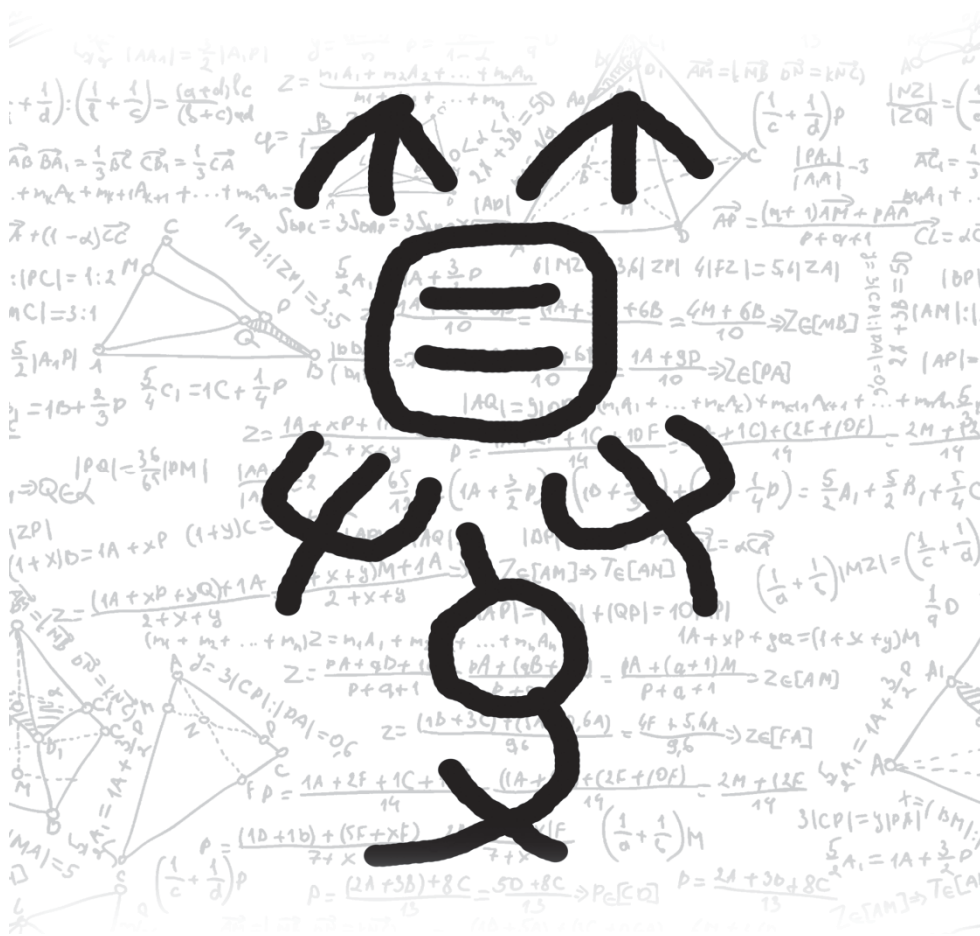


臺中市黎明國中資優課程

三角函數

K-12 核心概念



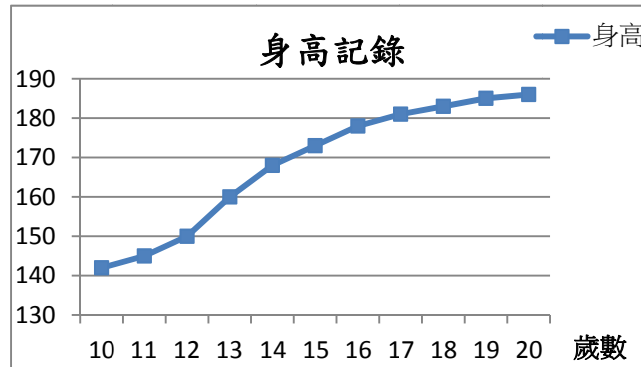
數學演算 根生新世界

107 年 12 月 14 日

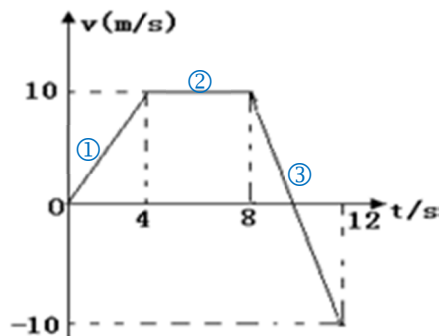


1. 小高每個月都會記錄自己的身高一直維持到 20 歲，他計算了 10 歲到 20 歲的平均身高做為每年的身高資料，並將之記錄於如下表格，且依此畫了一個折線圖。

歲數	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
身高(公分)	142	145	150	160	168	173	178	181	183	185	186



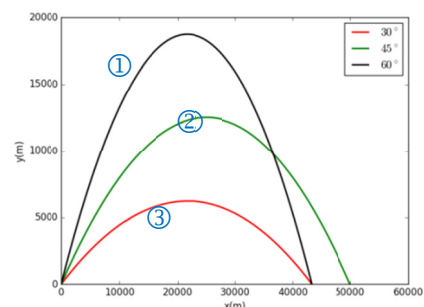
- (1) 根據這個圖表，我們可以得知小高 10 歲之前的身高變化嗎？ ☐ 可以 ☐ 不可以
 - (2) 請問在這期間，小高幾歲時的身高長的比較明顯？ _____ 歲到 _____ 歲
 - (3) 請問在這期間，小高幾歲時的身高漸趨穩定？ _____ 歲到 _____ 歲
 - (4) 你覺得表格的記錄和折線圖的呈現，它們最大的不同是什麼？
 - (5) 若小高有某一年沒做記錄，那麼，他可以知道那一年前後的身高變化嗎？ ☐ 可以 ☐ 不可以
 - (6) 如果小高在表格上的 12 歲記錄了兩筆身高，那麼，他可以知道 11 歲到 12 歲或者 12 歲到 13 歲的身高變化嗎？ ☐ 可以 ☐ 不可以
 - (7) 請你想一想，課本函數的定義為：設 A 、 B 為兩個非空集合，若對集合 A 中之任一元素 x ，在集合 B 中恰含有一元素與之對應。它的道理是什麼呢？
2. 請試著回答下列問題：
- (1) 下方是某一輛車時間變化與速度變化的函數圖形，試著說明這台車子在這 3 階段行進時的情況。
 - (2) 假設下方是三顆炮彈發射的位置變化圖。已經知道三顆炮彈發射的初始速度是 700m/s，請試著說明它們位置移動的情形。



