

屏東縣107學年度「數學生根教學」

國中領域教學共備人才培訓

學員手冊

10月03日 單元

以符號代表數

一元一次方程式

根號數與根式運算

畢氏定理

目錄

共備研習內容

一、一元一次方程式.....	1
二、畢氏定理與根號數的運算.....	7
三、附錄-數學新世界重要連結.....	21

一元一次方程式

一、單元名稱：一元一次方程式

二、反思提問：

1. 列出方程式的目的是想要透過已知跟未知產生關聯後，再透過一連串運算的歷程求得未知，請問，方程式的種類有哪些呢？

2. 下面是康軒版一上(1)、二上(2)、二下(3)(4)和三上(5)(6)的題目，解這 8 個題目需要使用到方程式的想法嗎？那些要？那些不要？

(1) 小芬有 3 顆水果糖和 6 顆巧克力糖，合起來有幾顆糖？

(2) 有 10 張彩色紙，其中 7 張是紅色，剩下的 3 張是黃色，黃色彩色紙有幾張？

(3) 一袋皮球有 8 個，4 袋共有幾個皮球？

(4) 有 16 枝筷子，每 2 枝配成一雙，可以配成幾雙？

(5) 三年忠班共有 34 個小朋友，要坐遊園小火車，一節車廂可以坐 4 個人。需要幾節車廂才夠坐呢？

(6) 老師要請 46 個小朋友喝飲料，一人喝 1 杯。一瓶飲料可以倒 6 杯，最少要買幾瓶飲料才夠？

3. 下面這 2 道題目(康軒版六下)算不算是一元一次方程式的應用問題呢？

(1) 欣茹到郵局，買了 5 元和 12 元的兩種郵票共 25 張，花了 202 元。

算算看，欣茹買了 5 元和 12 元的郵票各幾張？

(2) 爸爸的年齡和女兒相差 28 歲，今年爸爸 30 歲，女兒 2 歲，

幾年後爸爸的年齡會是女兒的 3 倍？

4.在解方程式的時候，我們有時候會對關係式的一邊做不改變其大小的算則運算，有時候，我們會在關係式的兩邊同時作相同改變大小的動作，這種同時在兩邊動手腳的方法叫等量公理。下面的運算過程，有使用到等量公理嗎？

$$\begin{aligned} & 6 : 2x \\ = & 3 : x \end{aligned}$$

5.移項法則跟等量公理有何異同之處？

6.在等量公理的操作過程中，兩邊的算式不斷地在改變，為什麼解集合不會變？

7.解一元一次方程式時，我們採用等量公理；解一元二次方程式或更高次的方程式，我們採用因式分解；就算是在解不等式時，我們會考慮等式再來分析不等式的解。到底，我們是把一個方程式看成一個整體，還是把方程是看程兩個個體之間的比較呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

未知數

方程式

關係式

等量公理

一元一次方程式

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
未知數			
方程式			
關係式			
等量公理			
一元一次方程式			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1)數學新世界--CA 談數學--20180328 高雄市國教輔導團 方程式、一次函數 part1
 - (2)數學新世界--CA 談數學--20180328 高雄市國教輔導團 聯立方程式 part2
 - (3)數學新世界--CA 談數學--20180328 高雄市國教輔導團 聯立方程式、解方程式 part3
 - (4)數學新世界--CA 談數學--20171226 嘉義市玉山國中 函數、方程式 part1
 - (5)數學新世界--CA 談數學--20171226 嘉義市玉山國中 函數、方程式 part2
 - (6)數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 PART 1
 - (7)數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 PART 2
 - (8)數學新世界--CA 談數學--20161223 林口國中 一元一次方程式 教師議課
- 2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。
- 3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中七年級教材

一元一次方程式

一、想一想，下面的題目有辦法回答嗎？缺了什麼呢？把它補上來！

1. 小名早上量身高發現比上次量的身高多了 5 公分！請問小名現在的身高是多少呢？

最好帶著學生列出“關係”

