有看到國中的加減消去法呢？

(3) 【年齡問題】爸爸今年 40 歲，喬婷今年 10 歲。當爸爸的年齡是喬婷的 3 倍時，喬婷是幾歲？

Q1：「當」代表的是過去、現在還是未來呢？

Q2：就爸爸和喬婷的年齡而言，有什麼是不會變的？有什麼是會變的？

Q3：今年爸爸的年齡是喬婷的幾倍？當兩人的年齡漸長，爸爸的年齡仍會和喬婷的齡保持倍數關係嗎？如果不會，關係會怎麼變化？

Q4：爸爸幾歲的時候生喬婷的呢？

Q5：喬婷 1 歲的時候，爸爸幾歲呢？這時候爸爸的年齡是喬婷的幾倍？

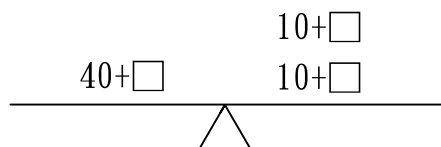
Q6：兩年後，爸爸的年齡是喬婷的幾倍？

Q7：一萬年後，爸爸的年齡大概會是喬婷的幾倍？

Q8：幾年後，爸爸的年齡會降到只剩下是喬婷的 2 倍？猜猜看！

Q9：承 Q6，我們用  $\square$  來代表幾年後， $(40+\square)=2\times(10+\square)$ ，那  $\square$  可以填入什麼數字呢？

Q10：承 Q7，把數字想成是人的重量，兩邊坐翹翹板會一樣重而保持平衡， $\square$  可以算出來嗎？



Q11：承 Q8，翹翹板兩邊一起拿掉什麼還是可以保持平衡呢？拿拿看！把過程畫出來，一步一步畫出來！

Q12：承 Q9，請你用一樣的方法，畫出幾年後爸爸的年齡會是喬婷的 3 倍？ $(40+\square)=3\times(10+\square)$

Q13：承 Q10，請你用一樣的方法，算出下面的  $\square$ 。



(4) 【速率問題】阿土面對距離 850 公尺的山壁大喊，5 秒後聽到回音，聲音在空氣中傳播的秒速是幾公尺？（註：聽到回音表示聲波已往返兩倍距離）

Q1：我們班有阿土嗎？我們班誰看起來比較像阿土啊？

Q2：5 秒鐘後聽到回音，這是什麼意思啊？

Q3：你覺得在哪種地方講比較會有回音啊？森林？山谷？布面？牆面？還是？

Q4：題目中有距離有時間，可以算速率，是誰在跑？人？聲音？還是？

Q5：聲音跑了多少的距離(聽到回音)？是 850 公尺？還是一來一回 850 公尺\*2？

Q6：聲音跑多快呢？請算出聲音的速率，你的單位會怎麼寫啊？

(5) 【追趕問題 1】昌明和怡如跑步的速率分別是 5.2 公尺／秒和 5.8 公尺／秒，他們從同一個起點起跑，怡如先讓昌明跑 10 秒後，才開始追昌明，幾秒後可以追上呢？

Q1：如果兩人一起跑，而且昌明和怡如跑步的速率一樣快，從昌明來看怡如，怡如是用每秒多少公尺的速率在離開昌明呢？

Q2：如果兩人一起跑，而且昌明和怡如跑步的速率分別是 5.2 公尺／秒和 5.8 公尺／秒，從昌明來看怡如，怡如是用每秒多少公尺的速率在離開昌明呢？

Q3：如果怡如先讓昌明跑 10 秒後，才開始追昌明，怡如是用每秒多少公尺的速率在靠近昌明呢？怡如幾秒後可以追上昌明呢？

(6) 【追趕問題 2】甲車時速是 70 公里，乙車分速是 1.5 公里，兩車同時分別從相距 240 公里的兩地相向而行，幾小時後會相遇？

Q1：題目很無聊ㄟ，甲車用時速，乙車卻用分速，車子通常會用時速還是分速呢？

Q2：甲車和乙車他們用多少的速率在靠近？

Q3：如果甲車先用時速 70 公里往前開(學生示範往前走)，然後乙車用時速 90 公里追甲車(老師示範往前走)，請問乙車是用多少每小時多少公里的速率在靠近甲車？

Q4：老師和學生背對背，如果甲車先用時速 70 公里往前開(學生示範往前走)，然後乙車用時速 90 公里追甲車(老師示範往前走)，請問兩部車是用多少每小時多少公里的速率在離開？

Q5：老師和學生面對面(有一段距離)，如果甲車先用時速 70 公里往前開(學生示範往前走)，然後乙車用時速 90 公里追甲車(老師示範往前走)，請問兩部車是用多少每小時多少公里的速率在靠近？

Q6：回到原來的題目，兩車相距 240 公里，兩車每小時以多少公里的速率在靠近？多久後就會碰在一起呢？碰面的地方會比較靠近哪一台車的起點呢？

Q7：回到原來的題目，但是兩車同向前行，請問看起來會是甲車追乙車？還是乙車追甲車呢？每小時可以追(靠近)多少公里？幾小時後可以追上呢？

Q8：試著使用方程式把解法寫下來，有沒有看到國中的等量公理呢？

(7) 【流水問題】皇后號遊艇的靜水船速是 25 公里／時，它在一條流速 5 公里／時的河流中航行。皇后號從健康市逆流而上開到長生鎮，共花了 6 小時，健康市和長生鎮之間相距幾公里？皇后號從長生鎮返回健康市，要花多少小時？

Q1：不管是船速或是流速，速率是站在哪裡看出來的？

Q2：站在岸上看皇后號順流航行，會看到船速有多快？

Q3：站在岸上看皇后號逆流航行，會看到船速有多快？

(8) 【平均問題】艾莎的月考成績分別是數學 87 分、國語 85 分、社會 89 分、自然與生活科技 95 分，4 科的平均分數是多少？

Q1：我們常說，我平均每天可以賺 1000 元，我平均每周運動 3 小時，我們班數學段考成績平均 60 分，琉球國中學生身高平均 154 公分，班遊花費每人平均分攤 900 元...，試著舉例子來用用「平均」這個詞。

Q2：老師從東港開車到台中，車速一定有快有慢，但當我們問老師開車速率有多快的時候，你覺得老師會怎麼說呢？

Q3：甲車走第一段路的時速是 80 公里，走第二段路時速是 60 公里，我們可以說甲車走這兩段路的平均速率是  $(80+60)/2=70$  嗎？知道平均速率有什麼好處？