①：0~4 秒時 _____

②：4~8 秒時 _____

③：8~12 秒時 _____



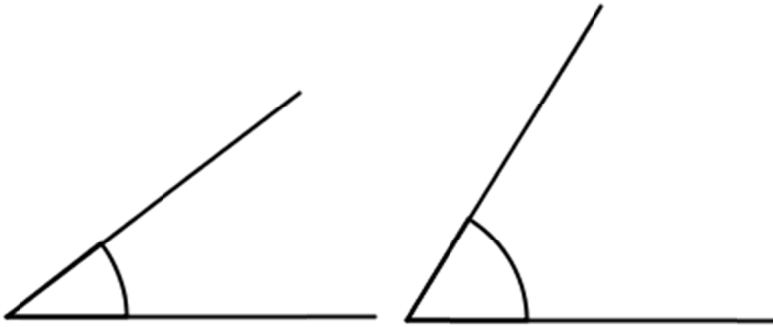
①： _____

②： _____

③： _____



- 3.想一想，你可以找到幾種不同的紀錄方式來記錄下面的角度有多大？
也就是說，當角度在改變的時候，什麼也跟著改變了呢？



- 4.拉壞的時候是拉什麼來拉出陶器(圓)的大小的呢？

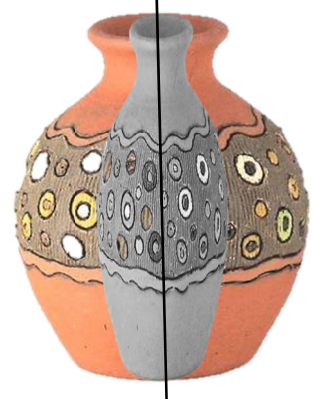
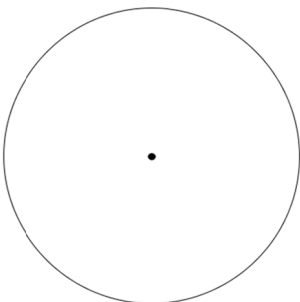


- 5.下面是大水缸的製造過程，這種方法稱為土條盤築法，首先做好器物底部，再將事前練好的土條從底部沿著層次一層一層逐步盤繞上去，直到想要到達的高度為止，再以拍陶用具拍打出型體直到完成。你知道那一層一層的土條要做多長才會剛剛好呢？



鶯歌高職李進福老師(20150317 去世)

- 6.如果想做瓶口這麼大的大水缸，土條應該準備多長才會剛剛好呢？瓶口的大小是指哪裡呢？





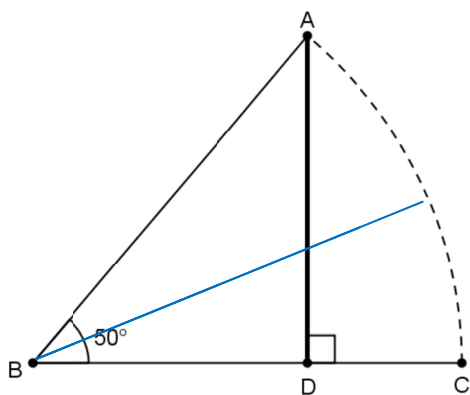
7.量弧長：度度量 and 徑度量(半徑是 1 的弧長，圓周長=直徑 $\times$ 圓周率 $=1\times 2\times \pi=2\pi$)， $\pi=3.1415926\dots$

徑度量	0												π
度度量	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180

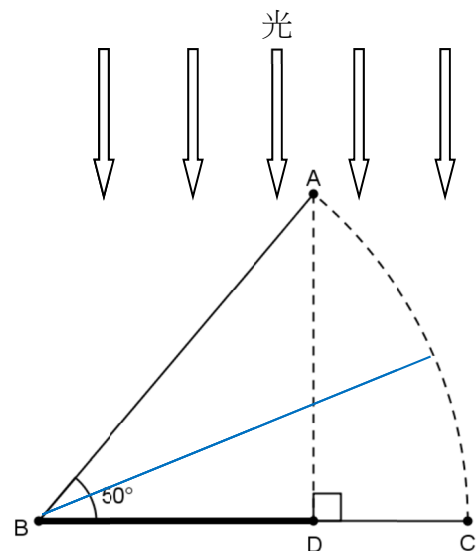
8.請問徑度 1 和 60 度的弧長，誰比較長？

9.分別利用“高”和“投影長”來表示一個角的大小。

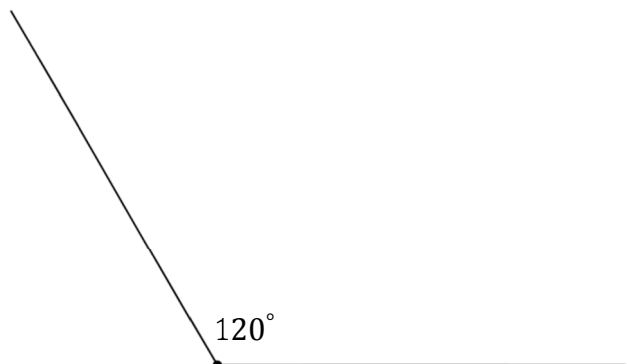
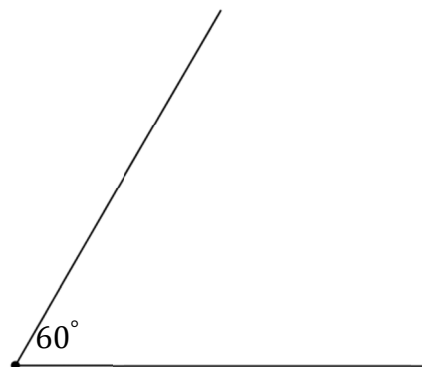
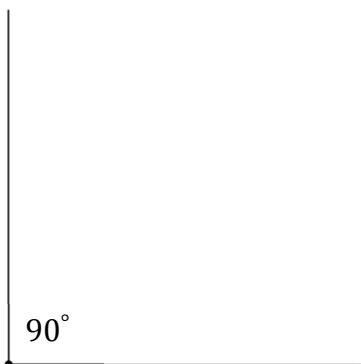
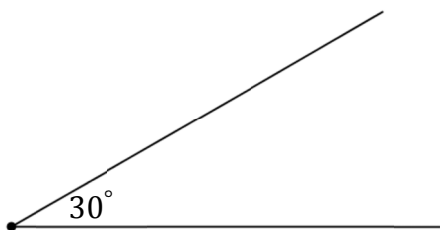
(1)利用“高”來表示一個角的大小



