

數學科教師共備手冊

國中課程

單元 7

畢氏定理 與根號數的運算



數學新世界

2018 年 09 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他

畢氏定理與根號數的運算

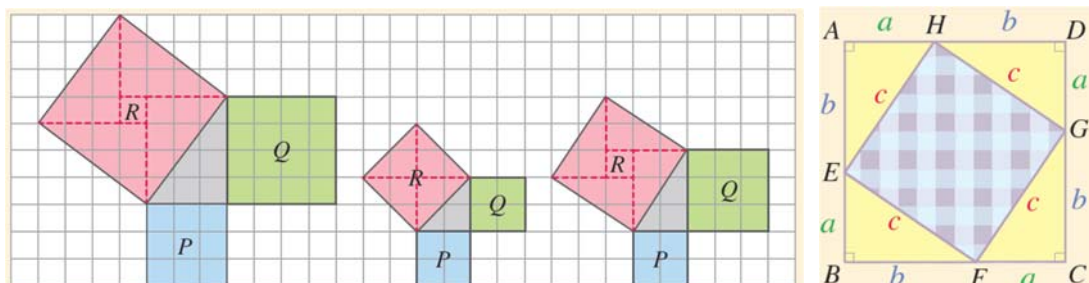
一、單元名稱：畢氏定理、根號數與根式運算

二、反思提問：

1.我們知道畢氏定理是直角三角形的邊長關係式，如果沿用畢氏定理的類比想法來判斷鈍角三角形或銳角三角形可行嗎？又，在不是直角三角形的情況下角跟邊長有關係嗎？

2.課本常用面積拼組或代數計算的方法很容易就可以證明畢氏定理，但，我們在使用畢氏定理時，我們是在使用長度關係還是面積關係呢？

3.以下是課本發現畢氏定理的過程(3 頁)，老師知道畢氏定理，透過簡單的說理讓學生認識畢氏定理之後，就開始使用畢氏定理，這麼重要的定理有沒有機會讓學生從非直角的探索、體驗和釐清來感受直角對於畢氏定理存在的必要性呢？



4.課本透過正方形面積的存在進而看到邊長的存在來引出平方根這個數字的存在，平方根究竟是一個數字還是一個長度？通常在什麼情況下會需要使用到平方根？之後還有立方根和超過3次的方根，怎麼介紹平方根才會有學習延續的脈絡呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

畢氏定理

平分根

根號數

根式運算

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
畢氏定理			
平分根			
根號數			
根式運算			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1) 數學新世界--CA 談數學--20171024 嘉義市玉山國中 畢氏定理

(2) 數學新世界--CA 談數學--20171112 雲嘉數咖共備 part1 (畢氏定理
41:28~1:51:45)

(3) 數學新世界--CA 談數學--20151221 桃源國中 畢氏定理 part1

(4) 數學新世界--CA 談數學--20151221 桃源國中 畢氏定理 part2

(5) 數學新世界--CA 談數學--20151221 桃源國中 畢氏定理 part3

(6) 數學新世界--CA 談數學--20141010 福智中學 平方根 part1

(7) 數學新世界--CA 談數學--20141010 福智中學 平方根 part2

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中八年級教材

根號數與根式運算-教師版

核心想法：根號數和圓周率、 $\frac{1}{3}$ 、負數都是一個新的符號，被創造出來方

便我們進行運算操作，除了圓周率是超越數之外，其餘的符號都是可以透過代數運算精準表現該符號的意涵，其中符號被創造的過程歷經四個階段：猜測、檢查、逼近、創造符號。

負數：設計來可以將自然數用加法的方式來抵銷的數字，因此必須具有和自然數相反的意義，創造了負數將自然數抵銷，而將自然數說成了正數

圓周率：當直徑為 1 時的圓周長，中國數學家劉徽用「割圓術」計算圓周率，他先從圓內接正六邊形，逐次分割為 12、24、48、96、192 邊形。他說「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」我們只能逼近圓周長，卻無法寫出圓周長，因此創造出 π

$\frac{1}{3}$ ： $1 \div 3 = 0.333\dots$ ， $1 \div 3$ 無法寫成有限小數表示，因此，我們創造出符號 $\frac{1}{3}$ 來

表示 $1 \div 3$ ，也就是說 $\frac{1}{3}$ 是代表一個乘以 3 可以變回 1 的數字

根號數：某數想寫成相同的數字連乘兩次，某些數字(以 3 為例)我們會辦不到，可以越猜越準，卻永遠無法寫出一個數字連乘兩次可以剛好獲得 3，因此，創造 $\sqrt{3}$ ，來讓 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

