

數學科教師共備手冊

國小課程

單元 6

比與比例



數學新世界

2018 年 08 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思問題

1. 在日常生活中，我們常常會說：我比你高；妳比我快他比較瘦；今天的食慾比較好；這家賣的飲料跟那家賣的飲料相比，口味一樣，可是價錢差很多等等。這些句子中的比，就數學的方式是如何描述的？我們使用比這個字的時候，我們是想要說明什麼或表達什麼意涵？
2. 再思考一次，比是什麼？
你會怎麼定義比，你是想要獲得什麼樣的性質才會使用比這個定義？
3. 在談比的時候，比的項目中，它們的單位要不要一樣呢？
可以有項目是 0 的嗎？（甚麼時候可以？甚麼時候沒有意義？）
4. 在我們習慣的比當中，沒有等號的比是什麼意思？有等號的又是什麼意思？有等號的比當中，等號代表著什麼是相等的呢？有等號的比跟沒有等號的比我們是如何命名的呢？這樣的命名，背後的想法是什麼呢？
5. 課本講的比例式 $a:b=c:d$ ，這個比的相等是什麼關係的相等？什麼情形之下，我們會說 $4:6=4:5$ ？什麼情形之下，我們會說 $4:6=8:3$ ？以及什麼情況我們則會說 $4:6=8:12$ ？

6. 哪些例子可以用來談正比，而正比的相等指的是怎麼樣的項目關係？
7. 哪些例子可以用來談反比，而反比的相等指的是怎麼樣的項目關係？
8. 兩個相等的比，它的格式怎麼書寫比較好？由左至右還是上下並列？
9. 讓我們再想一想，什麼需求底下我們才會改變比例也就是計算比例？
比如說，若已經知道一杯有點酸又不會太酸、有點甜又不會太甜的檸檬水的配方，什麼情況之下，我們會想要改變配方？什麼時候我們不改變配方但同時放大或縮小配方的各項目的比例？
10. 有一杯 500c.c 的檸檬水，這杯檸檬水的成份有 450c.c 的水、50c.c 的檸檬原汁以及 10c.c 的蜂蜜，這杯檸檬水的口味，其成份的比例可以寫成 45:5:1，簡化約分過的比例可以用來表示什麼？
11. 我們把比約成最簡的好處是什麼？「最簡整數比」的用意是什麼？在生活情境中，我們實際上所用的比都是最簡整數比嗎？
12. 「 $3:5 = \frac{3}{5}$ 」這樣寫對不對呢？如果不對，應該怎麼修正呢？
13. 課本對「比值」的定義為：前項除以後項所得到的值。比值用除法來看的道理是甚麼？後項除以前項不也是得到一個比值嗎？比值想要表示什麼意涵以及看到什麼關係？

14. 「比值」其實在生活中經常被使用，您能列舉幾個嗎？
15. 反比有比值嗎？如果反比有比值，那麼應該如何詮釋呢？
16. 正比有連比，那麼，反比有連比嗎？為什麼有或者沒有？
17. 如果 A 和 B 成反比、B 和 C 也成反比，A 和 B 會成正比嗎？
什麼情況會？什麼情況不會？
18. 速率(100km/hr)、體積(cm^3)、單價(30 元/公斤)、...等等，它們的“單位”透露什麼訊息？我們可以從單位得知構成單位的項目間其關係是什麼嗎？
19. 請列出學生學習這個單元常見的錯誤想法，我們可以怎麼說清楚來幫助學生澄清概念？例如：
- (1) 直接把比當作是實際的數來計算。
 - (2) 將「內項乘積等於外項乘積」類推到三數的連比為「內內、中中、外外」。
 - (3) 將「正比」想成兩數一起變大；將「反比」想成一數變大另一數變小。(提醒：正負號)

二、核心概念

1. 比

2. 比的相等

3. 比例

4. 比的虛與實

5. 最簡整數比

6. 比值

7. 單位

8. 正比

9. 反比

三、概念發展脈絡

比	
比的相等	

比例	
比的 虛與實	
最簡 整數比	
比值	
單位	
正比	
反比	

四、觀摩、討論與修改

1. 參考影片

 [數學新世界-CA 談數學-20180425 臺北三民國中 機率、除法、比、比值](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20171112 雲嘉數咖共備 part2 比與比例](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20170915 高雄輔導團 part1 比、比例、比值 part1 \(20:00~1:148:30\)](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20170703 馬祖介壽國中 part1 比與比例](#)

 [數學新世界-CA 談數學-20170703 馬祖介壽國中 part2 比與比例](#)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