(2)利用“投影長”來表示一個角的大小

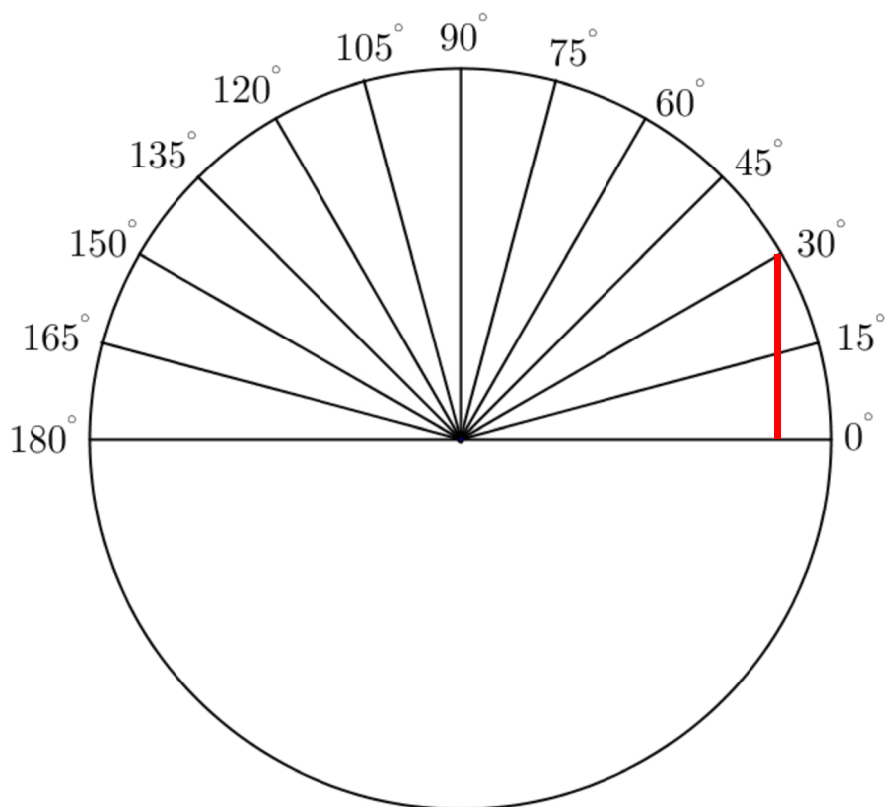


(3)請畫出下列角的“高”和“投影”。





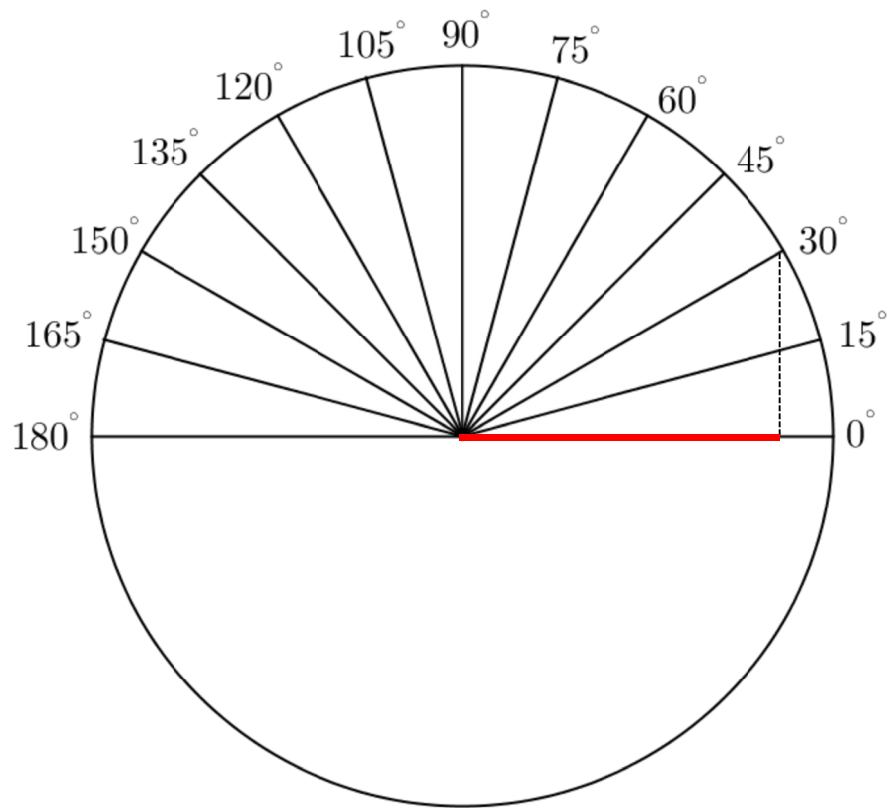
10.請複製出角的“高”，並將“高”的長度畫在下方對應表格中。



度度量	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
徑度量	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π