這些題目同時標記了數學的最重要功能！由已知算未知！

2. 小名今天買完早餐之後，口袋剩下 18 元，請問小名原本有多少錢呢？
3. 小名的爸爸今年 37 歲，6 年後，請問小名幾歲呢？
4. 高雄到台北的距離約有 362 公里，開車 4 個小時可以到嗎？
5. 小贏昨天到操場跑 10 圈，請問他花了多少時間？
6. 有一個面積 24 的矩形，請問這個矩形的寬有多寬？
7. 小贏存錢筒今天滿了，打開存錢筒數錢，發現總共有 5000 元，請問存錢筒中有多少 50 元的硬幣呢？
8. 百貨周年慶，一雙知名品牌的球鞋打 4 折賣出，請問多少錢就可以買到鞋子？
9. 小瑩想買 iphone 手機，準備開始存錢，他希望半年後就可以買到手機，請問小瑩每天要存多少錢才夠呢？
10. 媽媽拿 100 元給三兄弟當作零用錢，哥哥拿走了 70 元，請問最小的弟弟會拿到多少零用錢呢？
11. 男生每個人可以吃掉 2 碗飯，女生每個人可以吃掉 3 碗飯，最後 100 碗飯都被吃光了，請問男生有幾個人？
12. 老師請學生吃糖果，每個人分 6 顆，請問老師應該準備多少糖果才夠呢？

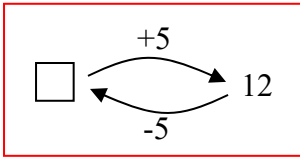
二、填填看

1. $\square + 5 = 12$

2. $\square - 7 = 9$

3. $\square \times 3 = 24$

4. $\square \div 12 = 3$



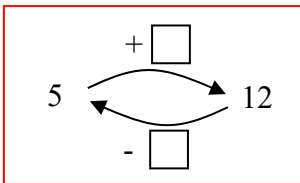
發展等量公理！

5. $5 + \square = 12$

6. $7 - \square = 9$

7. $3 \times \square = 24$

8. $12 \div \square = 3$



下面同一題的空格中要填入相同的數字，可能嗎？

9. $\square + 7 = \square - 5$

10. $\square + 6 = \square \times 2$

11. $\square \times 4 = \square \times 3$

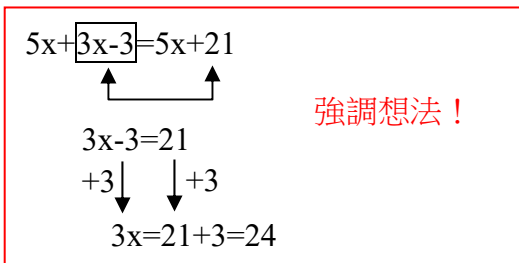
12. $\square \times 2 = \square \times 5 + 21$