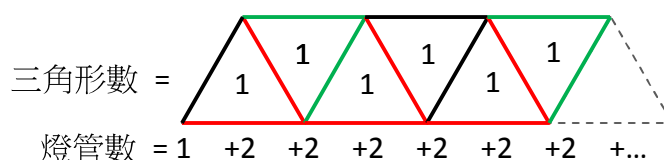
Q4：為什麼要考慮平均？把平均算出來有什麼好處？平均代表的意思？

(9) 【規律問題 1】跨年晚會的舞臺背景，用 LED 燈管排出相連的正三角形，如下圖。如果要排出 50 個相連的正三角形，共需要幾根燈管？

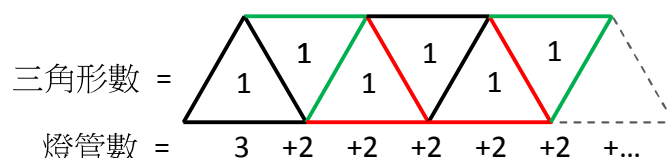


Q1：怎麼畫就怎麼寫就怎麼算，畫畫看，上面圖形你會怎麼畫呢？

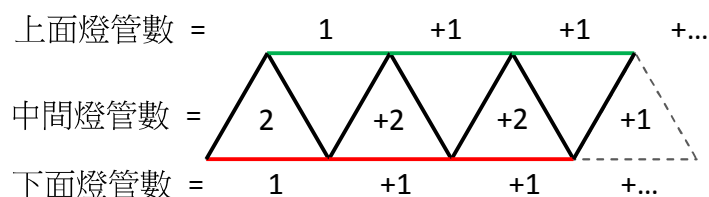
Q2：請利用下面這種畫法算出排出 50 個相連的正三角形需要幾根燈管呢？



Q3：請利用下面這種畫法算出排出 50 個相連的正三角形需要幾根燈管呢？



Q4：請利用下面這種畫法算出排出 50 個相連的正三角形需要幾根燈管呢？



Q5：你還有沒有別的畫法來算算看呢？哪一個方法比較好算呢？

(10) 【規律問題 2】排大會操隊形，8 個人可以排成每邊 3 個人的空心隊形，如果要排成每邊 35 個人的空心隊形，共需要幾個人？

Q1：什麼是大會操隊形啊？

Q2：右邊隊形有幾個人，你會怎麼點數呢？請把數字寫上去。

Q3：承 Q2 的算法，右邊的隊形你會怎麼排呢？

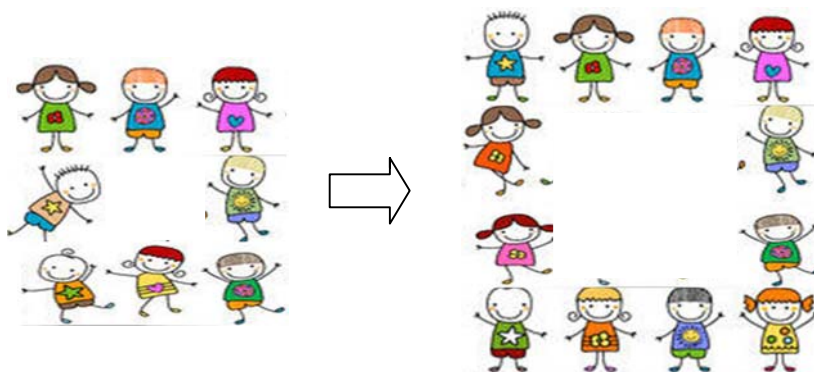
Q4：按照下面的排法，如果要排成每邊 35 個人的空心隊形，共需要幾個人呢？



Q5：Q4 的排法每次排的人數都不一樣多，比較不好算，怎麼調整排法可以變得比較好算呢？

Q6：如果總共有 75 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？

Q7：從每邊 3 人排成每邊 4 人，總共需要幾個人，你會怎麼算？

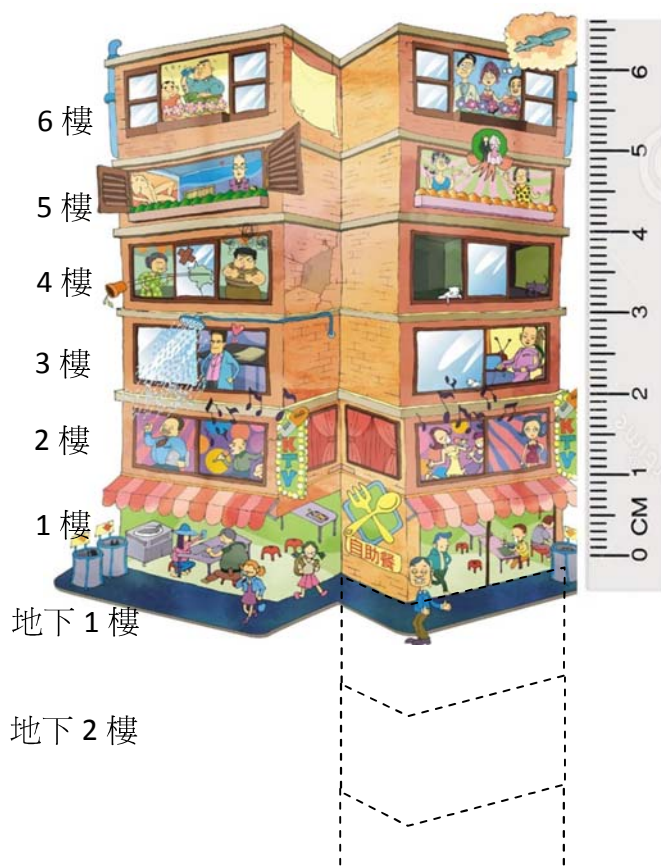


Q8: 承 Q7 的算法, 如果要排成每邊 35 個人的空心隊形, 共需要幾人呢?

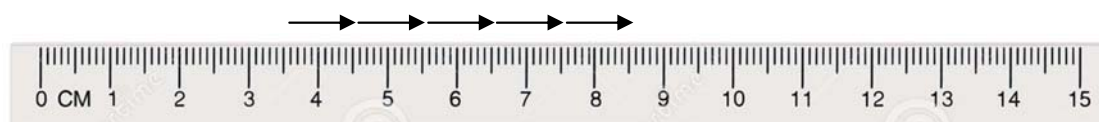
Q9: 承 Q7 的算法, 如果總共有 75 個人來排隊形, 每邊最多可排幾人呢?

(11) 【間隔問題】參加金馬獎的明星們盛裝打扮走在紅地毯上, 紅地毯的一旁擺了 80 個花籃, 花籃和花籃的間隔是 50 公分, 從第 54 個花籃到第 77 個花籃的距離有幾公分?

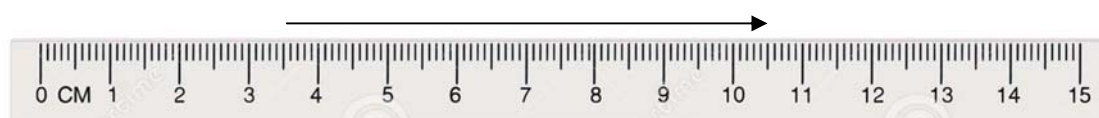
Q1: 樓層的 2F 標示在地板、牆壁還是天花板上, 才能表現整個樓層空間, 又符合我們使用直尺的習慣呢? 那地下 1F 又應該標示在哪裡呢? 有第 0 樓嗎?



Q2: 承 Q1, 從 3F 往上爬 5 層樓, 會到達第幾樓呢?



Q3: 承 Q1, 從 3F 往上爬到第 10 樓, 爬了幾層樓呢?