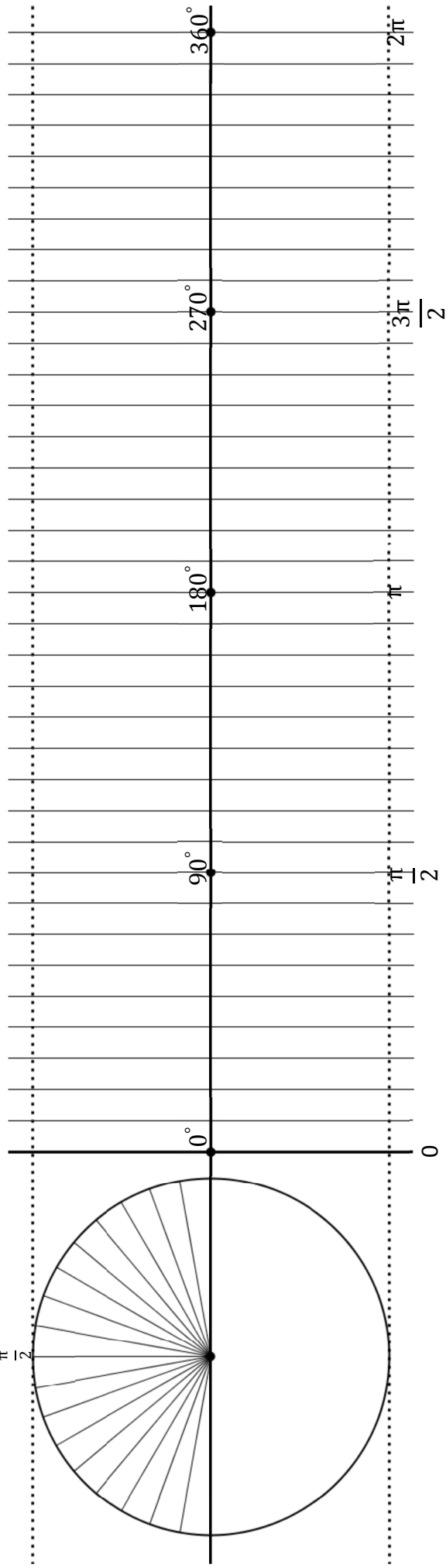
11. 請複製出角的“投影長”，並將“投影長”的長度畫在下方對應表格中。



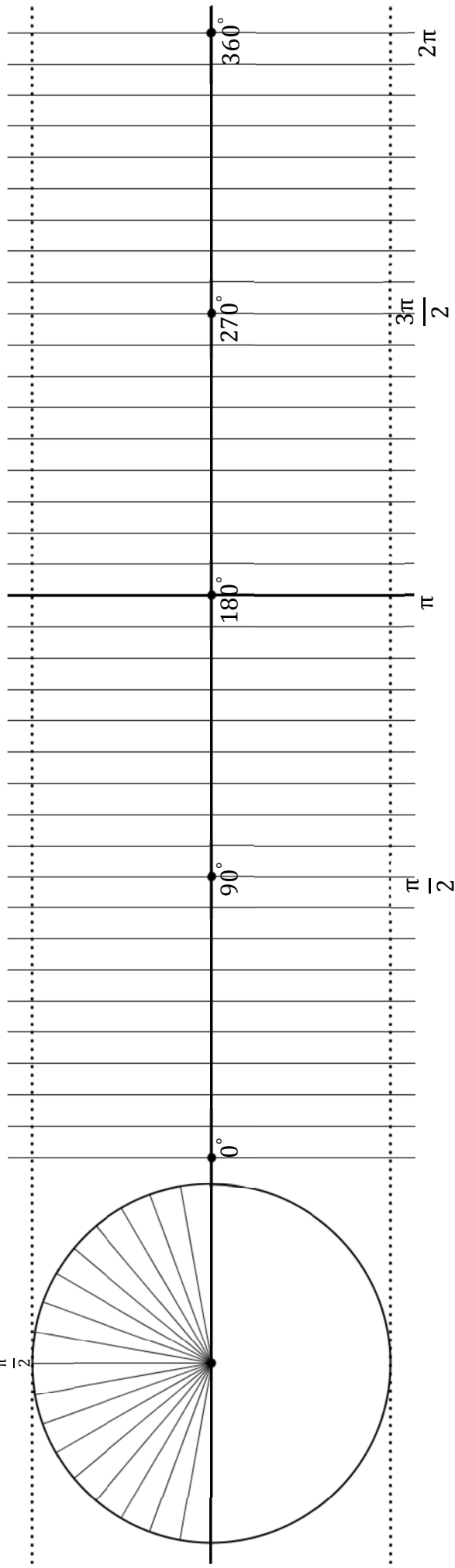
度度量	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
徑度量	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π