13. $\square \times 3 - 6 = \square \times 3 + 8$

14. $\square \times 5 + 4 = \square \times 2 - 11$

☆
很重要的練習！

15. $8x - 3 = 5x + 21$ ，求 x 的值。（我們使用 x 來代表一個不知道的數字）



畢氏定理與根號數的運算

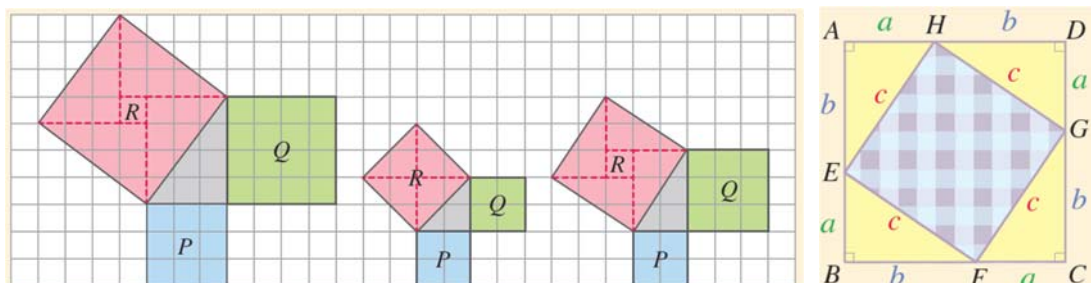
一、單元名稱：畢氏定理、根號數與根式運算

二、反思提問：

1. 我們知道畢氏定理是直角三角形的邊長關係式，如果沿用畢氏定理的類比想法來判斷鈍角三角形或銳角三角形可行嗎？又，在不是直角三角形的情況下角跟邊長有關係嗎？

2. 課本常用面積拼組或代數計算的方法很容易就可以證明畢氏定理，但，我們在使用畢氏定理時，我們是在使用長度關係還是面積關係呢？

3. 以下是課本發現畢氏定理的過程(3 頁)，老師知道畢氏定理，透過簡單的說理讓學生認識畢氏定理之後，就開始使用畢氏定理，這麼重要的定理有沒有機會讓學生從非直角的探索、體驗和釐清來感受直角對於畢氏定理存在的必要性呢？



4. 課本透過正方形面積的存在進而看到邊長的存在來引出平方根這個數字的存在，平方根究竟是一個數字還是一個長度？通常在什麼情況下會需要使用到平方根？之後還有立方根和超過3次的方根，怎麼介紹平方根才會有學習延續的脈絡呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

畢氏定理

平分根

根號數

根式運算

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
畢氏定理			
平分根			
根號數			
根式運算			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

- (1)數學新世界--CA 談數學--20171024 嘉義市玉山國中 畢氏定理
 - (2)數學新世界--CA 談數學--20171112 雲嘉數咖共備 part1 (畢氏定理
41:28~1:51:45)
 - (3)數學新世界--CA 談數學--20151221 桃源國中 畢氏定理 part1
 - (4)數學新世界--CA 談數學--20151221 桃源國中 畢氏定理 part2
 - (5)數學新世界--CA 談數學--20151221 桃源國中 畢氏定理 part3
 - (6)數學新世界--CA 談數學--20141010 福智中學 平方根 part1
 - (7)數學新世界--CA 談數學--20141010 福智中學 平方根 part2
- 2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。
 - 3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中八年級教材

根號數與根式運算-教師版

核心想法：根號數和圓周率、 $\frac{1}{3}$ 、負數都是一個新的符號，被創造出來方

便我們進行運算操作，除了圓周率是超越數之外，其餘的符號都是可以透過代數運算精準表現該符號的意涵，其中符號被創造的過程歷經四個階段：猜測、檢查、逼近、創造符號。

負數：設計來可以將自然數用加法的方式來抵銷的數字，因此必須具有和自然數相反的意義，創造了負數將自然數抵銷，而將自然數說成了正數

圓周率：當直徑為 1 時的圓周長，中國數學家劉徽用「割圓術」計算圓周率，他先從圓內接正六邊形，逐次分割為 12、24、48、96、192 邊形。他說「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失矣。」我們只能逼近圓周長，卻無法寫出圓周長，因此創造出 π

$\frac{1}{3}$ ： $1 \div 3 = 0.333\dots$ ， $1 \div 3$ 無法寫成有限小數表示，因此，我們創造出符號 $\frac{1}{3}$ 來

表示 $1 \div 3$ ，也就是說 $\frac{1}{3}$ 是代表一個乘以 3 可以變回 1 的數字

根號數：某數想寫成相同的數字連乘兩次，某些數字(以 3 為例)我們會辦不到，可以越猜越準，卻永遠無法寫出一個數字連乘兩次可以剛好獲得 3，因此，創造 $\sqrt{3}$ ，來讓 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

對數：我們知道以 10 為晉級標準，100 是第 2 等級，1000 達第 3 等級，那 500 的等級會是 2 點多等級，等級可以越猜越準，但是寫不出來，因此創造 \log_{10}^{500} 來表現 500 這個數字的等級。所以 $10^{\log_{10}^{500}} = 500$ 。