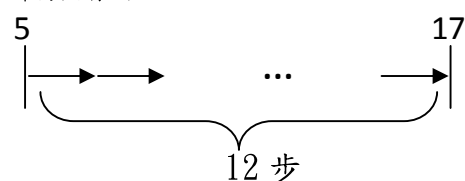


Q4：下面 5、17 和 12，這 3 個數字之間有什麼關係呢？

17 可以怎麼利用 5 和 12 算出來？

5 可以怎麼利用 17 和 12 算出來？

12 可以怎麼利用 5 和 17 算出來？



## 二、核心概念

### 1. 解題策略

---

### 2. 解題的教學

---

### 3. 九大問題的核心

(1)和差問題：

(2)雞兔同籠：

(3)年齡問題：

(4)速率問題：

(5)追趕問題：

(6)流水問題：

(7)平均問題：

(8)規律問題：

(9)間隔問題：

---

## 三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

|      |  |
|------|--|
| 解題策略 |  |
| 解題教學 |  |

#### 四、觀摩、討論與修改

##### 1. 參考影片

- [!\[\]\(ef9d0f80c5c0f7b4bed9fcc98d310922\_img.jpg\) 數學新世界--CA--如何解題 入班教學 小六 20180516 \(連江縣東引國小\) PART1 \(雞兔\)](#)
- [!\[\]\(999a5e3fc9b7a6ab64b477dbcd2c0571\_img.jpg\) 數學新世界--CA--如何解題 入班教學 小六 20180516 \(連江縣東引國小\) PART2\(雞兔+速率\)](#)
- [!\[\]\(4a22a098f67aa2577f972ec4d67f1799\_img.jpg\) 數學新世界--CA--議課 20180516 \(連江縣東引國小\)](#)
- [!\[\]\(cc98cec0bccb74dd8513e7d4ab71b1e8\_img.jpg\) 數學新世界--CA--年齡問題 入班教學 六年級 20180514 \(臺東縣大南國小\) PART1](#)
- [!\[\]\(387c11e31cceec9930b7807a52410275\_img.jpg\) 數學新世界--CA--年齡問題、雞兔同籠 入班教學 六年級 20180514 \(臺東縣大南國小\) PART2](#)
- [!\[\]\(1f423920fc07e0fbe8e50b3f7eed4a91\_img.jpg\) 數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 part1](#)
- [!\[\]\(c3b8a5ef82111ae9d4f0e144b2e9c8a8\_img.jpg\) 數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 part2](#)
- [!\[\]\(89f173b5cc7999ecda54177f7f9952af\_img.jpg\) 數學新世界--金旻、CA--數學生根教學國中領域教學共備人才培訓 體積、平均 20180208 \(雲林縣\) PART3 \(時間 48:53 談平均速率\)](#)
- [!\[\]\(3353e92b415d65d43d311dbc0945a813\_img.jpg\) 數學新世界--CA 談數學--20180503 國立彰化師範大學 數學科教材教法專題 求平均的目的](#)
- [!\[\]\(91e886065ba059ffd2c173363035bc91\_img.jpg\) 數學新世界--CA--六年級 怎樣解題 入班教學 20180312 \(臺東縣大南國小\) PART1 \(規律問題\)](#)
- [!\[\]\(513d71bf86f9594495f08a909423c76b\_img.jpg\) 數學新世界--CA--六年級 怎樣解題 入班教學 20180312 \(臺東縣大南國小\) PART2 \(規律問題\)](#)
- [!\[\]\(49cd588404fee65fff3745af684975ec\_img.jpg\) 數學新世界--CA--怎樣解題 教師研習 20180317 \(雲林縣\) PART2 \(前 9 分鐘\)](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。



## 五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

## ◎隊形問題

下圖是大會操的隊形的排法，要排成正方形中空の隊形。

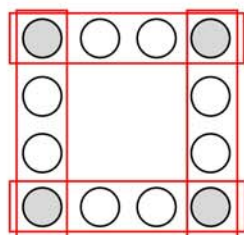
1. 右圖の隊形總共有幾個人呢？

除了用 1 個 1 個數出人數，  
還可以怎麼計算呢？



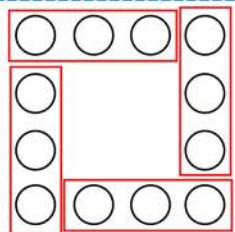
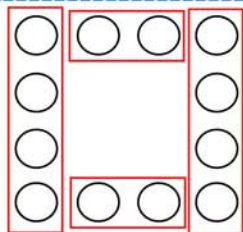
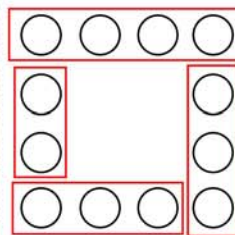
2. 為了要計算排出中空正方形所需要の人數，下面有 4 種畫圖方式，  
請寫下它的畫圖想法並列出算式。

第 1 種想法會有重複情形，其它 3 種畫圖的想法則不會重複。



想法：每邊排  
4 人，排出 4  
個邊，其中有  
4 人重複。

算式： $4 \times 4 - 4$



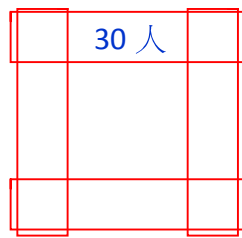
○ ○ ○ ○ 你還能夠想出其它的想法嗎？

○ ○ 把它畫出來！

○ ○ ○ ○

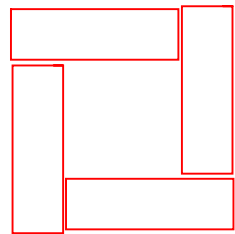
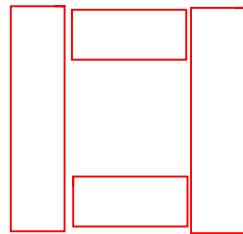
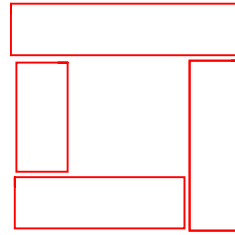
○ ○ ○ ○

3. 如果隊形是每邊排 30 人，請分別利用下面 4 種畫圖的想法，列出所需要人數的算式。

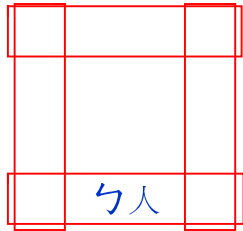


想法：每邊排 30 人，排出 4 個邊，其中有 4 人重複。

算式： $30 \times 4 - 4$

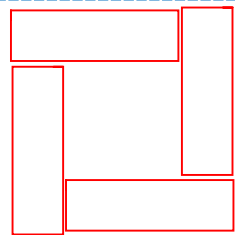
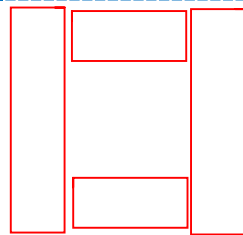
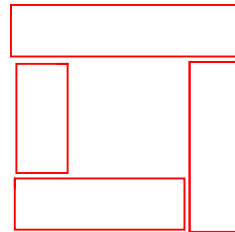


4. 如果隊形是每邊排 7 個人，請分別利用下面 4 種畫圖的想法，列出所需要的人數的算式。



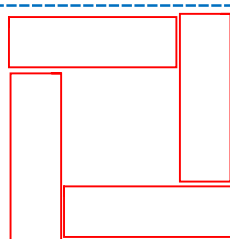
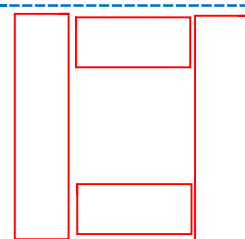
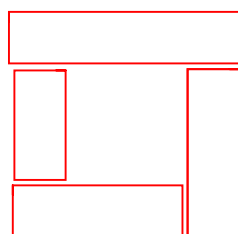
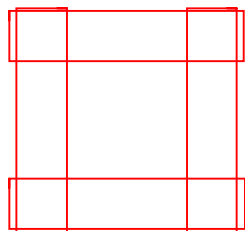
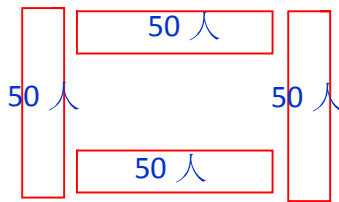
想法：每邊排 7 個人，排出 4 個邊，其中有 4 人重複。

算式： $7 \times 4 - 4$



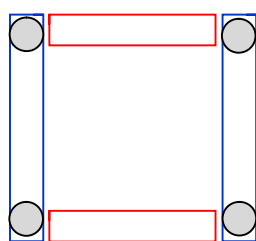
5. 如果總共有 200 個人要跳大會操，一樣是排中空正方形的隊形，則每邊最多可以排幾個人呢？我們也利用前面 4 種想法來求算。

提示：因為每個邊上的人都一樣多，因此，將 200 個人分成 4 組，估計每邊有 50 個人，可是如果每邊排 50 人，形成的中空形狀就不會是正方形，所以必須做一個調整。

