

數學科教師共備手冊

國中課程

單元 10

證明與推理



數學新世界

2018 年 12 月 編修

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第 1 次反思單撰寫 2.CA 教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第 2 次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1. 編修單元學習單 2. 再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他



一、反思提問：

1. 證明與推理被課本設計成一個單元來進行教學，其實，我們教學中不斷地在使用著證明與推理，也就是說，證明與推理素養的養成應該就在平常的數學學習中。推理與證明的重點在於邏輯的推論，例如：什麼時候若 P 則 Q 可以成立，當「若 P 則 Q 」成立以及「若 Q 則 R 」也成立的情況下，為什麼「若 P 則 R 」也一定成立。
當「若 P 則 Q 」成立的情況下，為什麼「若非 Q 則非 P 」也一定成立。
成功推論的核心本質是什麼呢？
2. 什麼是定義？什麼是定理？什麼是公理？什麼是性質呢？試著說說看，什麼情況下我們會用到這些名詞呢？

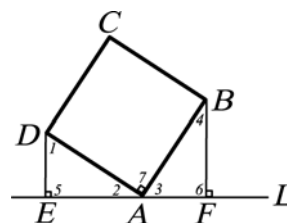
3. 您覺得您平時的幾何教學時應該掌握什麼核心概念，才能讓學生在處理幾何問題時，比較有思考的方向？

4. 在證明平行四邊形對角線互相平分時，要怎麼引導學生開始分析這個題目？

5. 下面是幾個找全等的證明題，先想法，再寫證明！

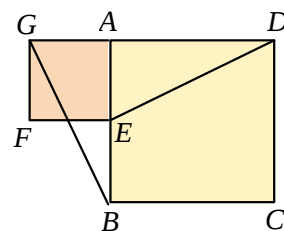
(1) 已知：如圖，已知 $ABCD$ 是正方形， A 在 L 上， $\overline{DE} \perp L$ ， $\overline{BF} \perp L$ ，垂足分別為 E 、 F ($\overline{AE} \neq \overline{AF}$)。

求證： $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ 。



(2) 已知：如右圖，四邊形 ABCD 及四邊形 AEFG 皆為正方形。

求證： $\overline{DE} = \overline{BG}$ 。

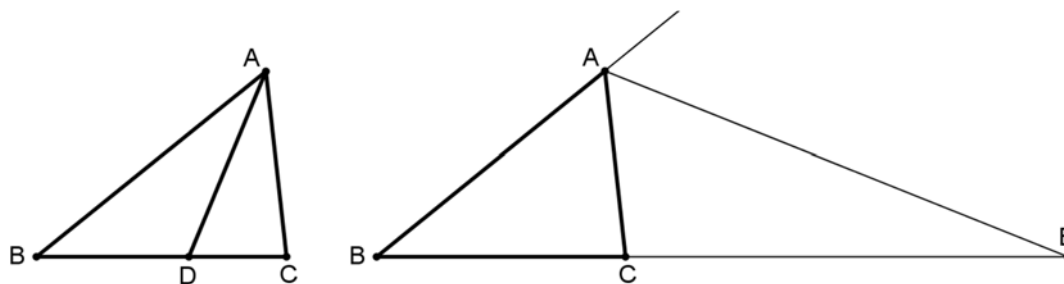


6. 我們來練習一下，利用幾何證明的核心想法是創造全等和相似來試試下面幾道題目，你可以找到幾種方法解題？

(1) 已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 D 點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$

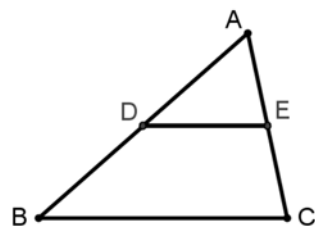
此題是內分比，課本是透過面積關係進行證明，有沒有別的方法呢？那，外分比 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$ 呢？可以有相同的方法嗎？



(2) 已知： $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AB}$ 中點，E 為 $\overline{AC}$ 中點。