對數：我們知道以 10 為晉級標準，100 是第 2 等級，1000 達第 3 等級，那 500 的等級會是 2 點多等級，等級可以越猜越準，但是寫不出來，

因此創造 $\log_{10}^{500}$ 來表現 500 這個數字的等級。所以 $10^{\log_{10}^{500}} = 500$ 。

參考影片：1.20160919 CA 在石岡國中

2.20170907CA 新北市蘆洲國中

學習單

1. 下面的做法可以透過什麼做法把它抵銷掉呢？

(1) 桌上擺上 3 隻筆 (2) 往前走 4 大步 (3) 把窗簾拉開。

輔助解釋：抵銷就是可以回復到沒做之前的狀態， $3+(-3)=0$ 。

核心想法：因為擁有相反意義而具有抵銷的功能的數字就叫做負數。

答案：(1) 拿走 3 隻筆 (2) 往後走 4 大步 (3) 把窗簾拉回來。

結論：我們創造 1 個新的符號負數來擔任相反並具有抵銷的任務， $3+(-3)=0$ 。

2. 拿出一張紙，摺出這張紙的 $\frac{1}{3}$ ，試著把操作過程的想法寫下來。

輔助提問：怎麼檢查你摺出來的就是 $\frac{1}{3}$ 呢？

輔助解釋：老師也可使用一條繩子操作，讓學生猜 $\frac{1}{3}$ 在哪裡，再做檢查。

核心想法：把摺紙操作的過程寫下來，先猜，再檢查，檢查的方法是猜的長度 3 倍後會不會等於 1。