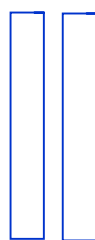


6. 如果總共有 75 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？

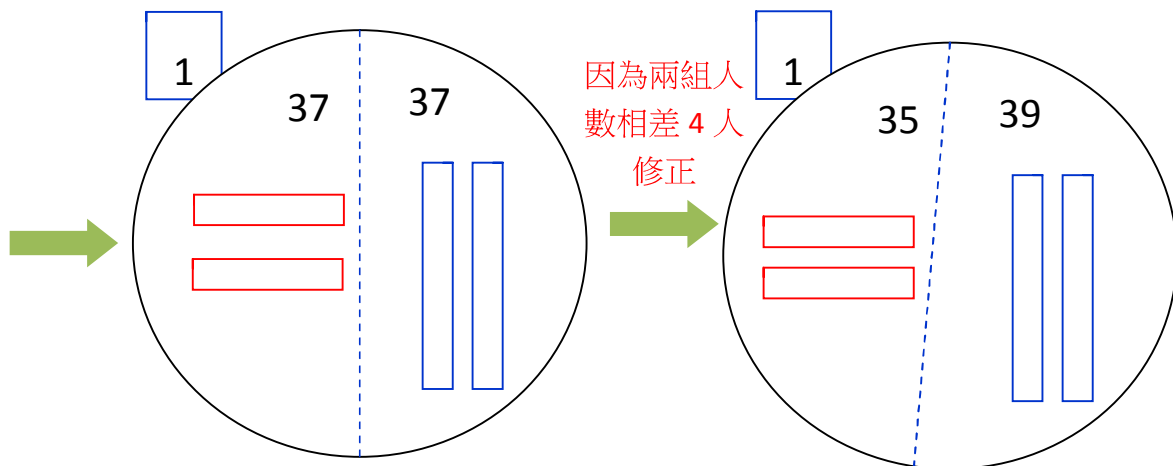
(1) 使用下面的圖形來思考

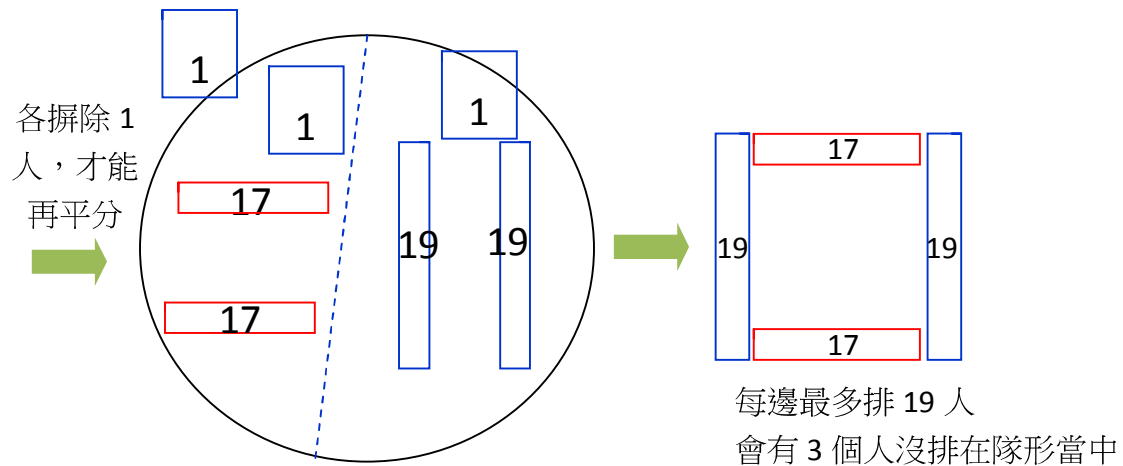


分成 2 組



75 人無法平分成 2 組  
先摒除 1 人  
剩 74 人平分成 2 組

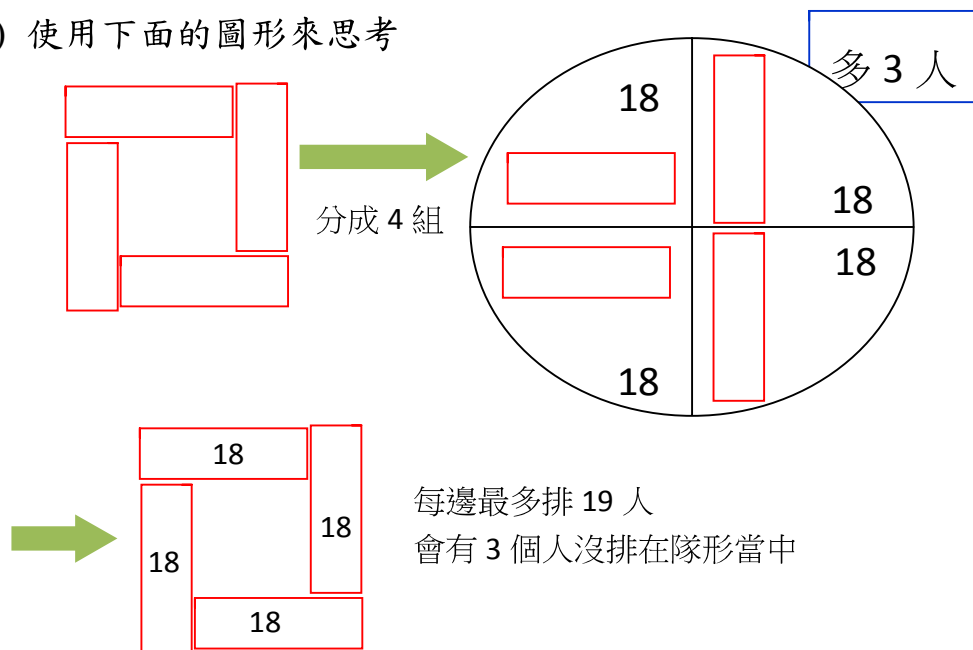




- (2) 如果總共有 53 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？  
(請模仿上面畫圖的想法求算)

7. 如果總共有 75 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？

- (1) 使用下面的圖形來思考



- (2) 如果總共有 53 個人來排隊形，每邊最多可以排幾個人呢？  
(請模仿上面畫圖的想法求算)

8. 請試著利用其它的想法，求算如果總共有 75 個人來排隊形，則每邊最多可以排幾個人呢？請詳細記錄你的想法。



### 一、反思提問

1. 小學學習等量公理只需要做單運算的解題 ( $2+x=5$ 、 $x-3=4$ 、 $2\times y=5$ 、 $y\div 3=4$ )，因此，學生在已經知道怎麼解題的情況下，被教導練習使用符號進行列式解題，目標是為國中一元一次方程式鋪路，但國中需要的能力是在真的未知的情況下利用已知求得未知 ( $3x+2=5-x$ )，小學在教導等量公理時，應該注重什麼概念的發展，才能讓學生順利銜接國中呢？
2. 請您求出方程式  $3x+2=5-x$  的解，請您仔細分析，您是怎麼完成解題的？在過程中，算式不斷地在改變，為什麼不會改變答案？ $x$  是一個未知數還是一個變數？
3. 國中一元一次方程式的教學，一般都會先介紹等量公理，然後再簡化為移項法則，其實不論是等量公理或是移項法則都是解題技巧的操作，如果不使用等量公理或移項法則的語詞，一樣進行解題的操作，我們可以使用什麼語詞更貼近學生小學的四則運算的想法？
4. 學生在解方程式  $3x+1=6$  的時候會算成  $x+1=2$ ，你知道學生在想什麼嗎？問題出在哪裡？怎麼協助學生？
5. 小學花了 6 年的時間都在學習數字四則運算的化簡，因此，對學生而言，等號就是不斷地往下寫，也就是說，學生只需要化簡等號左邊的運算，解方程式最難的地方在於要讓學生從只看等號左邊的運算到同時得看等號兩側的運算，這個訓練有機會從平常做起嗎？試著舉例說說看！

## 二、核心概念

### 1. 未知數

---

### 2. 關係式

---

### 3. 等量公理

---

## 三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

|      |  |
|------|--|
| 未知數  |  |
| 關係式  |  |
| 等量公理 |  |

## 四、觀摩、討論與修改

### 1. 參考影片

 [數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 PART1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161118 僑孝國小 六年級 速率 PART2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161209 僑孝國小 六年級等量公理 PART2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 PART 1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 PART 2](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 議課](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20160107 金湖國中 一元一次方程式 PART1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20160107 金湖國中 一元一次方程式 PART2](#)

### 2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

### 3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

## 五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

### ◎概念一：關係

#### 動動筆想數學

1. 今天早上曉華到 7-11 去買早餐...