完整版請參閱數學新世界五、六年級教材。

◎概念一：比

動動筆想數學

- (1) 人的身材環肥燕瘦，我們可以用三圍來大概知道一個人的身材如何嗎？
- (2) 想要自己做一杯檸檬水消暑，你會準備哪些材料呢？
- (3) 想要在大窗戶的旁邊再做一個形狀一樣，大小要小一倍的窗戶，那麼尺寸要怎麼決定呢？
- (4) 跑得比較快？比較慢？這是怎麼比較的呢？



請列出可描述
身材的項目



請列出檸檬水
的材料



請列出決定一
個矩形形狀的
項目



請列出表示速
率需要的項目

★當我們想談一件事情或標的時（例如：身材、口味、矩形、...等），我們會先把跟它相關的項目一一表列，這個項目的表列就是「比」。

2. 下列是一些比較，你有感覺到在比什麼嗎？

(1) 游泳比賽

Lane	Name	Nationality	Time
4	Sarah Sjöström	Sweden	55.48
2	Penny Oleksiak	Canada	56.46
6	Dana Vollmer	United States	56.63
8	Chen Xinyi	China	56.72
7	Lu Ying	China	56.76
3	Rikako Ikee	Japan	56.86
5	Emma McKeon	Australia	57.05
1	Jeanette Ottesen	Denmark	57.17

(2) 網球比賽



(3) 分數



(4) 高矮



(5) 腕力



(6) 魚商喊價



★競賽中的「比」(長度、時間、分數等)主要用來比出 _____。
比數中的項目：甲方的數字、乙方的數字以及甲乙兩方數字的差，
這種比我們在乎的是 _____；這種比允許 0 的出現，因為
它代表沒差！這是一種加減法的一模一樣。

◎概念二：比例

動動筆想數學

1. 你喜歡喝什麼飲料呢？飲料店可以做出這麼多種的飲品任君挑選，
這些琳瑯滿目的飲品它們是有什麼不同呢？



你喜歡喝奶茶嗎？為什麼在 A 家買的奶茶和 B 家買的奶茶，喝起來的口味會不會一樣呢？

雖然都是奶茶，它們是哪裡相同？哪裡又有所不同呢？

2. 我們來自製一杯屬於自己口味的奶茶：
 - (1) 你會需要那些材料呢？請你列下來。
 - (2) 一杯 500c.c.的奶茶，各項材料配方需要多少的量呢？
請寫下你的配方。

材料					
份量					

(3) 如果要做一大桶給全班喝，應該怎麼準備材料才能讓大家喝到口味和第(2)小題那一杯 500c.c.的奶茶是相同呢？

3. (1) 小明每天早上泡牛奶的方式都是將 500c.c.的熱水加上 4 匙的奶粉，如果我們想沖泡出一樣濃度的牛奶，那麼空格內應填入的數字是多少？

奶粉(匙)	熱水(c.c.)
	500
2	
	1500
1	
6	



(2) 泡一大瓶牛奶，把它倒在不同大小的杯子，每個杯子內的牛奶的味道有改變嗎？☐有改變 ☐沒有改變 ☐無法判斷

(3) 把幾小杯濃度相同的牛奶集中倒進一個大瓶子，大瓶子內的牛奶和原本小杯的味道一樣嗎？

☐還是一樣 ☐不一樣 ☐無法判斷

(4) 如果我們不管要泡大杯還是小杯，都想要維持相同濃度的牛奶，當奶粉增量或減量時，熱水該怎麼調整？或者當熱水增量或減量時，奶粉該怎麼調整？

(5) 在這個例子中，我們為了維持相同濃度，以一開始奶粉和熱水 4：500 的 _____ 關係為對照，來調整奶粉和熱水所需的量。而且，我們可以觀察到，當奶粉增為 k 倍，熱水也跟著增為 k 倍，這樣的關係，我們即稱在濃度相同的情況下，奶粉的量和熱水的量成 _____。

奶粉(匙)：熱水(cc)