參考影片：1.20160919 CA 在石岡國中

2.20170907CA 新北市蘆洲國中

學習單

1. 下面的做法可以透過什麼做法把它抵銷掉呢？

(1) 桌上擺上 3 隻筆 (2) 往前走 4 大步 (3) 把窗簾拉開。

輔助解釋：抵銷就是可以回復到沒做之前的狀態， $3+(-3)=0$ 。

核心想法：因為擁有相反意義而具有抵銷的功能的數字就叫做負數。

答案：(1) 拿走 3 隻筆 (2) 往後走 4 大步 (3) 把窗簾拉回來。

結論：我們創造 1 個新的符號負數來擔任相反並具有抵銷的任務， $3+(-3)=0$ 。

2. 拿出一張紙，摺出這張紙的 $\frac{1}{3}$ ，試著把操作過程的想法寫下來。

輔助提問：怎麼檢查你摺出來的就是 $\frac{1}{3}$ 呢？

輔助解釋：老師也可使用一條繩子操作，讓學生猜 $\frac{1}{3}$ 在哪裡，再做檢查。

核心想法：把摺紙操作的過程寫下來，先猜，再檢查，檢查的方法是猜的長度 3 倍後會不會等於 1。

答案：1. 猜測： $\frac{1}{3}$ 的長度

2. 檢查：把猜測的長度量 3 次和 1 比較。

3. 調整(逼近)：不夠加長，超過減少。

換題：拿個寶特瓶瓶蓋，目測並在紙上一條直線，用來代表這個瓶蓋的圓周長，畫好後檢查看看你猜得準不準？如果不準，再重新畫直線，再重新檢查，請把操作過程畫下來。

3. 我們知道 $1 \div 2 = 0.5$ ，請計算並寫出 $1 \div 3$ 的答案。

輔助提問：我們可以說 $1 \div 3$ 就是 0.3 嗎？我們可以說 $1 \div 3$ 就是 0.33 嗎？

核心想法：因為除不盡寫不完，我們需要一個新的符號 $\frac{1}{3}$ 來表現 $1 \div 3$ 。

答案： $\frac{1}{3}$ 。

結論： $\frac{1}{3}$ 是一個乘以 3 會等於 1 的數字。

小結論：1.當我們想知道一個不知道的數字有多大，我們會先猜測，然後再檢查是否正確。

2.當我們想表現一個無法使用現有數字表達的數字，最簡單的手段就是創造一個新的符號來代表這個數字，我們就可以使用符號繼續進行運算操作。

4. 下面是一些經過相同倍率兩次縮放的數字，請你在空格中猜出適當數字來完成運算。

註：每小題中同類型的 3 個空格的數字都一樣喔，(5)(6)(7)猜兩數乘積比較接近結果的數就好！

(1)

(2)

(3)

(4)

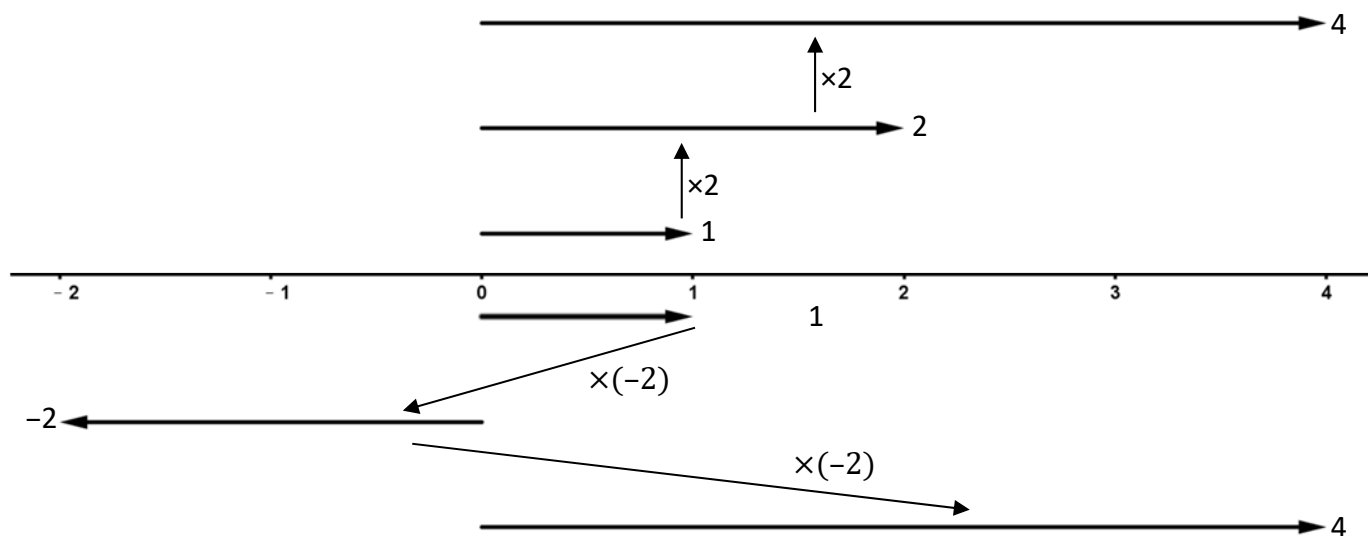
(5)