答案：1. 猜測： $\frac{1}{3}$ 的長度

2. 檢查：把猜測的長度量 3 次和 1 比較。

3. 調整(逼近)：不夠加長，超過減少。

換題：拿個寶特瓶瓶蓋，目測並在紙上一條直線，用來代表這個瓶蓋的圓周長，畫好後檢查看看你猜得準不準？如果不準，再重新畫直線，再重新檢查，請把操作過程畫下來。

3. 我們知道 $1 \div 2 = 0.5$ ，請計算並寫出 $1 \div 3$ 的答案。

輔助提問：我們可以說 $1 \div 3$ 就是 0.3 嗎？我們可以說 $1 \div 3$ 就是 0.33 嗎？

核心想法：因為除不盡寫不完，我們需要一個新的符號 $\frac{1}{3}$ 來表現 $1 \div 3$ 。

答案： $\frac{1}{3}$ 。

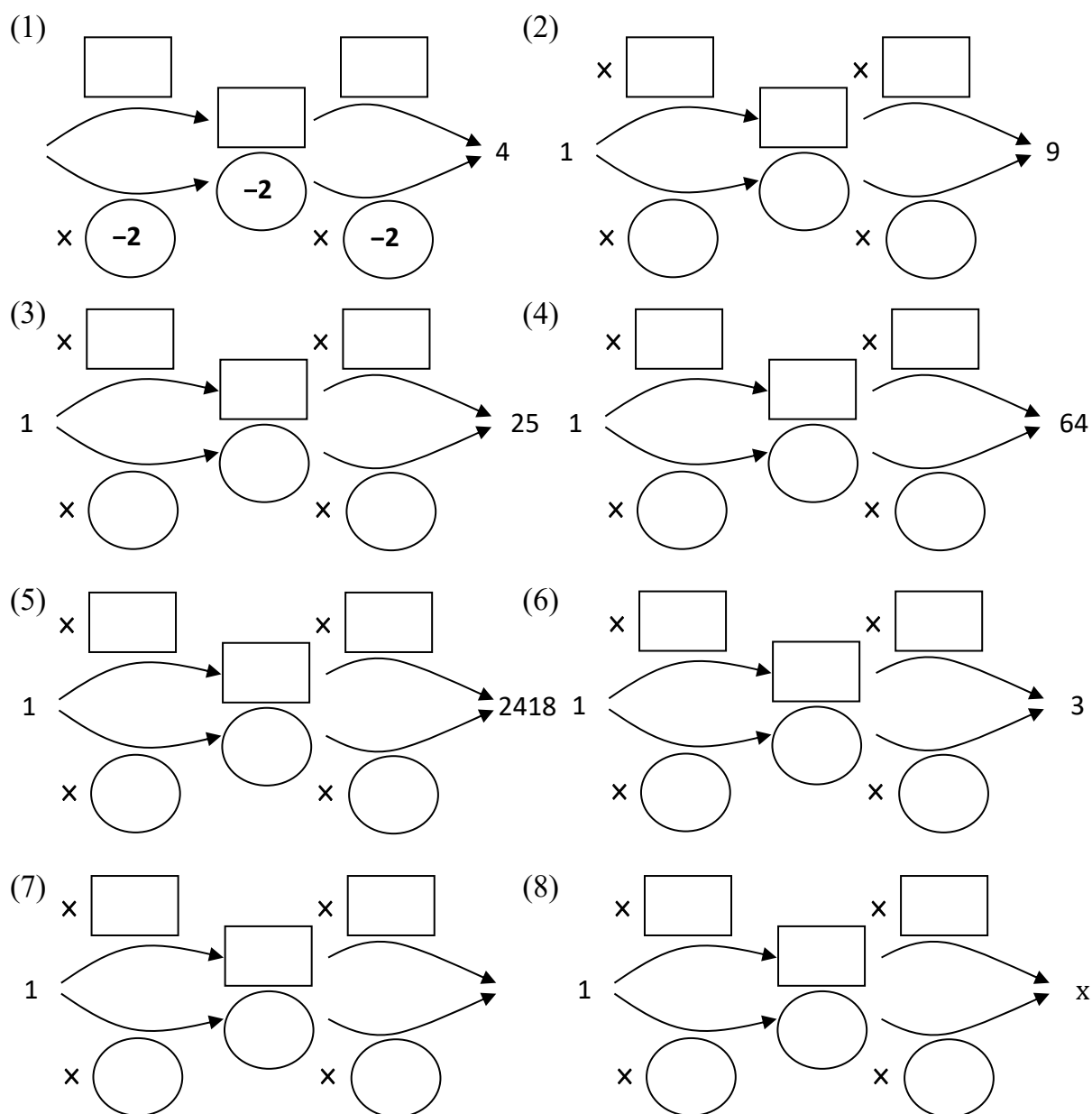
結論： $\frac{1}{3}$ 是一個乘以 3 會等於 1 的數字。

小結論：1.當我們想知道一個不知道的數字有多大，我們會先猜測，然後再檢查是否正確。

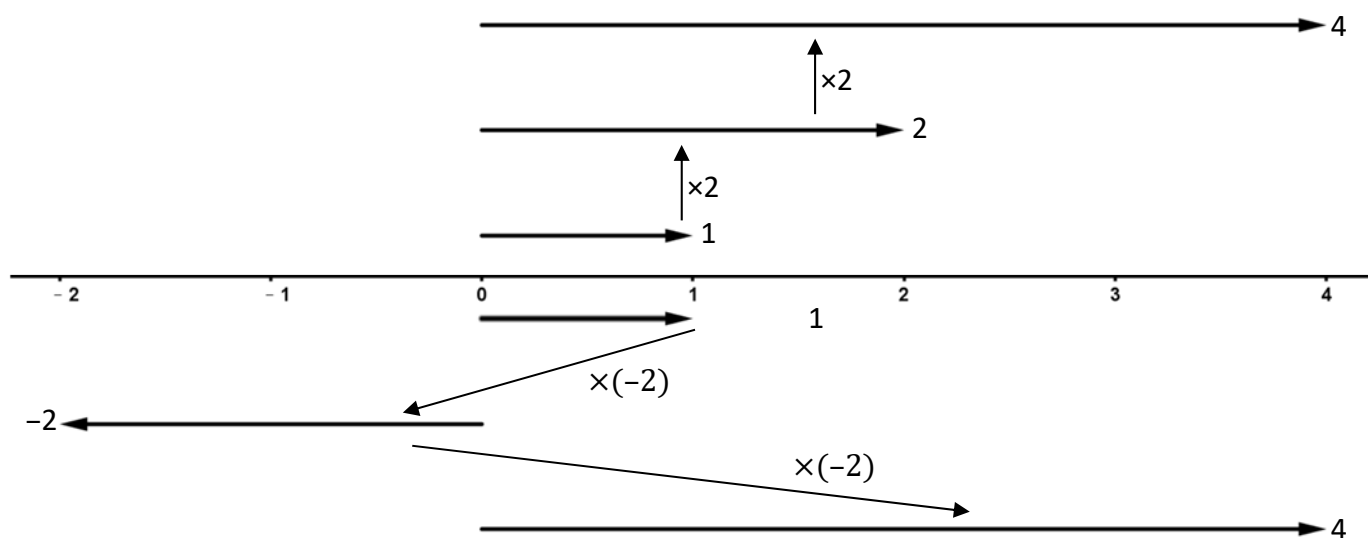
2.當我們想表現一個無法使用現有數字表達的數字，最簡單的手段就是創造一個新的符號來代表這個數字，我們就可以使用符號繼續進行運算操作。