4：500

↓ k 倍 ↓

4k：500k

奶粉的量是熱水的幾倍？

熱水的量是奶粉的幾倍？

★通常我們在意且需要計算的比是 _____ 關係的比；為了保持某個標的（口味、形狀、面積等）它的不變或者如何改變之下，而變動表現這個標的各個項目的份量。

★比例提供了一個對照，可以讓我們得知整體和彼此間的倍數關係。

◎概念三：比值

動動筆想數學

1. 有一水果攤的甘蔗，老闆定價為 5 斤賣 120 元。

(1) 阿明 只想買 3 斤，請問他應該付多少錢呢？_____ 元

(2) 小花 身上有 200 元，請問她可以買多少甘蔗呢？_____ 斤

重量(斤)	價格(元)
5	120
3	
	200
1	
	1

2. 金莎巧克力 1 顆 45 克，下方表格的最上面是做成 1 顆金莎巧克力所需要的成份與份量。如果目前有充足的各項材料，但是只有 1 支湯匙可以用來取各項材料，我們怎麼用這支湯匙取到我們想要的份量，做出口味相同大小不同的金莎巧克力呢？

糖	奶粉	榛果	可可
6g	9g	12g	18g
		4× 	
1× 			
	1× 		
		1× 	
			1× 



3. 以下的比都是「正比」關係，請試著在空格中填入正確的數字。

(1)

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad 7 \\ = & \quad 2 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 1 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 5 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 35 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 1 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 6 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad 3/4 \quad : \quad 5 \\ = & \quad 1/4 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 1 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad 8 \quad : \quad \underline{\hspace{2cm}} \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 20 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 1 \\ = & \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad : \quad 3 \end{aligned}$$

*當我們把比寫成 $1:?$ 或者 $?:1$ 的時候，我們的用意是什麼？

* $1:?$ 是以 為基準； $?:1$ 是以 為基準。

★比不一定是實際的值，將比約成最簡整數比的目的是 。

★藉由已知的比例可選擇以哪個項目為基準，轉換為單價的概念，使得項目間的換算更為簡易與方便。

★「比值」是以某個項目為基準（單價），來看其他項目會是多少。

◎概念四：正比與反比

動動筆想數學

1. 媽媽準備包水餃當作今天的晚餐：

(1) 媽媽先準備了內餡材料 1200 公克，心想：該包大顆一點還是小顆一點的？請幫忙計算各種包法所需的水餃皮數量和每顆內餡重量。

例如：每顆內餡 40 公克，水餃皮 30 片，
則內餡總量為 1200 公克。



包法	水餃皮 (片)	每顆內餡 (g)	內餡總量 (g)
A		30	1200
B	80		1200
C		15	1200

*當 內餡總量不變時，

每顆內餡的重量增加，
水餃皮的數量就要 。

每顆內餡的重量減少，
水餃皮的數量就要 。

- (2) 媽媽買了一袋 90 片的水餃皮，要把這些水餃皮包完。
請幫忙計算各種包法所需的每顆內餡重量和內餡總量。

包法	水餃皮 (片)	每顆內餡 (g)	內餡總量 (g)
A	90	30	
B	90		1800
C	90	40	

*當水餃皮的數量不變時，
每顆內餡的重量增加，
內餡總重量就要_____。
每顆內餡的重量減小，
內餡總重量就要_____。

- (3) 媽媽打算包每顆內餡 12 公克的迷你一口水餃。
請幫忙計算各種包法所需的水餃皮數量和內餡總量。

包法	水餃皮 (片)	每顆內餡 (g)	內餡總量 (g)
A	50	12	
B		12	1200
C	25	12	

*當每顆內餡的重量不變時，
水餃皮的數量增加，內餡總重量就要_____。
水餃皮的數量減少，內餡總重量就要_____。

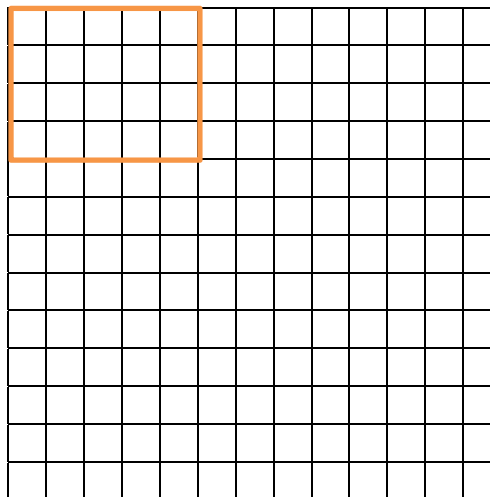
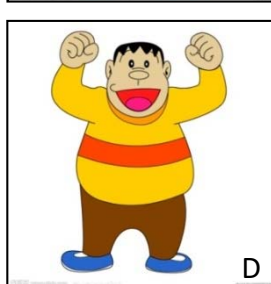
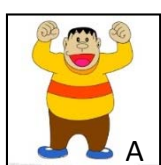
- (4) 我們可以從前面各題的作答，觀察到〈水餃皮數量〉、〈每顆內餡重量〉和〈內餡總重量〉三個項目間的關係：