(6)

(7)

(8)

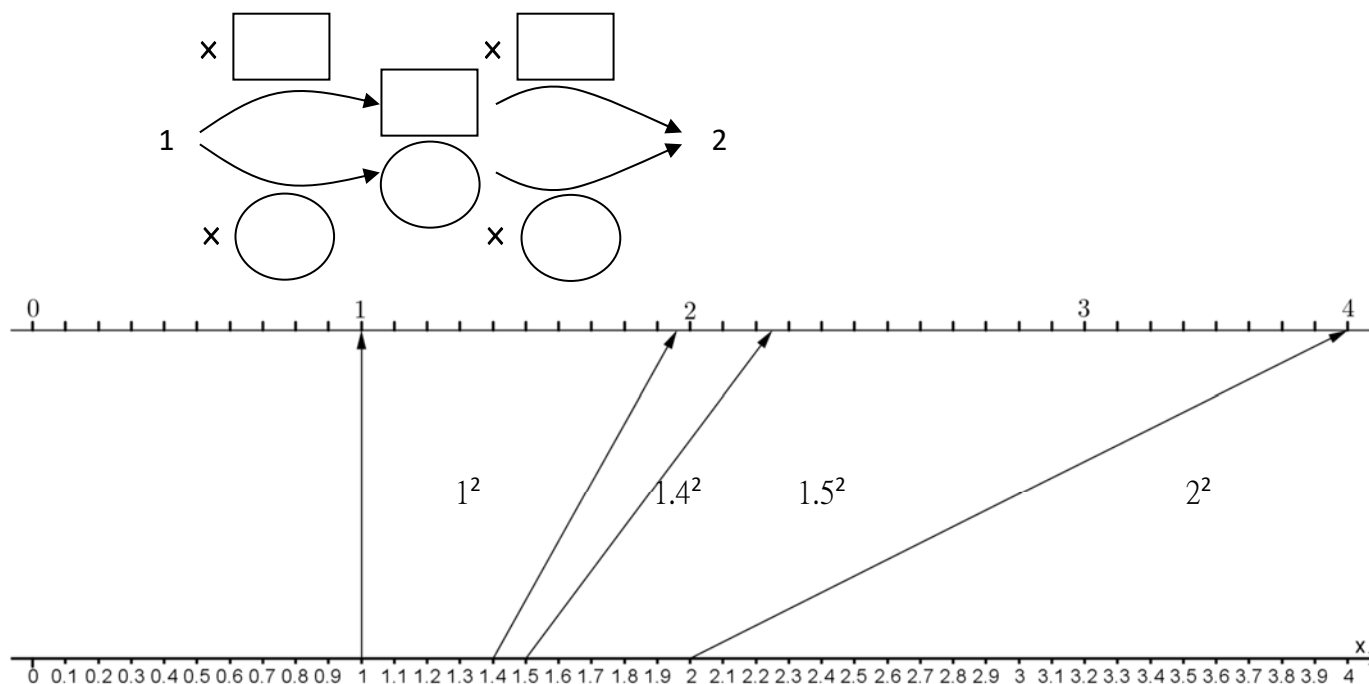
我們利用數線可以將(1)的圖形畫成下面的樣子喔。



輔助解釋：數字本身是倍的概念，因此，先有 1(這個 1 是指數字作用的物件)，再進行相同倍率的放大或縮小。第(5)開始，請學生猜個數字試試，提示可以是小數。

核心想法：從可以找到數字完成填空，到遍尋不到適合的數字，開始猜測、檢查、逼近、創造新的符號來完成運算操作。根號數是運算過程產生的數字，只不過我們使用新的符號做表達。因為根號數是運算產生的，因此 $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ 和 $3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$ 是認識並使用根號數最自然的說法。這題的設計已同時完成正負平方根的教學。數線的設計是讓學生再度看到數字是倍的作用，與上面的填空搭配著看，從 1 開始，看到數字倍的作用，再度看到負數的功用與使用。