12. 精緻化！

(1) 高度變化函數：請複製出角的“高”，將“高”的長度畫在下方對應表格中。

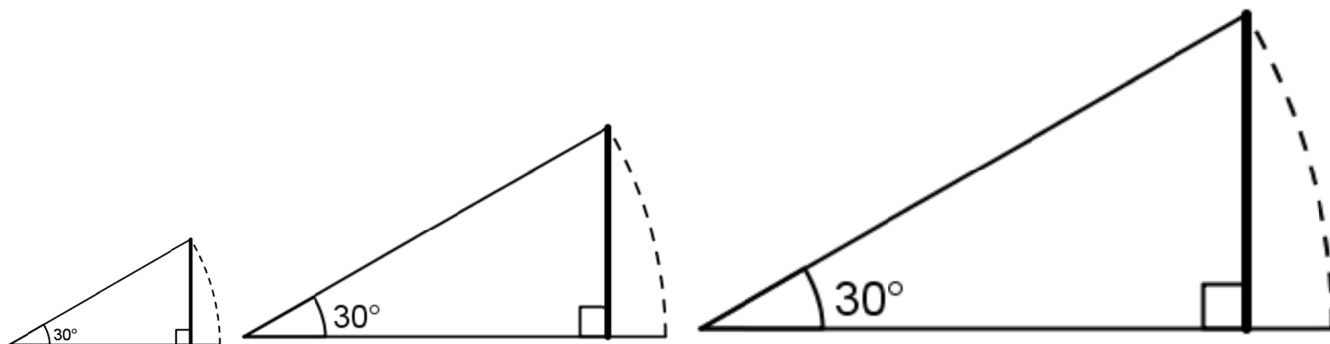


(2) 投影變化函數：請複製出角的“投影長”，將“投影長”的長度畫在下方對應表格中。



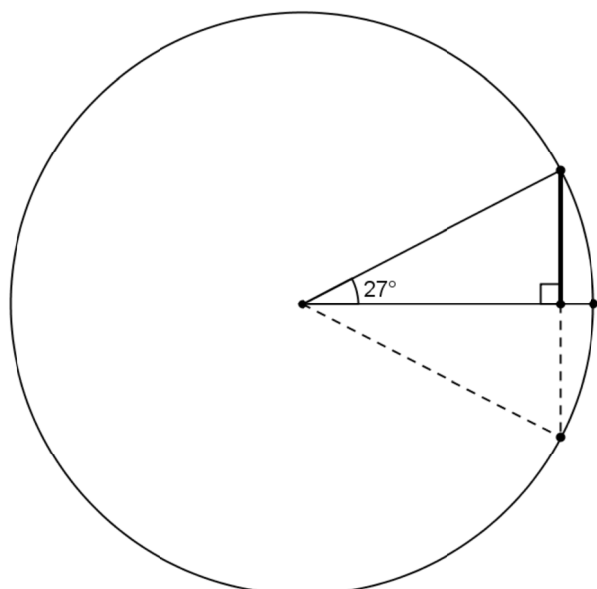


13. 下面都是 30° 角的“高”，相同大小的角度卻有不同長度的“高”，但是我們又希望可以利用“高”的長度來表示角度的大小，怎麼辦才好？

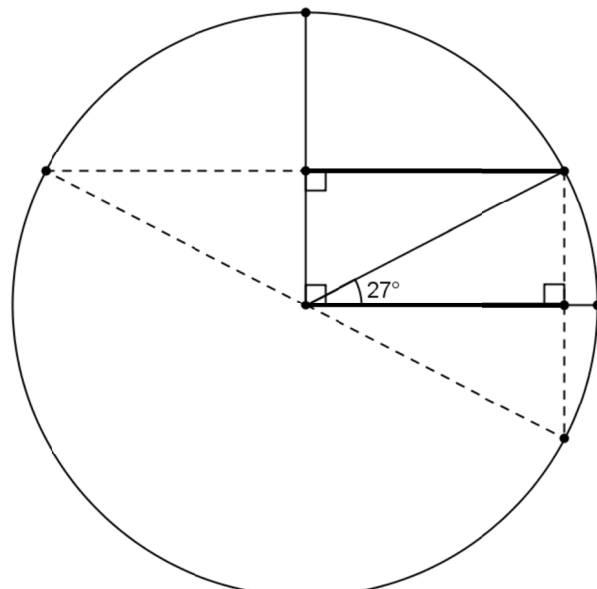


14. 三角函數的命名

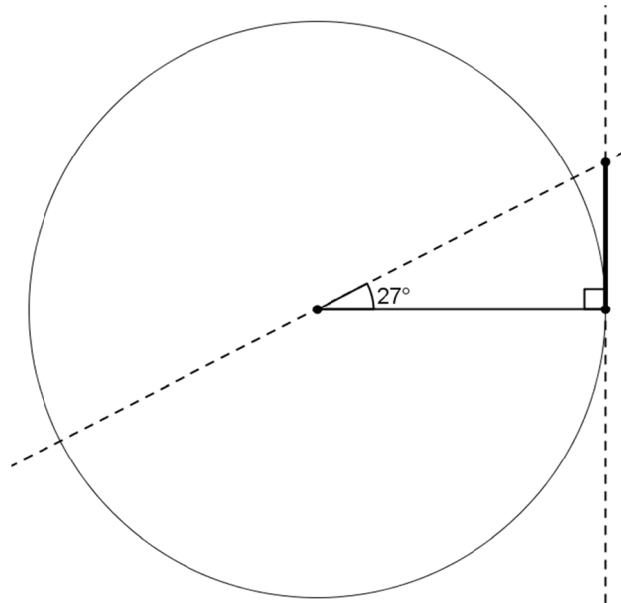
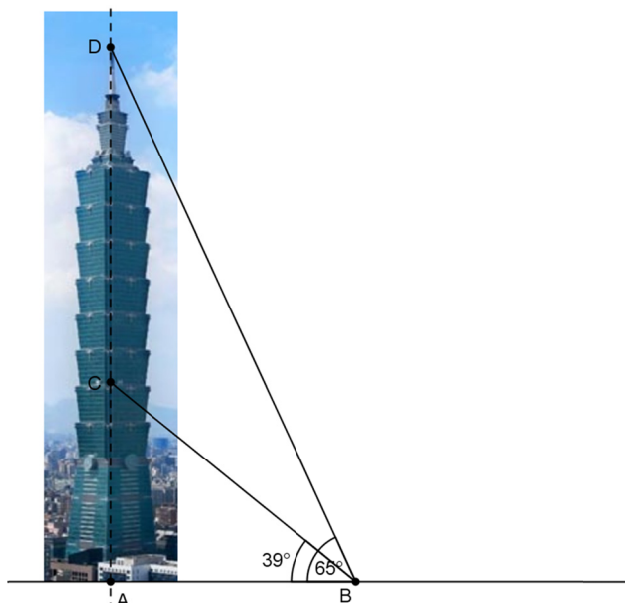
(1) 高度變化函數