- ①當內餡總重量不變時，(水餃皮的數量)增為 3 倍，
則(每顆內餡的重量)_____。
- ②當水餃皮的數量不變時，(每顆內餡的重量)增為 3 倍，
則(內餡的總重量)_____。
- ③當每顆內餡的重量不變時，(水餃皮的數量)增為 3 倍，
則(內餡的總重量)_____。

★當項目確立後，根據每個不同項目的份量變化，我們就可以觀察特定的對象的變化了！

2. (1) 下面有四張胖虎的照片，B、C、D 哪一張是由 A 放大得到的？

請利用方格，畫出和下面形狀相同但大小不同的矩形。



- (2) 甲矩形實際的長、寬各是 20，乙矩形實際的長是 12、寬是 4。
請在空格中填入適當的數字，能表現與甲、乙形狀相同但大小不同的矩形。

甲矩形			乙矩形		
長	:	寬	長	:	寬
20	:	20	12	:	4
= 40	:	_____	= 60	:	_____
= _____	:	5	= _____	:	2
= 1	:	_____	= 96	:	_____

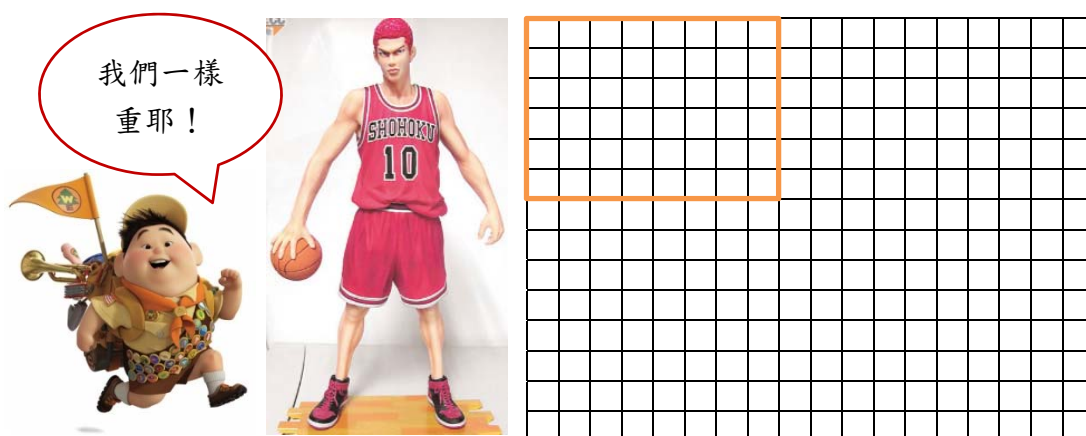
*想想等號是什麼相等呢？

- (3) 說說看，矩形若先不論大小如何，想要保持形狀一樣，矩形的長和寬這兩個項目它們一組一組相等的比例，彼此之間有什麼關係呢？

若矩形的長變為 2 倍，則寬要變為_____；

若矩形的長變為 $\frac{1}{2}$ 倍，則寬要變為_____。

3. (1) 請利用方格，畫出和下列長方形面積一樣的矩形。



(2) 已經知道甲矩形和乙矩形的面積各是 400 和 48，請在空格中填入適當的數字，這些數字可以表現出和甲矩形與乙矩形，相同面積的矩形。

甲矩形			乙矩形		
長		寬	長		寬
20	:	20	12	:	
= 40	:	_____	= 60	:	_____
=	:	5	=	:	2
_____	:		_____	:	
= 1	:	_____	= 96	:	_____

*想想等號是什麼相等呢？

(3) 說說看，矩形若想要保持面積一樣，矩形的長和寬這兩個項目它們一組一組相等的比例，彼此之間有什麼關係呢？
 若矩形的長變為 2 倍，則寬要變為_____；
 若矩形的長變為 $\frac{1}{2}$ 倍，則寬要變為_____。

- ★當矩形的形狀不變，大小不同，長與寬的關係會是_____。
- ★當矩形的面積不變，形狀不同，長與寬的關係會是_____。

◎概念五：連比

動動筆想數學

1. 右邊的長方體，長是 4 公分、寬是 4 公分、高是 3 公分，體積則是 48 平方公分。

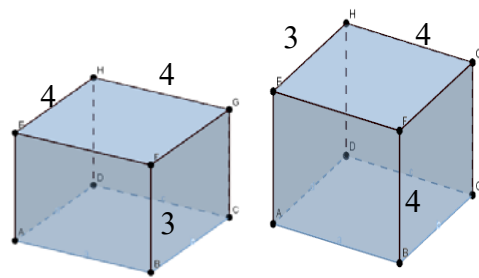
- (1) 如果維持長方體的體積和高不變，我們調整它的長和寬，我們會說長和寬是哪一種關係呢？☐正比 ☐反比