(1) 發現口袋只剩下 5 元，請問曉華花了多少錢買早餐？

☐可以知道    ☐沒辦法知道

(2) 曉華買早餐前口袋有 100 元，請問曉華早餐花了多少錢呢？

☐可以知道    ☐沒辦法知道

(3) 曉華買早餐前口袋有 100 元，買完早餐後，發現口袋只剩下 5 元，請問曉華花了多少錢買早餐？

☐可以知道    ☐沒辦法知道

(4) 請將「口袋原有的錢」、「早餐的花費」和「口袋剩下的錢」這三個項目，填入空格中且符合彼此的關係。

|       |   |       |   |       |
|-------|---|-------|---|-------|
| _____ | - | 早餐的花費 | = | _____ |
| _____ | - | _____ | = | 早餐的花費 |
| 早餐的花費 | + | _____ | = | _____ |

2. 關於長方形...

(1) 一個長方形的寬有 7 公分，請問長方形的長有多長呢？

☐可以知道    ☐沒辦法知道

(2) 一個長方形的面積為 63 平方公分，請問長方形的長是多少？

☐可以知道    ☐沒辦法知道

(3) 一個長方形的面積為 63 平方公分，且它的寬為 7 公分，請問長方形的長是多少？☐可以知道    ☐沒辦法知道



- (4) 請將「長方形的長」、「長方形的寬」和「長方形的面積」這三個項目，填入空格中且符合彼此的關係。

$$\begin{array}{rcl} \text{長方形的長} & \times & \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \\ & \div & \text{長方形的長} = \underline{\hspace{2cm}} \\ \underline{\hspace{2cm}} & \div & \underline{\hspace{2cm}} = \text{長方形的長} \end{array}$$

3. 依據下面敘述，請在空格中填入最適當的關係符號： $=$ 、 $\neq$ 、 $>$ 、 $<$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 。

- (1) 曉華的身高還沒超越爸爸；曉華的身高 \_\_\_\_\_ 爸爸的身高。
- (2) 曉華的體重不到 50 公斤；曉華的體重 \_\_\_\_\_ 50 公斤。
- (3) 曉華的數學成績可以拉高班上平均；曉華的數學成績 \_\_\_\_\_ 班上平均分數。
- (4) 曉華的存款快要可以買 iPhone7 了；曉華的存款 \_\_\_\_\_ iPhone7 的價錢。

- ★ (1) 想求出不知道的數，必須利用關係符號和已經知道的數扯上 \_\_\_\_\_，寫出 \_\_\_\_\_。
- (2) 數學的關係符號： $=$ 、 $\neq$ 、 $>$ 、 $<$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 。

## ◎概念二：未知數

### 動動筆想數學

1. 請在空格中填入正確的數字，並將你的計算方式寫出來。

$$\begin{array}{llll} (1) & (2) & (3) & (4) \\ \square + 3 = 12 & \square - 3 = 12 & \square \times 3 = 12 & \square \div 3 = 12 \\ -3 & -3 & & \end{array}$$

某個數字加 3 後是 12，  
如果這個數不加 3 是多少？  
我們可以把 3 拿掉。

$$\begin{array}{llll} (5) & (6) & (7) & (8) \\ 7 + \square = 28 & 18 - \square = 3 & 7 \times \square = 28 & 18 \div \square = 3 \end{array}$$

|                      |                      |                          |                       |
|----------------------|----------------------|--------------------------|-----------------------|
| (9)                  | (10)                 | (11)                     | (12)                  |
| $32 + \square = 123$ | $123 - \square = 32$ | $3 \times \square = 234$ | $91 \div \square = 7$ |

2. 我們使用  $x$  來取代  $\square$ ，請計算出  $x$  所代表的數字，並將你的計算方式寫出來。

|              |              |                   |                 |
|--------------|--------------|-------------------|-----------------|
| (1)          | (2)          | (3)               | (4)             |
| $x + 3 = 12$ | $x - 3 = 12$ | $x \times 3 = 12$ | $x \div 3 = 12$ |

|              |              |                   |                 |
|--------------|--------------|-------------------|-----------------|
| (5)          | (6)          | (7)               | (8)             |
| $7 + x = 28$ | $18 - x = 3$ | $7 \times x = 28$ | $18 \div x = 3$ |

|                |                |                    |                 |
|----------------|----------------|--------------------|-----------------|
| (9)            | (10)           | (11)               | (12)            |
| $32 + x = 123$ | $123 - x = 32$ | $3 \times x = 234$ | $91 \div x = 7$ |

3. 每個束口袋中有數量相同的糖果，請計算出每一個束口袋中有多少顆的糖果。

(1)  + 2 = 26

$\Rightarrow$  3 個束口袋內的糖果數加 2 等於 26

$$x + x + x + 2 = 26$$

如果不要加 2 呢？把 2 拿掉！

 + 2 = 26

$\downarrow -2 \quad \downarrow -2$

 = 24

3 個束口袋內的糖果數是 24，

那麼，1 個束口袋內有多少顆糖果呢？

$$(2) \quad \begin{array}{c} \text{Red bag with tree} + \text{Red bag with tree} + \text{Red bag with tree} + 5 = \text{Red bag with tree} + 19 \\ x + x + x + 5 = x + 19 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} \text{Red bag with heart} + \text{Red bag with heart} + \text{Red bag with heart} - 5 = \text{Red bag with heart} + 19 \\ x + x + x - 5 = x + 19 \end{array}$$

$$(4) \quad x + x + x - 10 = x + 26$$

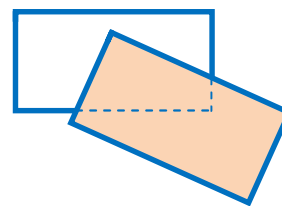
(5) 5 個  $x + 10 = 1$  個  $x + 26$ ，請計算出 1 個  $x$  是多少？

(6)  $5$  個  $x - 10 = 2$  個  $x + 26$ ，請計算出 1 個  $x$  是多少？

### ◎概念三：等量公理

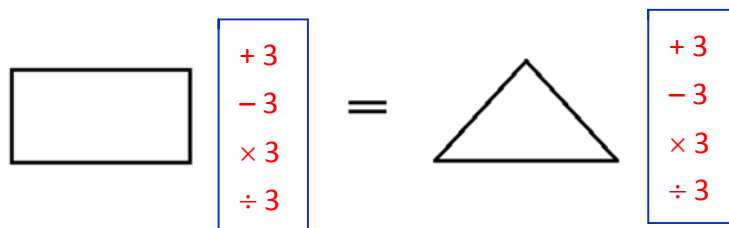
#### 動動筆想數學

1. 兩張一模一樣大小的紙張，一張是白色的，一張是淺綠色的，這兩張紙有一些部分是重疊的。請問沒有重疊到的白色紙張的部分和沒有重疊到的淺綠色紙張的部分，它們的面積會相等嗎？為什麼呢？



2. 大寶和小寶身上都沒有錢，媽媽各給大寶和小寶 200 元後，他們身上的錢會一樣多嗎？  
後來，大寶花了 70 元買了一個排骨便當，小寶花了 70 元買了一個雞腿便當，這時候他們身上的錢還是一樣多嗎？

3. 如果等號的兩邊是相等的（不管是什麼），我們在等號的兩邊同時做任意且相同的運算之後，它們還是會維持相等嗎？



4. 觀察圖片中的兩個算式，本來是  $10=8+2$  後來變成  $10-2=8$ ，本來是  $16=12+4$  後來變成  $16-4=12$ ；本來在右邊是「+」後來到左邊變成「-」，請你試著描述這個過程的道理是什麼。