求證：(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

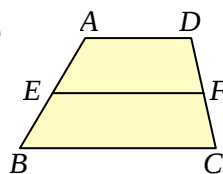
此題課本是利用平行線截比例線段與其逆敘述的性質來證明，如果撇開課程的順序，我們還可以怎麼證明此題？



(3) 已知：如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點。

求證： $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 。

此題和(2)是相同類型的題目，但是課本採用的方法與(2)不同，課本採用切割拼成三角形的型態後完成證明，有沒有可以更直觀可以一以貫之的想法呢？



二、試著撰寫下面名詞的核心概念。

1. 定義
2. 定理
3. 性質
4. 公理
5. 證明
6. 推理
7. 輔助線

三、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
定義			
定理			
性質			
公理			
證明			
推理			
輔助線			

四、觀摩、討論&修改

1. 參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1) 數學新世界--CA--推理證明 901 入班教學 20181210 (屏東縣滿州國中)

(2) 數學新世界--CA--推理與證明 教師共備 20181102 (臺南市永康國中)

PART1

(3) 數學新世界--CA--推理與證明 教師共備 20181101 (新北市蘆洲國中)

PART2

(4) 數學新世界--CA--談定義與性質 教師研習 20171114 (嘉義市南興國中) PART1

(5) 數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 九年級推理證明 1

(6) 數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 九年級推理證明 2

(7) 數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 教學共備 推理證明

(8) 數學新世界--CA--三角形三心推理證明 教師研習 20171120 (臺中市大德國中)

2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、學習單：完整版請參考數學新世界國中九年級教材

證明與推理

1. 你知道什麼是「相親」嗎？「相親」發揮了什麼功能呢？



2. 阿梅和朋友玩大風吹。大風吹，吹什麼？阿梅：吹有戴眼鏡的人！
這表示有戴眼鏡的人必須起身換座位，問題是怎麼才算是有戴眼鏡呢？以下這幾種算不算有戴眼鏡呢？

☐戴無框眼鏡 ☐戴隱形眼鏡 ☐戴有框卻沒有鏡片的眼鏡



3. 小仙說她是琉球人，這表示她是台灣人嗎？有沒有可能是日本人呢？



4. 「你是哪裡人呢？」請根據下面的情境回答前面的問題。

(1) 你在東港國中上學，老師問你時...

(2) 你在屏東市逛街，老闆問你時...

(3) 你在台北參加營隊，隊輔問你時...

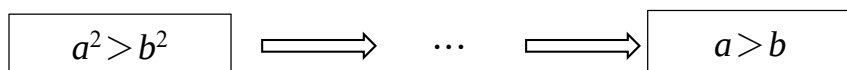
(4) 你在國外旅遊，外國人問你時....

5. 已知 a 、 b 為兩正數，若 $a^2 > b^2$ ，試證 $a > b$ 。

(1) 什麼是正數？

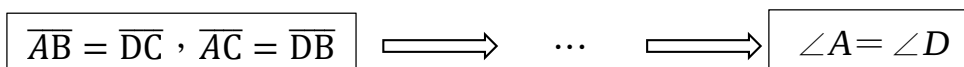
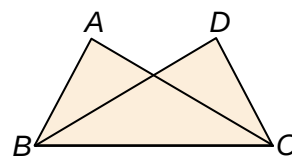
(2) 大小是怎麼比出來的？

(3) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



6. 如右圖， $\triangle ABC$ 與 $\triangle DCB$ 中， $\overline{AB} = \overline{DC}$ ， $\overline{AC} = \overline{DB}$
試證 $\angle A = \angle D$ 。

(1) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？

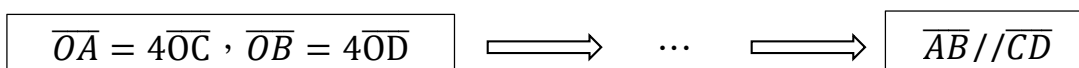
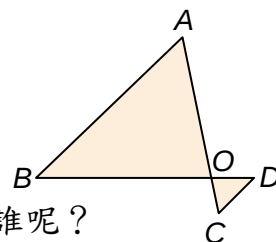