5. 猜猜看！空格中的數字應該是多少呢？請利用下面圖形找出連乘兩次可以得到2的數字。



核心想法：利用下面圖形，定義域和值域分開做對應的圖形，可以讓學生清楚看到猜測數字進行平方後，如何漸漸逼近我們想要的數字2，同時透過運算，學生會慢慢察覺真的找不到平方後可以變成2的數字，但是我們可以越來越靠近！因為寫不出來，所以創造根號數！

結論：根號數是透過運算產生的，因此 $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 和 $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (-\sqrt{2}) \times (-\sqrt{2})$ 。

6. 什麼是平方根呢？

(1) 下面哪一支筆比較長呢？先猜再檢查，你是怎麼比出來的呢？



(2) 同樣的，我們想**猜出**空格中的數字應該多少時平方才會等於2，

也就是 $\square^2 = 2$

等於是在討論 $\square^2 - 2 = 0$

這時候我們稱 \square 是 2 的 平方 根 (二次方根)

那 $\square^2 - 7 = 0$

這時候我們稱 \square 是 的 根

那 $\square^5 - 11 = 0$

這時候我們稱 \square 是 的 根

核心理念：方程式是求出符合方程式的解有哪些，"根"的想法源自於多項式，可以讓多項式變成0的解，我們稱為"根"，因為穿過地面(x軸)變長出根來，就是英文的"root"，如果學生有先學過二次函數，談這個概念學生會很有感覺，因為 $y = x^2 - 9$ 函數圖形碰得到x軸，所以有平分根，而 $y = x^2 + 4$ 函數圖形碰不到x軸，所以沒有平分根。如果沒學過，就直接帶過，日後談及二次函數時再回頭說明即可。

7. 試著將下面的根號數做改寫，請完成填空後寫出答案。

(1) $\sqrt{4}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{r} \sqrt{4} \quad \times \quad \sqrt{4} \quad = \quad \boxed{} \\ \boxed{} \quad \times \quad \boxed{} \quad = \quad 4 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{4} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sqrt{49}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{r} \sqrt{49} \quad \times \quad \sqrt{49} \quad = \quad \boxed{} \\ \boxed{} \quad \times \quad \boxed{} \quad = \quad 49 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{49} = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sqrt{18}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{r} \sqrt{18} \quad \times \quad \sqrt{18} \quad = \quad \boxed{} \\ \boxed{} \quad \times \quad \boxed{} \quad = \quad 18 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{18} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\sqrt{60}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{r} \sqrt{60} \quad \times \quad \sqrt{60} \quad = \quad \boxed{} \\ \boxed{} \quad \times \quad \boxed{} \quad = \quad 60 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{60} = \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $\sqrt{144}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{r} \sqrt{144} \quad \times \quad \sqrt{144} \quad = \quad \boxed{} \\ \boxed{} \quad \times \quad \boxed{} \quad = \quad 144 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{144} = \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $\sqrt{6}$ 會是多少呢？

$$\begin{array}{r} \sqrt{6} \quad \times \quad \sqrt{6} \quad = \quad \boxed{} \\ \boxed{} \quad \times \quad \boxed{} \quad = \quad 6 \end{array}$$

$\Rightarrow \sqrt{6} = \underline{\hspace{2cm}}$

核心想法：單純只利用根號數最原始的運算，讓學生很自然地進行根號數的改寫，過程中學生很自然地看到 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$ ，