5. 觀察下列算式，請問★和◇的關係是什麼？一個★是幾個◇？一個◇是幾個★？

$$\star + @ = \diamond + \diamond + @$$

6. 兩個漢堡的錢再加 2 元是 100 元，請你列一個有 “、2 和 100” 的等式，並算出一個漢堡的錢。

★等量公理是：我跟你一樣時，我做什麼你也跟著做什麼之後，一樣的關係不會改變。

換句話說，如果 A 和 B 是相等的，當 A 做一個運算，B 也做相同的運算之後，兩個結果仍是相等的。

## ◎概念四：列關係式求未知數

### 動動筆想數學

1. 安琪和雅琪合力栽種的稻米總共收成 $13\frac{1}{2}$ 公斤，安琪分到其中的 $\frac{4}{9}$ ，剩下的則都分給雅琪，請問雅琪可以分到多少公斤的稻米呢？

$$\begin{array}{ccc} \text{安琪} & + & \text{雅琪} = 13\frac{1}{2} \\ \uparrow & & \uparrow \\ 13\frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \underline{\hspace{2cm}} & = & 13\frac{1}{2} \end{array}$$

2. 曉華數學小考成績依序為 89、94、91，第 4 次必須考幾分，四次的平均才會是 92 分呢？

想法一：如果每次都考 92 分，平均就會是 92 分。

第一次 89 分  $\Rightarrow$  少 3 分

第二次 94 分  $\Rightarrow$  多 2 分

第三次 91 分  $\Rightarrow$  少 1 分

第四次 ? 分  $\Rightarrow$   多  少  
\_\_\_\_\_ 分

想法二：如果四次小考平均是 92 分，則四次小考的總分會是  $92 \times 4$  分。

$$\text{平均} = \frac{\text{總和}}{\text{個數}}$$

$$\Leftrightarrow \text{平均} \times \text{個數} = \text{總和}$$

$$89 + 94 + 91 + ? = 92 \times 4$$

3. 國王今年 41 歲，公主今年 11 歲，公主幾歲的時候，國王的年齡剛好是公主的 3 倍呢？

國王：  $\overline{\hspace{2cm}}$  41 ?

公主：  $\overline{\hspace{1cm}}$  11 ?

? 年後，

國王的年齡 = 公主的年齡  
的 3 倍

$$41 + \text{?} = (11 + \text{?}) \times 3$$

我們想求出  $41 + \text{?} = (11 + \text{?}) \times 3$  這個關係式中的 ? 是多少，想一想，我們可以如何從這個算式得到衍生的關係？

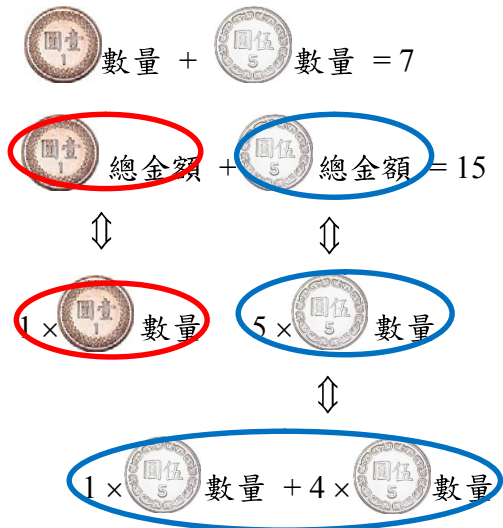
$\Rightarrow 41 + \text{?}$  是 11 的 3 倍與 ? 的 3 倍相加

$\Rightarrow 41 + \text{?}$  與  $11 + \text{?}$  的合，會是  $(11 + \text{?})$  的 4 倍

$\Rightarrow 41 + \text{?}$  與  $11 + \text{?}$  的差，會是  $(11 + \text{?})$  的 2 倍

4. 1 元硬幣和 5 元硬幣總共有 7 個，且總計有 15 元，請問 5 元硬幣有幾個？

從題目當中，我們可以知道...



如果我們將 1 元數量用  $\square$  表示

5 元數量用  $\triangle$  表示

我們可以將右邊的關係式寫成：

$$\square + \triangle = 7 \dots ①$$

$$1 \times \square + 5 \times \triangle = 15 \dots ②$$

②可以改寫成，

$$\frac{1 \times \square + 1 \times \triangle}{+ 4 \times \triangle} \Rightarrow 7$$

$$+ 4 \times \triangle = 15$$

將  $\triangle$  算出

$$7 + 4 \times \triangle = 15$$

$$4 \times \triangle = 15 - 7 = 8$$

$$\triangle = 8 \div 4 = 2$$

將  $\square$  算出， $\square + \triangle = 7$

$$\square + 2 = 7$$

$$\Rightarrow \square = 7 - 2 = 5$$

5. 快樂農場雞和兔子總共有 12 隻，且雞和兔子的腳總共有 34 隻，請問兔子有幾隻？

從題目當中，我們可以知道...

$$\begin{cases} \text{雞隻數量} + \text{兔子數量} = 12 \\ 2 \times \text{雞隻數量} + 4 \times \text{兔子數量} = 34 \end{cases}$$

⇕

$$\begin{aligned} 2 \times \text{雞隻數量} + 2 \times \text{兔子數量} &\Rightarrow 12 \times 2 \\ &+ 2 \times \text{兔子數量} = 34 \end{aligned}$$

所以， $12 \times 2 + 2 \times \text{兔子數量} = 34$

$$24 + 2 \times \text{兔子數量} = 34$$

$$2 \times \text{兔子數量} = 34 - 24 = 10$$

$$\text{兔子數量} = 10 \div 2 = 5$$

我們知道，雞隻數量 + 兔子數量 = 12；所以，雞隻數量 =  $12 - 5 = 7$

假設雞隻數量有  $\text{ㄐ}$  隻，兔子數量有  $\text{ㄊ}$  隻，那麼，左邊的關係式就可以寫成：

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 12 \\ 2 \times \underline{\hspace{2cm}} + 4 \times \underline{\hspace{2cm}} = 34 \end{cases}$$

請仿照左邊的過程，解出  $\text{ㄐ}$  和  $\text{ㄊ}$

6. 曉華買飲料，大杯和中杯總共買了 30 杯，大杯 1 杯 55 元，中杯 1 杯 45 元，總共花費 1470 元，請問大杯飲料有幾杯？

從題目當中，我們可以知道...

$$\begin{cases} \text{大杯數量} + \text{中杯數量} = 30 \\ 55 \times \text{大杯數量} + 45 \times \text{中杯數量} = 1470 \end{cases}$$

⇕

$$\begin{aligned} 45 \times \text{大杯數量} + 45 \times \text{中杯數量} &\Rightarrow 30 \times 45 \\ + 10 \times \text{大杯數量} &= 1470 \end{aligned}$$

所以， $30 \times 45 + 10 \times \text{大杯數量} = 1470$

$$1350 + 10 \times \text{大杯數量} = 1470$$

$$10 \times \text{大杯數量} = 1470 - 1350$$

$$10 \times \text{大杯數量} = 120$$

$$\text{大杯數量} = 120 \div 10$$

$$\text{大杯數量} = 12$$

我們知道，大杯數量 + 中杯數量 = 30；所以，中杯數量 =  $30 - 12 = 18$

假設大杯數量有  $\text{L}$  杯，中杯數量有  $\text{M}$  杯，那麼，左邊的關係式就可以寫成：

$$\begin{cases} \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 30 \\ 55 \times \underline{\hspace{2cm}} + 45 \times \underline{\hspace{2cm}} = 1470 \end{cases}$$

請仿照左邊的過程，解出  $\text{L}$  和  $\text{M}$

**\*換個算法再算一次**

1. 1 元硬幣和 5 元硬幣總共有 7 個，且總計有 15 元，請問 5 元硬幣有幾個？

想法：我們把「1 元硬幣和 5 元硬幣的總共有 7 個」的  換成  那麼，就變成 1 元有 7 個，可是因為「總計 15 元」，所以還差  $15 - 7 = 12$  元。

這個差額來自 5 元和 1 元的差，把  換回 ，每一次可補回 4 元，

$12 \div 4 = 3$ ，差 12 元則需換回 3 個 5 元，所以，5 元有 3 個，1 元有  $7 - 3 = 4$  個。

寫成算式： $1 \times 7 + 4 \times (\text{硬幣 5 元數量}) = 15$

2. 快樂農場雞和兔子總共有 12 隻，且雞和兔子的腳總共有 34 隻，請問兔子有幾隻？

想法：把兔子都當成雞，那麼 12 隻雞應該有 24 腳，可是「雞和兔子總共有 34 隻腳」，還差 10 隻腳，一隻兔子和一隻雞差 2 隻腳，所以，換回  $10 \div 2 = 5$  隻兔子，那麼，就可以知道雞有  $12 - 5 = 7$  隻。