7. 已知：如右圖， $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 O 點，

$$\overline{OA} = 4\overline{OC}, \overline{OB} = 4\overline{OD}。$$

求證： $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 。

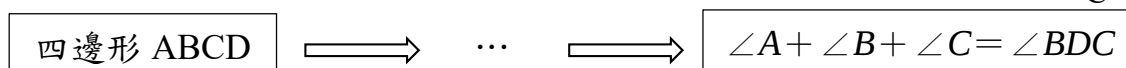
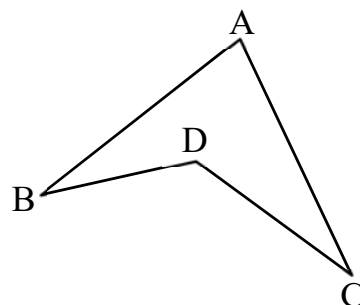
(1) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



8. 如右圖，試證 $\angle A + \angle B + \angle C = \angle BDC$ 。

(1) 這是四邊形還是三角形凹進去了呢？

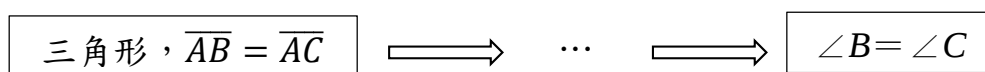
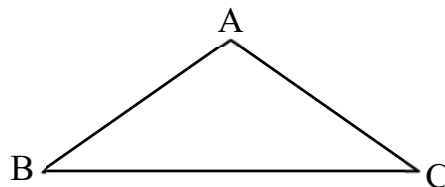
(2) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



9. 已知：如右圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。

求證： $\angle B = \angle C$ 。

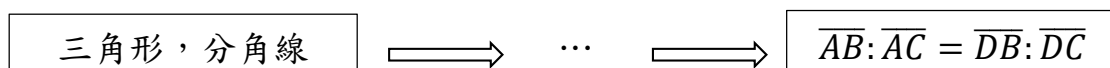
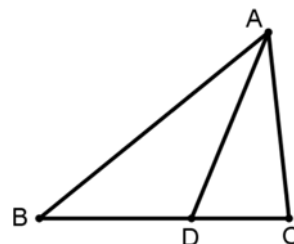
(1) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



10. 已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 D 點。

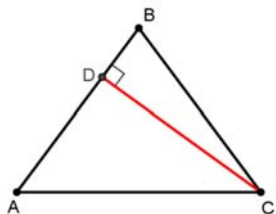
求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$

(1) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？

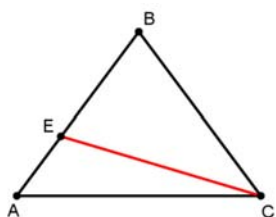


11. 畫出全等和相似

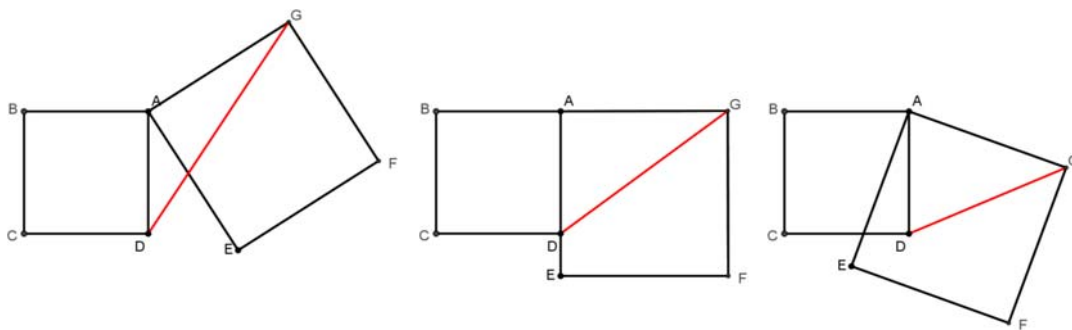
- (1) 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 、 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，請畫出會和 $\overline{CD}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