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}，\text{ 以及 } \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = a，$$

$$\sqrt{a \times a} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a。$$

8. 請合併(簡化)計算出下列各式的結果：

(1) $3 + \sqrt{16}$

(2) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

(3) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

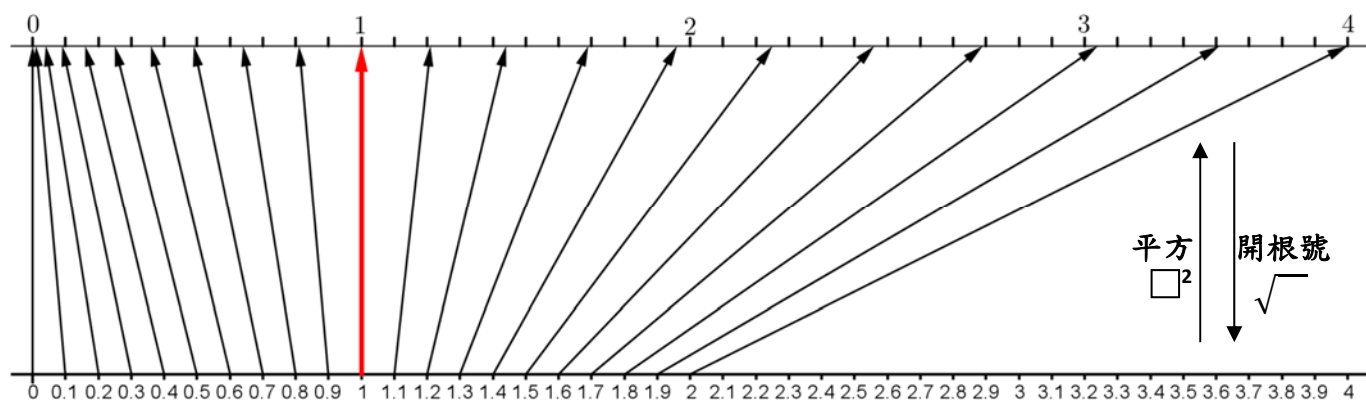
(4) $\sqrt{3} + \sqrt{300}$

(5) $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$

(6) $\sqrt{2} \div \sqrt{3}$

核心想法：根號數可以進行加減但是不一定可以合併成 1 個數，關鍵在根號數本身是一個數字的代表符號，根號數本身無法和非根號數合併，因為創造根號數的當下，就是因為無法將根號數轉換為我們我熟知的數字型態。至於根號數和根號數本身的加減運算，一樣是基於相同理由而無法合併，並且，根號數是透過乘法運算展現根號數的大小而不是加減。至於學生容易迷失於 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ ，透過以上說明，再輔以 $\sqrt{4} + \sqrt{9} \neq \sqrt{13}$ 的舉例即可。

9. 比大小：下面的圖形表現出數字平方與開根號的紀錄，請利用下面的圖形回答下面的問題：



- | | |
|--|--|
| (1) $\sqrt{2}$ <input type="checkbox"/> $\sqrt{3}$ | (2) $\sqrt{0.4}$ <input type="checkbox"/> $\sqrt{0.6}$ |
| (3) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ <input type="checkbox"/> $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | (4) $\sqrt{0.5}$ <input type="checkbox"/> 0.5 |
| (5) $\sqrt{7}$ <input type="checkbox"/> 7 | (6) $5\sqrt{2}$ <input type="checkbox"/> $4\sqrt{3}$ |

核心理想：透過圖形讓學生直接看到，數字越大平方會越大，反之亦同，這是函數和反函數的概念。其中最有趣的在於大於1和小於1的部分，箭頭方向剛好相反，因為數字大於1是放大再放大，數字小於1卻是縮小再縮小，因此當數字大於1平方會變大，當數字小於1平方反而變小，也就是說，當數字小於1開根號反而會變大了！

- 結論：**
- 當數字大於1，數字開根號後的數字會 變大變小不變。
 - 當數字等於1，數字開根號後的數字會 變大變小不變。
 - 當數字小於1，數字開根號後的數字會 變大變小不變。
 - $a > b > 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ 。