4. 下面是一些經過相同倍率兩次縮放的數字，請你在空格中猜出適當數字來完成運算。

註：每小題中同類型的 3 個空格的數字都一樣喔，(5)(6)(7)猜兩數乘積比較接近結果的數就好！



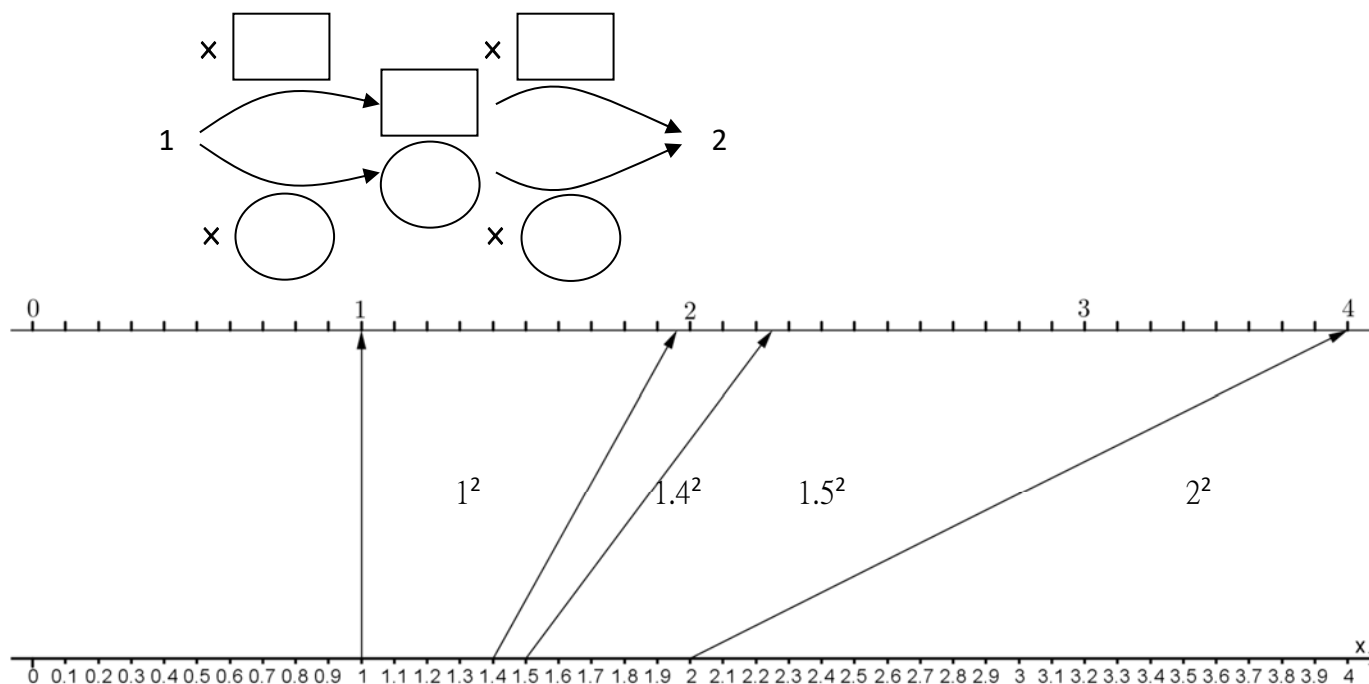
我們利用數線可以將(1)的圖形畫成下面的樣子喔。



輔助解釋：數字本身是倍的概念，因此，先有 1(這個 1 是指數字作用的物件)，再進行相同倍率的放大或縮小。第(5)開始，請學生猜個數字試試，提示可以是小數。

核心想法：從可以找到數字完成填空，到遍尋不到適合的數字，開始猜測、檢查、逼近、創造新的符號來完成運算操作。根號數是運算過程產生的數字，只不過我們使用新的符號做表達。因為根號數是運算產生的，因此 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ 和 $3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 是認識並使用根號數最自然的說法。這題的設計已同時完成正負平方根的教學。數線的設計是讓學生再度看到數字是倍的作用，與上面的填空搭配著看，從 1 開始，看到數字倍的作用，再度看到負數的功用與使用。