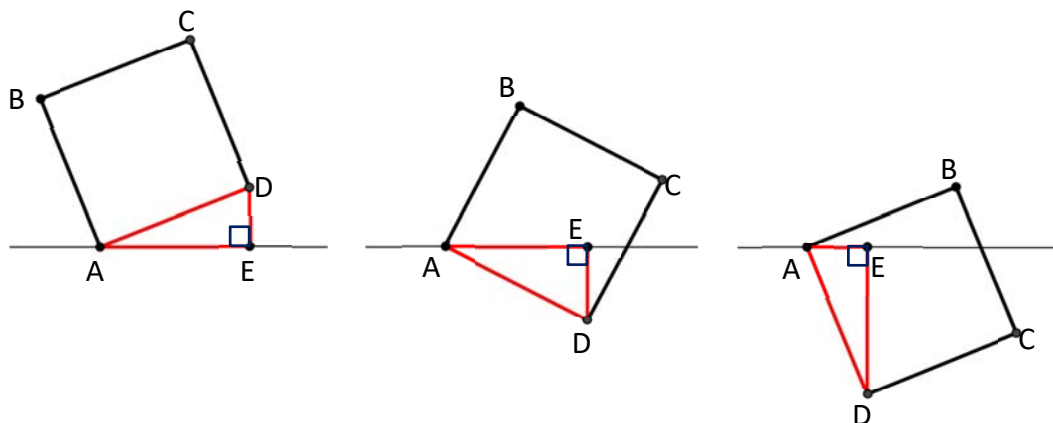
- (2) 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，請畫出會和 $\overline{CE}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



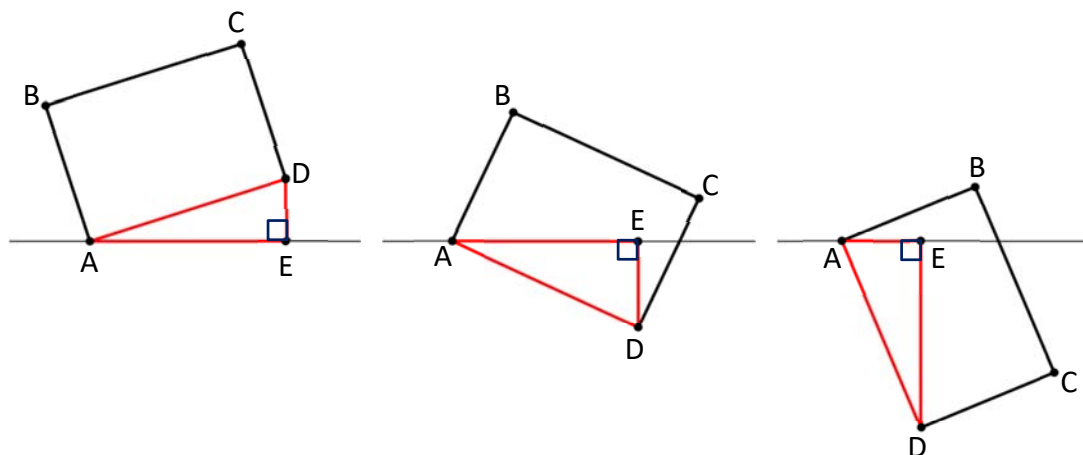
- (3) 如圖，四邊形 ABCD 及四邊形 AEFG 皆為正方形，請畫出會和 $\overline{DG}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



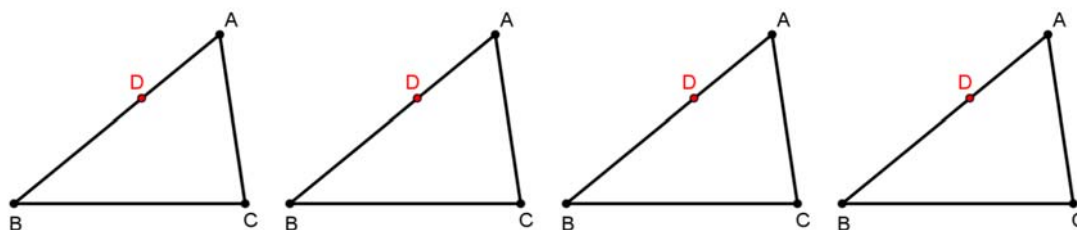
- (4) 如圖，四邊形 ABCD 為正方形，請畫出會和 $\triangle ADE$ 全等的三角形，並說明全等的理由。