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高}$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

$$48 = 8 \times \underline{\quad} \times 3$$

$$48 = \underline{\quad} \times \underline{\quad} \times 3$$



- (2) 如果維持長方體的體積和長不變，我們調整它的寬和高，我們會說寬和高是哪一種關係呢？☐正比 ☐反比
- (3) 如果維持長方體的體積和寬不變，我們調整它的長和高，我們會說長和高是哪一種關係呢？☐正比 ☐反比

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高}$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

$$48 = 4 \times 2 \times \underline{\quad}$$

$$48 = 4 \times \underline{\quad} \times \underline{\quad}$$

$$\text{體積} = \text{長} \times \text{寬} \times \text{高}$$

$$48 = 4 \times 4 \times 3$$

$$48 = 2 \times 4 \times \underline{\quad}$$

$$48 = \underline{\quad} \times 4 \times \underline{\quad}$$

- (4) 下面這種說法對嗎？
當甲和乙成反比，而且乙和丙也成反比；這表示甲和丙會是正比關係。☐對 ☐錯
- (5) 下面這種說法對嗎？
當甲和乙成正比，而且乙和丙也成正比；這表示甲和丙會是正比關係。☐對 ☐錯

★連比的兩兩項目間，有可能是正比關係，也有可能是反比關係。

◎概念六：速率

動動筆想數學

1. (1) 甲跑了 400 公尺，乙跑了 300 公尺，所以甲跑的比乙還要快，這樣說對不對？☐對 ☐不對

理由：_____

- (2) 甲跑了 3 分鐘，乙跑了 1 分鐘，所以乙跑的比甲還要快，這樣說對不對？☐對 ☐不對

理由：_____

- (3) 要怎麼說才能比較出快和慢呢？

- (4) 請你比較下面甲、乙、丙三個人，他們的快慢。

	距離(公尺)	時間(秒)
甲	400	50
乙	300	60
丙	500	40

最快的是☐甲 ☐乙 ☐丙

最慢的是☐甲 ☐乙 ☐丙

*花多少時間可以跑多長的距離相比

- (5) 如果甲、乙、丙三個人跑步的快慢是相同的，請在空格填入他們跑的距離或時間。

	距離(公尺)	時間(秒)
甲	400	20
乙	800	
丙		10

速率是由距離和時間比出來的！

$$\text{速率} : \frac{400}{20} = \frac{800}{\quad} = \frac{\quad}{10} = \frac{\quad}{1}$$

⇒ 甲跑 400 公尺花了 20 秒

*在填格子的時候，你有感覺到我們為了維持速率的相同，當距離增倍時，時間的變化是什麼嗎？

*當速率相同，距離變為 k 倍，時間變為 _____ 倍。

(6) 如果甲、乙、丙三個人跑步的距離是相同的，請在空格填入他們跑的速率或時間。

	速率(公尺/秒)	時間(秒)
甲	5	20
乙	10	
丙		5

距離是由速率和時間計算出來的！

$$\text{距離} : 5 \times 20 = 10 \times () = () \times 5$$

⇒ 甲以 5 公尺/秒的速率，跑了 20 秒

*在填格子的時候，你有感覺到我們為了維持距離的相同，當速率增倍時，時間的變化什麼嗎？

*當距離相同，速率變為 k 倍，時間變為 _____ 倍。

(7) 如果甲、乙、丙三個人花一樣的時間跑步運動，請在空格填入他們跑的速率或距離。

	速率(公尺/秒)	距離(公尺)
甲	5	100
乙	10	
丙		10

時間是由速率和距離計算出來的！

$$\text{時間} \Rightarrow \frac{100}{5} = \frac{()}{10} = \frac{10}{()}$$

⇒ 甲以 5 公尺/秒的速率，跑了 100 公尺

*在填格子的時候，你有感覺到我們為了維持時間的相同，當速率增倍時，距離的變化是什麼嗎？

*當時間相同，速率變為 k 倍，距離變為 _____ 倍。

★兩個項目 (x 和 y) 成正比，它們的關係是 _____。

兩個項目 (x 和 y) 成反比，它們的關係是 _____。



重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>