寫成算式： $2 \times 12 + 2 \times (\text{兔子數量}) = 34$



3. 曉華買飲料，大杯和中杯總共買了 30 杯。若大杯 1 杯 55 元，中杯 1 杯 45 元，總共花費 1470 元，請問大杯飲料有幾杯？  
請試著寫下你的想法和算式。





## 一、反思問題

1. 當我們想了解某些現象或事情時，會開始蒐集相關資料，每一筆資料會有多少種訊息呢？我們是怎麼取決的呢？
2. 整理資料的程序有哪些？每個程序的目的是什麼呢？
3. 資料用表格一一列出與資料用圖形呈現的差別在哪？  
資料以表格呈現的好處是什麼？以圖形呈現的好處是什麼？
4. 想看這個和那個的關係時，我們會同時記錄這個和那個的資料。  
什麼情況我們會將資料繪製成長條圖？試舉個例子並說明長條圖的特性。  
什麼情況我們會將資料繪製成折線圖？試舉個例子並說明折線圖的特性。  
什麼情況我們會將資料繪製成圓形圖？試舉個例子並說明圓形圖的特性。
5. 哪一種圖可以用來看兩個項目的變化關係？這和國中的哪個單元相關呢？

## 二、核心概念

1. 統計

- 
2. 統計圖表
-

### 3. 折線圖與函數

---

#### 三、概念發展脈絡

請將每個概念就「認知」、「形成」、「使用」三個層面予以說明。

|            |  |
|------------|--|
| 統計         |  |
| 統計圖表       |  |
| 折線圖<br>與函數 |  |

#### 四、觀摩、討論與修改

##### 1. 參考影片

 [數學新世界--CA 談數學--20170512 僑孝國小 六年級 統計圖表 PART1](#)

 [數學新世界--CA 談數學--20170316 蘆洲國中 九年級 統計與機率 PART 1](#)

 [數學新世界--CA 談數學 20150422 賓茂國中 統計](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

## 五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

### ◎概念一：長條圖與折線圖

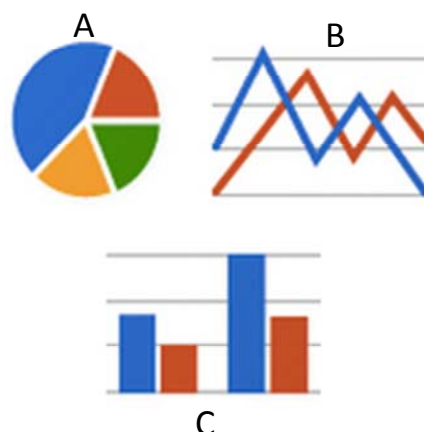
#### 動動筆想數學

1. 假裝自己是飲料店的老闆：

(1) 如果想知道每種飲品賣出的數量，你會怎麼做出圖表好讓自己一眼就看出哪種飲品賣的最好呢？\_\_\_\_\_圖

(2) 如果想知道這一個禮拜收入總額的變化，你會怎麼做出圖表讓自己可以從圖當中看到收入總額變化的程度呢？\_\_\_\_\_圖

(3) 如果想知道每月所花的支出費用，你會怎麼做出圖表讓自己可以從圖當中看到，每項費用項目所占的比例的多寡呢？\_\_\_\_\_圖



2. 看看右邊的圖片回答下列問題：

(1) 請問拿著旗子的小朋友是誰？

☐小瑋 ☐小梅 ☐小哲 ☐小如

(2) 哪個小朋友手中拿著氣球呢？

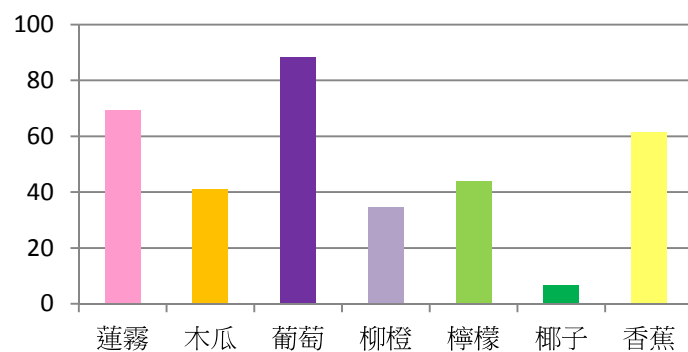
☐小瑋 ☐小梅 ☐小哲 ☐小如

(3) 把這些小朋友的位置做對調，是否會影響第(1)、(2)題的作答呢？☐是 ☐否



3. 下面是 2017 年 3 月公告各種水果每公斤的價格（單位：元），請根據圖表回答下列各題：

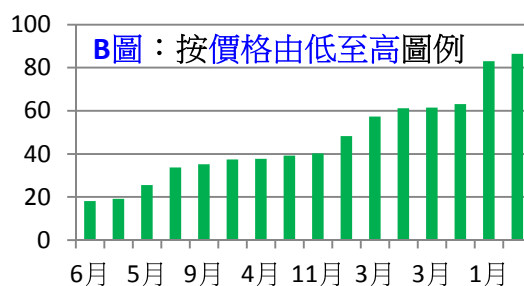
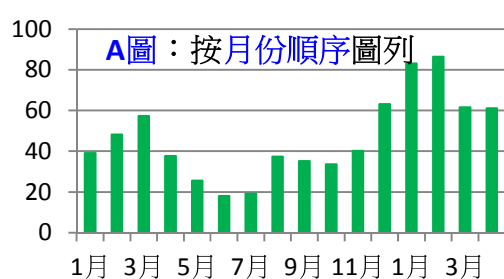
|       |       |       |       |       |      |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| 蓮霧    | 木瓜    | 葡萄    | 柳橙    | 檸檬    | 椰子   | 香蕉    |
| 69.39 | 41.13 | 88.33 | 34.79 | 43.83 | 6.61 | 61.54 |



- (1) 香蕉每公斤的價格是多少錢呢？\_\_\_\_\_
- (2) 哪一種水果的價格最便宜呢？\_\_\_\_\_
- (3) 如果，我們將表格內的水果順序重新任意排列，是否會影響第(1)、(2)題的作答呢？\_\_\_\_\_

4. 下面的圖表是從 2016 年 1 月到 2017 年 4 月，香蕉每公斤的價格，請根據圖表回答下列各題：

| 月份 | 1 月   | 2 月  | 3 月   | 4 月   | 5 月   | 6 月   | 7 月   | 8 月   | 9 月   | 10 月  | 11 月  | 12 月  | 1 月   | 2 月   | 3 月   | 4 月   |
|----|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 價格 | 39.17 | 48.2 | 57.33 | 37.79 | 25.58 | 18.12 | 19.12 | 37.46 | 35.17 | 33.66 | 40.25 | 63.19 | 83.08 | 86.46 | 61.54 | 61.19 |



- (1) 香蕉的價格，在 2016 年 12 月的時候是多少錢呢？你是從表格還是從圖來看的呢？☐表格 ☐圖形
- (2) 香蕉的價格在哪個月份是最貴的呢？你是看 A 圖還是看 B 圖回答的呢？☐A 圖 ☐B 圖 ☐表格
- (3) 如果，我們將表格內的月份順序重新任意排列，我們容易看出每個月香蕉價格的變化嗎？☐容易 ☐不容易 ☐差不多
- (4) 如果，我們把長條圖改成折線圖，你覺得它們的差別在哪裡？我們看長條圖會在意什麼？我們看折線圖又會在意什麼？