接下來的題目，就是讓學生透過解題更加理解根號數的意義與內涵慢慢來就好！

10. 根號數的近似值：請說明 $\sqrt{19}$ 有多大？

(1) 請試著使用估算的方法估計 $\sqrt{19}$ 有多大，估計到小數第 1 位。

(2) 使用計算機計算 $\sqrt{19}$ 。

(3) 查表法：利用乘方開方表，回答問題，

① 請查出 $\sqrt{19}$ 的數值

N	N ²	\sqrt{N} 的近似值	$\sqrt{10N}$ 的近似值
17	289	4.1231	13.0384
18	324	4.2426	13.4164
19	361	4.3589	13.7840
20	400	4.4721	14.1421
21	441	4.5826	14.4914

② 請查出 $\sqrt{190}$ 的數值

③ 請查出 $\sqrt{441}$ 的數值

11. 根號數綜合練習

(1) $\sqrt{25} =$

(2) $\sqrt{12} =$

(3) $\sqrt{54} =$

(4) $\sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} =$

(5) $\sqrt{2^6 \times 3^5 \times 5^2} =$

(6) $\sqrt{2^{2017}} =$

(7) $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} =$

(8) $\sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{72} + \sqrt{50} =$

(9) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 =$

(10) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 =$

(11) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$

12. 利用所附的乘方開方表，求出下列各數的近似值。


$$\sqrt{46} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$\sqrt{1764} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$\sqrt{450} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

N	N ²	\sqrt{N} 的近似值	$\sqrt{10N}$ 的近似值
40	1600	6.324555	20.00000
41	1681	6.403124	20.24846
42	1764	6.480741	20.49390
43	1849	6.557439	20.73644
44	1936	6.633250	20.97618
45	2025	6.708204	21.21320
46	2116	6.782330	21.44761
47	2209	6.855655	21.67948

數學新世界教師種子生根計畫-重要連結

生根計畫網站	
http://tw.newhorizonofmathematics.com	

	數學新世界 FB 社團
	https://www.facebook.com/groups/nhmath

CA 行程表	
https://goo.gl/a6YNxW	

	生根計畫官方 LINE
	https://line.me/R/ti/p/%40uje9883i

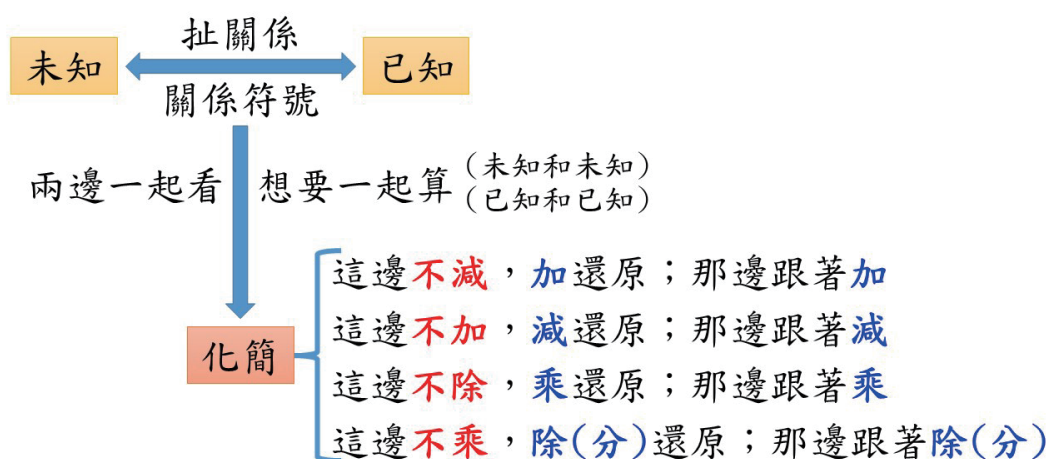


Tel: 04-7232105 ext.3288

E-mail: nhmath@nhmath.com

Address: 彰化縣彰化市進德路 1 號數學系

概念發展脈絡範例:等量公理



主辦單位：教育部國民及學前教育署

承辦單位：國立彰化師範大學數學系

計畫電話：(04)7232105#3288

計畫信箱：nhmath@nhmath.com

計畫地址：500彰化市進德路1號數學系

計畫官網：<http://tw.newhorizonofmathematics.com>

數學新世界官網