- (5) 如圖，四邊形 ABCD 為長方形，請畫出會和 $\triangle ADE$ 相似的三角形，並說明相似的理由。



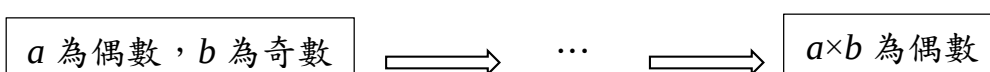
- (6) 請試著通過 D 點畫直線，利用三角形 AA 相似性質，畫出會和 $\triangle ABC$ 相似的三角形，總共有 4 種畫法喔，試著全部找出來！



12. 設 a 為偶數， b 為奇數，試證 $a \times b$ 為偶數。

(1) 什麼是偶數？什麼是奇數？偶數和奇數有什麼不同？

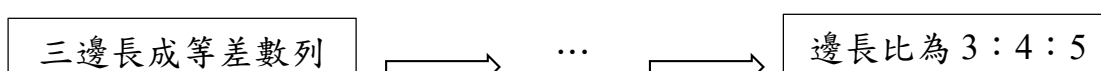
(2) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



13. 已知有一個直角三角形的三邊長成等差數列，試證此三角形三邊長的比為 3 : 4 : 5。

(1) 什麼是等差數列呢？

(2) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？

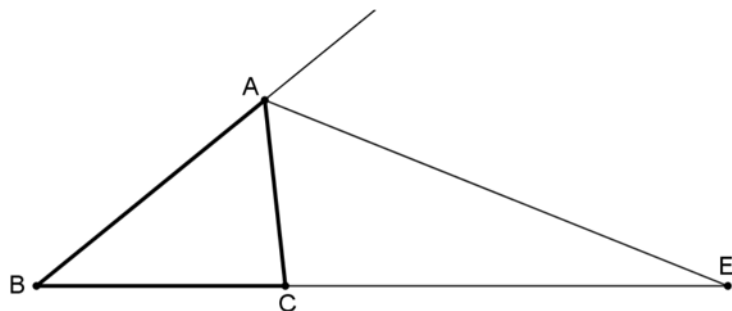


14. 已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的外角平分線與 $\overline{BC}$ 的延長線交於 E 點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$

(1) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？

三角形，外角分角線 $\Longrightarrow \dots \Longrightarrow \overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$

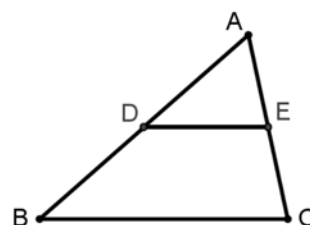


15. 已知： $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AB}$ 中點，E 為 $\overline{AC}$ 中點。

求證：(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

(1) 符合什麼條件就會有平行關係？

(2) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



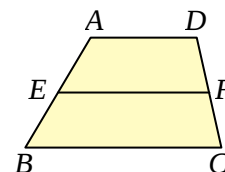
D、E 為中點 $\Longrightarrow \dots \Longrightarrow \overline{DE} \parallel \overline{BC} \Longrightarrow \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

16. 已知：如右圖，梯形 ABCD 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，E、F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點。

求證： $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 。

(1) 符合什麼條件就會有平行關係？

(2) 把下面的論述串起來，扮演「相親」角色的是誰呢？



E、F 為中點 $\Longrightarrow \overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC} \Longrightarrow \overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$

數學新世界教師種子生根計畫-重要連結

生根計畫網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>



數學新世界 FB 社團

<https://www.facebook.com/groups/nhmath>

CA 行程表

<https://goo.gl/a6YNxW>



生根計畫官方 LINE

<https://line.me/R/ti/p/%40uje9883i>



Tel: 04-7232105 ext.3288

E-mail: nhmath@nhmath.com

Address: 彰化縣彰化市進德路 1 號數學系

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>