(2) 投影變化函數



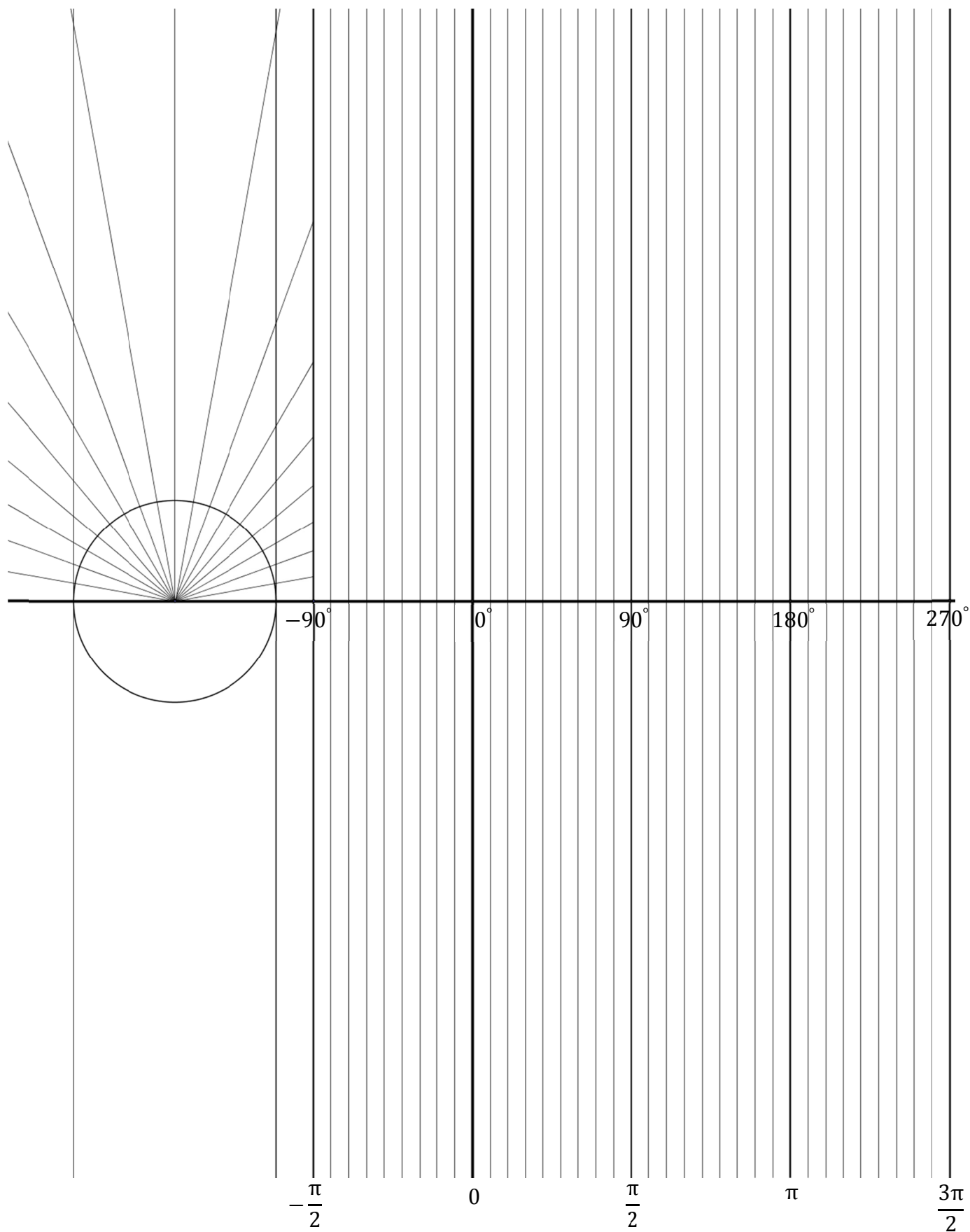
15. 仰角不同，可以看到的高度也不同！



16. 三角函數的命名：(1) 仰角高度變化函數 (2) 仰角的餘角高度變化函數。

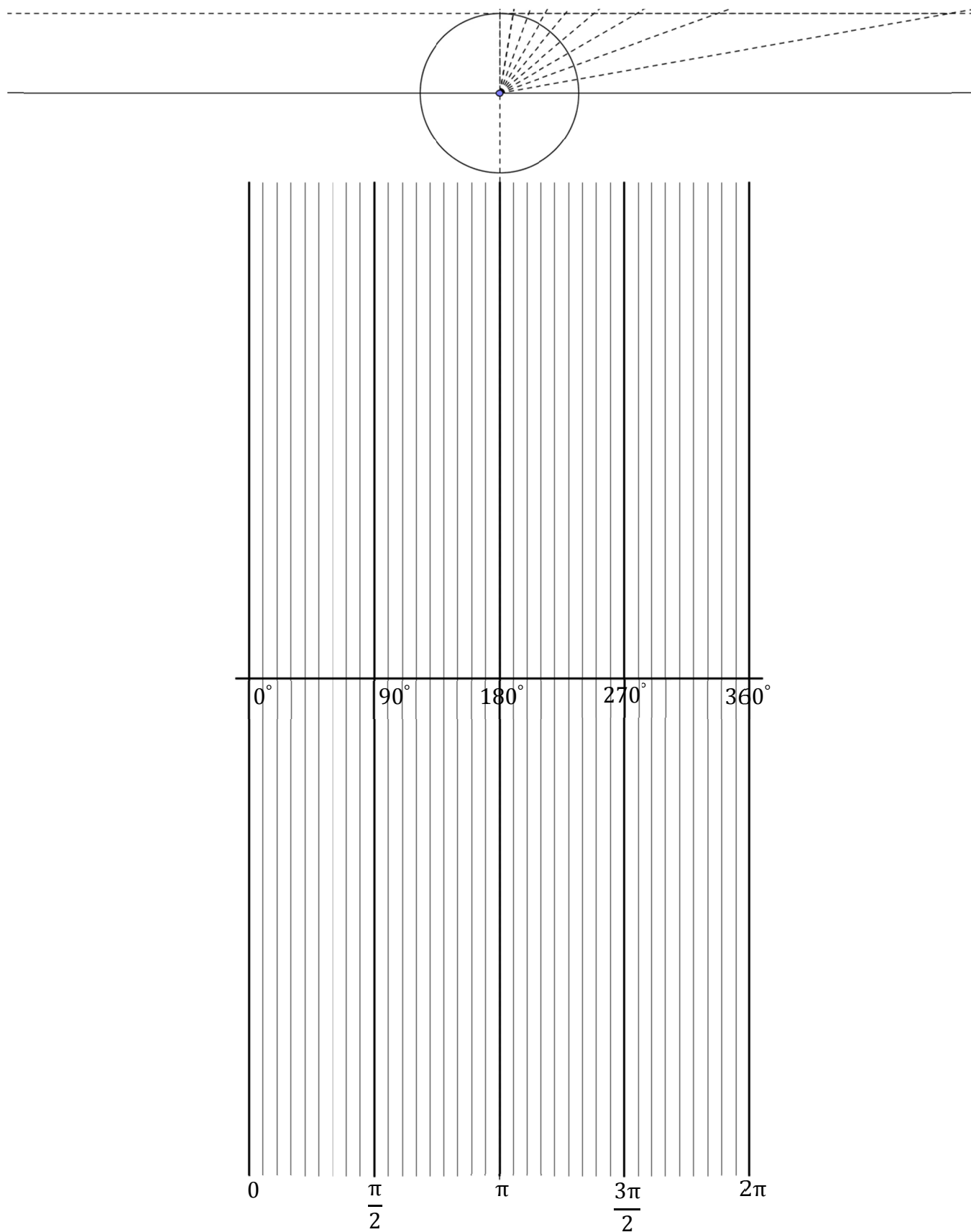


17.精緻化！請複製角所正對到的“切線長”，將“切線長”的長度畫在下方對應表格中。



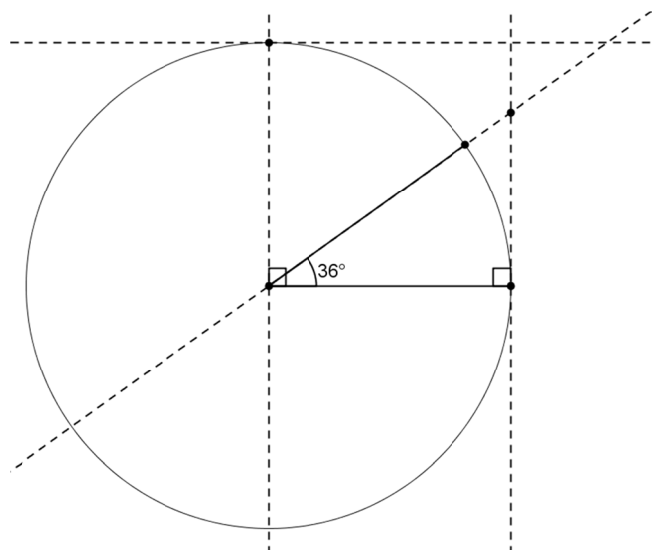