5. 猜猜看！空格中的數字應該是多少呢？請利用下面圖形找出連乘兩次可以得到 2 的數字。



核心想法：利用下面圖形，定義域和值域分開做對應的圖形，可以讓學生清楚看到猜測數字進行平方後，如何漸漸逼近我們想要的數字 2，同時透過運算，學生會慢慢察覺真的找不到平方後可以變成 2 的數字，但是我們可以越來越靠近！因為寫不出來，所以創造根號數！

結論：根號數是透過運算產生的，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 和 $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2})$ 。

6. 什麼是平方根呢？

(1) 下面哪一支筆比較長呢？先猜再檢查，你是怎麼比出來的呢？



(2) 同樣的，我們想猜出空格中的數字應該多少時平方才會等於 2，也就是 $\square^2 = 2$

等於是在討論 $\square^2 - 2 = 0$

這時候我們稱 $\square$ 是 2 的平方根（二次方根）

那 $\square^2 - 7 = 0$

這時候我們稱 $\square$ 是 7 的平方根

那 $\square^5 - 11 = 0$

這時候我們稱 $\square$ 是 11 的五次方根

核心想法：方程式是求出符合方程式的解有哪些，"根"的想法源自於多項式，可以讓多項式變成 0 的解，我們稱為"根"，因為穿過地面 (x 軸) 變長出根來，就是英文的"root"，如果學生有先學過二次

函數，談這個概念學生會很有感覺，因為 $y = x^2 - 9$ 函數圖形碰

得到 x 軸，所以有平分根，而 $y = x^2 + 4$ 函數圖形碰不到 x 軸，

所以沒有平分根。如果沒學過，就直接帶過，日後談及二次函數時再回頭說明即可。

7. 試著將下面的根號數做改寫，請完成填空後寫出答案。

(1) $\sqrt{4}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{4} & \times & \sqrt{4} = \boxed{} \\ \boxed{} & \times & \boxed{} = 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(2) $\sqrt{49}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{49} & \times & \sqrt{49} = \boxed{} \\ \boxed{} & \times & \boxed{} = 49 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{49} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(3) $\sqrt{18}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{18} & \times & \sqrt{18} = \boxed{} \\ \boxed{} & \times & \boxed{} = 18 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{18} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(4) $\sqrt{60}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{60} & \times & \sqrt{60} = \boxed{} \\ \boxed{} & \times & \boxed{} = 60 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{60} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(5) $\sqrt{144}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{144} & \times & \sqrt{144} = \boxed{} \\ \boxed{} & \times & \boxed{} = 144 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{144} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(6) $\sqrt{6}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{6} & \times & \sqrt{6} = \boxed{} \\ \boxed{} & \times & \boxed{} = 6 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{6} = \underline{\hspace{2cm}}$$

核心想法：單純只利用根號數最原始的運算，讓學生很自然地進行根號數的改寫，過程中學生很自然地看到 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ，

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}，\text{以及 } \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = a，$$

$$\sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a。$$

8. 請合併(簡化)計算出下列各式的結果：

(1) $3 + \sqrt{16}$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

(4) $\sqrt{3} + \sqrt{300}$

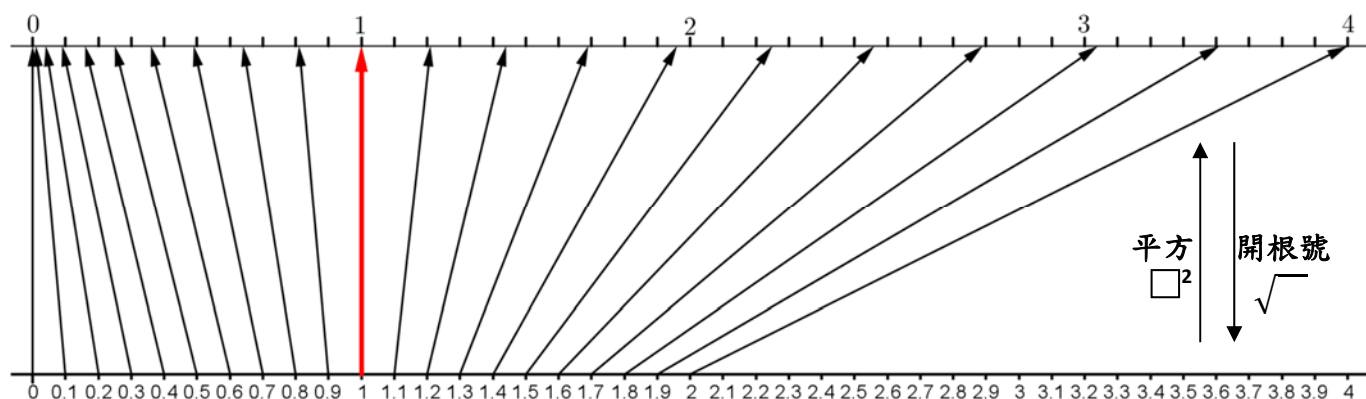
(5) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