5. 下面是從 2008 年到 2017 年，香蕉的交易量和平均價格的圖表：

(1) 在 2010 年，香蕉的交易量有多少呢？

(2) 在 2016 年，香蕉的平均價格是多少呢？

(3) 哪一年香蕉的平均價格最高呢？



(4) 哪一年香蕉的交易量最少呢？\_\_\_\_\_年。

(5) 如果把長條圖改成折線圖，對於看這個圖表，你覺得有沒有不一樣的感覺呢？☐有 ☐沒有

如果你覺得有，請試著寫下差別是什麼呢？

(6) 把長條圖的月份順序隨意變換後，再畫成折線圖有沒有影響呢？

☐有 ☐沒有

如果你覺得有，請試著寫下影響的是什麼呢？

★資料如果用「長條圖」呈現，表示這些資料是 \_\_\_\_\_，且可看出各個項目的多寡。

資料如果用「折線圖」呈現，表示我們想要看資料依據某個項目會產生什麼 \_\_\_\_\_。

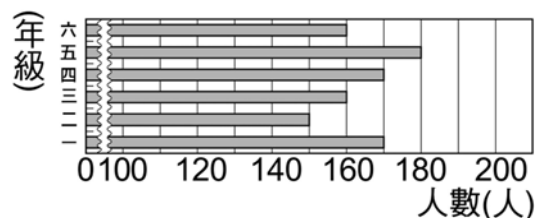
6. 下面是某校各年級學生人數長條圖，看圖回答問題：

(1) 學生人數最多的是 ( ) 年級，有 ( ) 人。

(2) 學生人數最少的是 ( ) 年級，有 ( ) 人。

(3) 學生人數 160 人的是 ( ) 年級和 ( ) 年級。

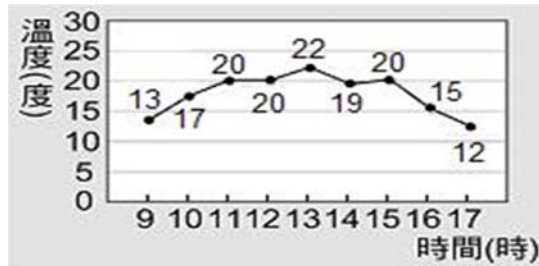
(4) 一到六年級的學生人數共有 ( ) 人。



▲某校各年級學生人數長條圖

7. 下面是某天上午9時到下午5時的溫度折線圖，看圖回答問題：

- (1) 全天的最高溫是（    ）度，在（    ）時；最低溫是（    ）度，在（    ）時。
- (2) 從（    ）時開始的溫度越來越低。
- (3) 相鄰的兩時刻中，溫度變化最大的是（    ）時到（    ）時，相差（    ）度。



▲某天上午9時到下午5時的溫度折線圖

\*長條圖就像排排站的人，有高有低，位置可以交換！

\*折線圖就像連綿的山陵線，有高有低、有陡有緩，位置不可交換！



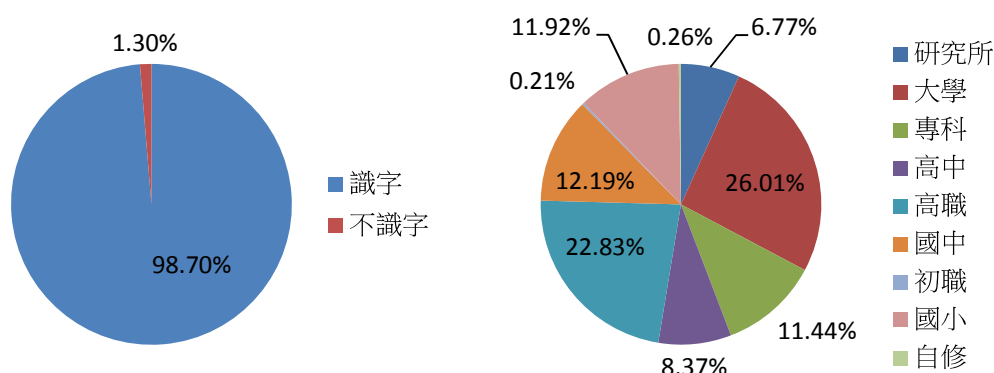
## ◎概念二：圓形圖

### 動動筆想數學

1. 下面是台灣地區 105 年度 15 歲以上的教育程度調查記錄圖表：

(單位：人)

| 不識字        | 識字         | 研究所       | 大學        | 專科        | 高中        | 高職        |
|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 265,523    | 20,132,412 | 1,362,217 | 5,235,876 | 2,304,084 | 1,684,719 | 4,595,590 |
| 總計         |            | 國中        | 初職        | 國小        | 自修        | 國中        |
| 20,397,935 |            | 2,453,666 | 42,397    | 2,400,625 | 53,238    | 2,453,666 |



(1) 如果我們想知道 15 歲以上的教育程度是哪一個占最多的比率，是從表格來看比較容易還是圓形圖呢？☐表格 ☐圓形圖

(2) 大學教育程度比研究所教育程度多了\_\_\_\_\_人。

(3) 15 歲以上的教育程度占最多比率的是\_\_\_\_\_。

★我們用圓來表示全體，所以，以百分率來看。整個圓代表 \_\_\_\_\_，而扇形則是圓的一部分，就像圓圓的披薩拿取其中的一塊。



★統計就是根據什麼想法來做資料整理，再根據需求畫出不同的圖表我們就稱為統計圖表。

(1) 只想比較大小，我們會使用長條圖，資料是否有序並不重要，因此分類別可以任意排。

(2) 想看變化，我們會使用折線圖，資料必須有序才能夠看變化。

(3) 想看部份和整體的關係，我們會使用圓形圖。

# 數學新世界教師種子生根計畫-重要連結

生根計畫網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>



數學新世界 FB 社團

<https://www.facebook.com/groups/nhmath>

CA 行程表

<https://goo.gl/a6YNxW>



生根計畫官方 LINE

<https://line.me/R/ti/p/%40uje9883i>

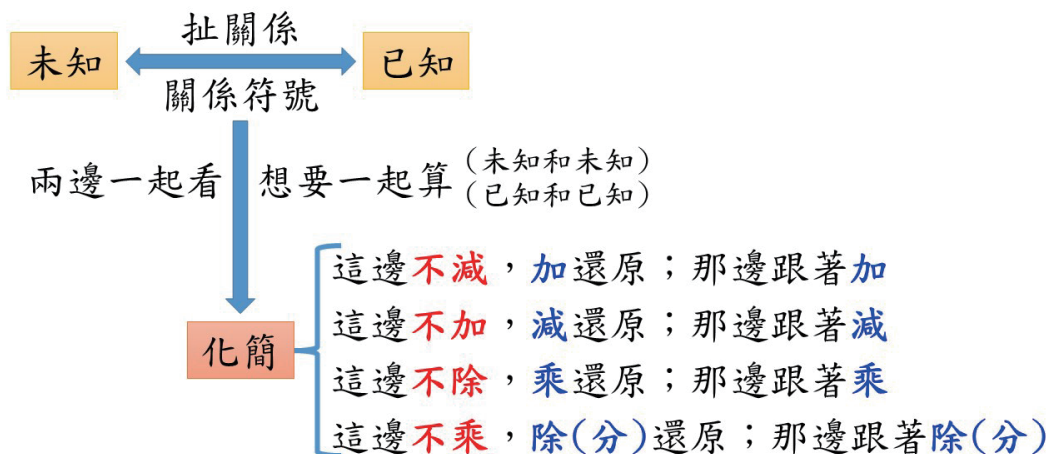


Tel: 04-7232105 ext.3288

E-mail: [nhmath@nhmath.com](mailto:nhmath@nhmath.com)

Address: 彰化縣彰化市進德路 1 號數學系

## 概念發展脈絡範例:等量公理



主辦單位：教育部國民及學前教育署

承辦單位：國立彰化師範大學數學系

計畫電話：(04)7232105#3288

計畫信箱：nhmath@nhmath.com

計畫地址：500彰化市進德路1號數學系

計畫官網：<http://tw.newhorizonofmathematics.com>

數學新世界官網