18.精緻化！請複製“餘角”所正對到的“切線長”，將“切線長”的長度畫在下方對應表格中。

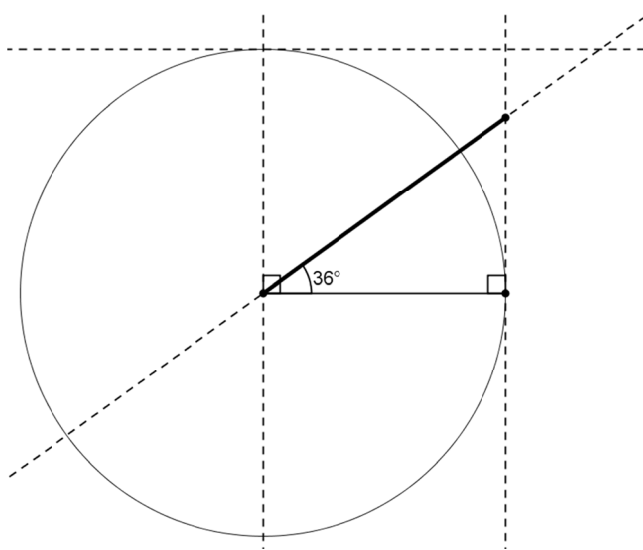




19. 請在下面單位圓中，畫出這個角和餘角所正對的弦長和切線長，做出正確標記。



20. 回顧第 16 題，當仰角改變的時候，什麼也跟著變了？你會怎麼命名呢？

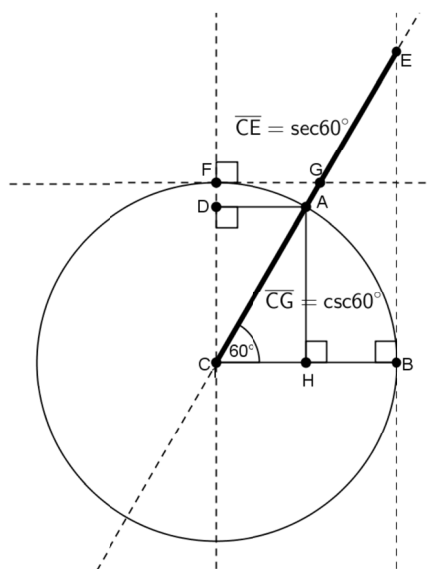
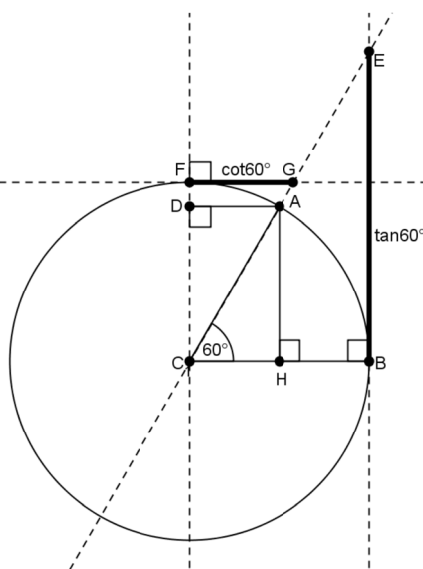
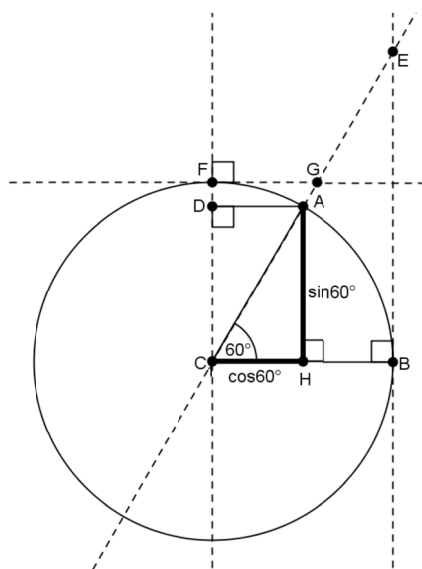