(6) $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$

核心想法：根號數可以進行加減但是不一定可以合併成 1 個數，關鍵在根號數本身是一個數字的代表符號，根號數本身無法和非根號數合併，因為創造根號數的當下，就是因為無法將根號數轉換為我們熟悉的數字型態。至於根號數和根號數本身的加減運算，一樣是基於相同理由而無法合併，並且，根號數是透過乘法運算展現根號數的大小而不是加減。至於學生容易迷失於 $\sqrt{2} +$

$\sqrt{3} = \sqrt{5}$ ，透過以上說明，再輔以 $\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{13}$ 的舉例即可。

9. 比大小：下面的圖形表現出數字平方與開根號的紀錄，請利用下面的圖形回答下面的問題：



(1) $\sqrt{2} \square \sqrt{3}$

(2) $\sqrt{0.4} \square \sqrt{0.6}$

(3) $\sqrt{\frac{1}{2}} \square \sqrt{\frac{1}{3}}$

(4) $\sqrt{0.5} \square 0.5$

(5) $\sqrt{7} \square 7$

(6) $5\sqrt{2} \square 4\sqrt{3}$

核心想法：透過圖形讓學生直接看到，數字越大平方會越大，反之亦同，這是函數和反函數的概念。其中最有趣的在於大於1和小於1的部分，箭頭方向剛好相反，因為數字大於1是放大再放大，數字小於1卻是縮小再縮小，因此當數字大於1平方會變大，當數字小於1平方反而變小，也就是說，當數字小於1開根號反而會變大了！

- 結論：**
1. 當數字大於1，數字開根號後的數字會 ☐ 變大 ☐ 變小 ☐ 不變。
 2. 當數字等於1，數字開根號後的數字會 ☐ 變大 ☐ 變小 ☐ 不變。
 3. 當數字小於1，數字開根號後的數字會 ☐ 變大 ☐ 變小 ☐ 不變。
 4. $a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

接下來的題目，就是讓學生透過解題更加理解根號數的意義與內涵慢慢來就好！

10. 根號數的近似值：請說明 $\sqrt{19}$ 有多大？

(1) 請試著使用**估算**的方法估計 $\sqrt{19}$ 有多大，估計到小數第 1 位。

(2) 使用**計算機**計算 $\sqrt{19}$ 。

(3) **查表法**：利用**乘方開方表**，回答問題，

Ⓐ 請查出 $\sqrt{19}$ 的數值

Ⓑ 請查出 $\sqrt{190}$ 的數值

Ⓒ 請查出 $\sqrt{441}$ 的數值

N	N ²	$\sqrt{N}$ 的近似值	$\sqrt{10N}$ 的近似值
17	289	4.1231	13.0384
18	324	4.2426	13.4164
19	361	4.3589	13.7840
20	400	4.4721	14.1421
21	441	4.5826	14.4914

11. 根號數**綜合練習**

(1) $\sqrt{25} =$

(2) $\sqrt{12} =$

(3) $\sqrt{54} =$

(4) $\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} =$

(5) $\sqrt{2^6 \times 3^5 \times 5^2} =$

(6) $\sqrt{2^{2017}} =$

(7) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} =$

(8) $\sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{50} =$

(9) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$

(10) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 =$

(11) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$

(9) 利用所附的乘方開方表，求出下列各數的近似值。

$$\sqrt{46} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$\sqrt{1764} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$\sqrt{450} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

N	N ²	$\sqrt{N}$ 的近似值	$\sqrt{10N}$ 的近似值
40	1600	6.324555	20.00000
41	1681	6.403124	20.24846
42	1764	6.480741	20.49390
43	1849	6.557439	20.73644
44	1936	6.633250	20.97618
45	2025	6.708204	21.21320
46	2116	6.782330	21.44761
47	2209	6.855655	21.67948