21. 三角函數總整理

正弦函數、余弦函數

正切函數、餘切函數

正割函數、余割函數

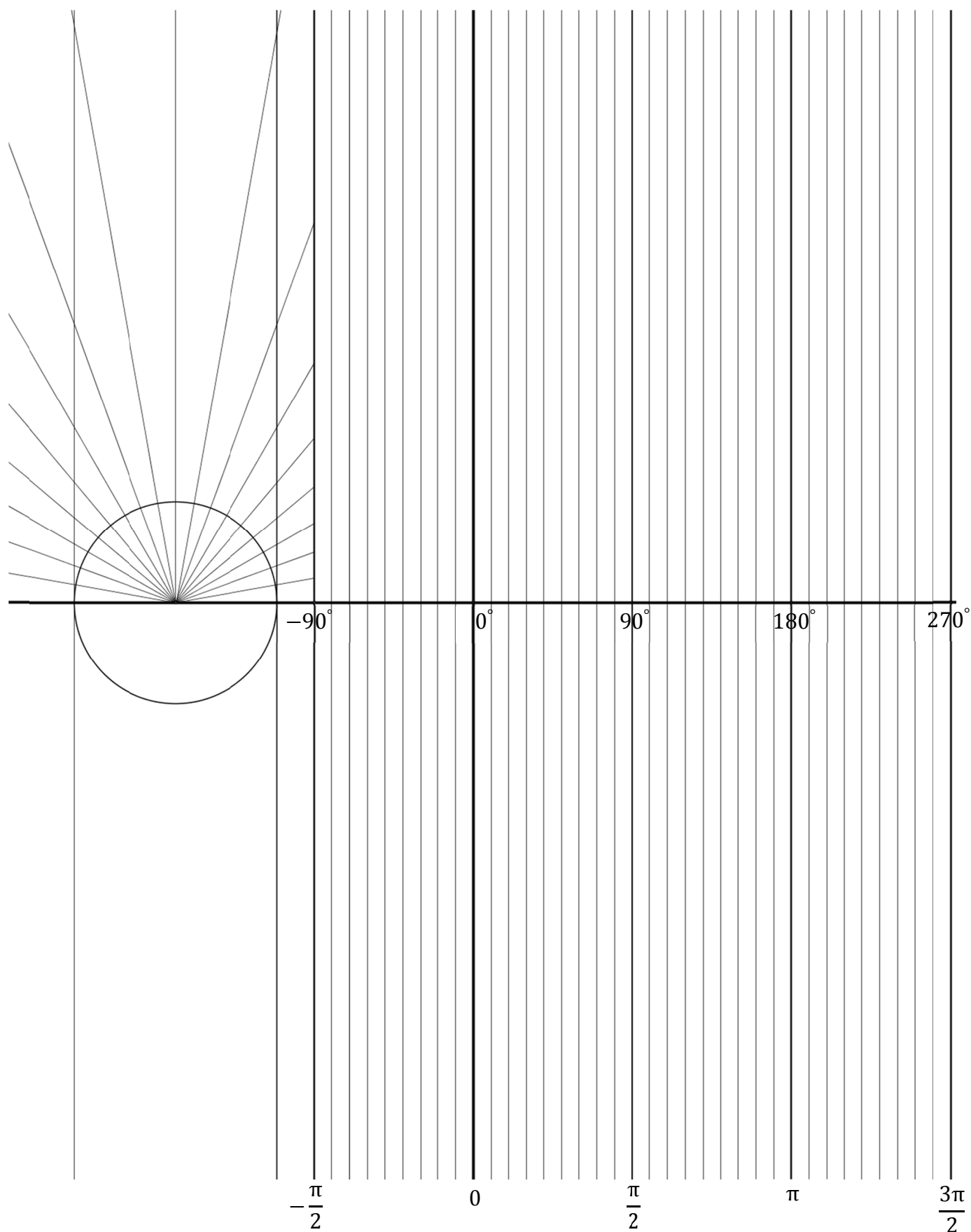


22. 觀看第 21 題的圖形，利用畢氏定理寫出一些三角函數關係式。

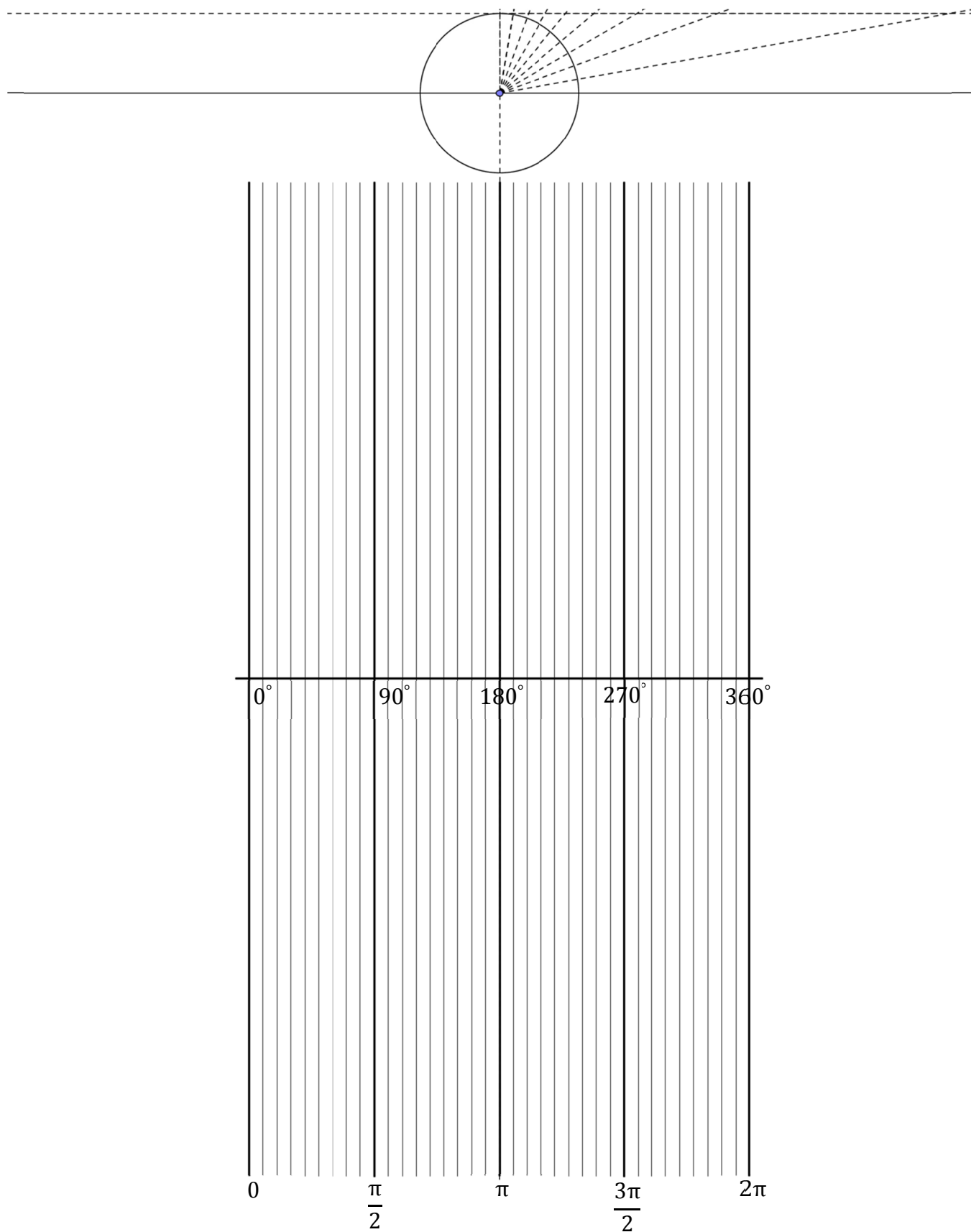
23. 觀看第 21 題的圖形，利用相似形寫出一些三角函數關係式。



24.精緻化！請複製角正對到的“割線長”，將“割線長”的長度畫在下方對應表格中。



25.精緻化！請複製“餘角”正對到的“割線長”，將“割線長”的長度畫在下方對應表格中。



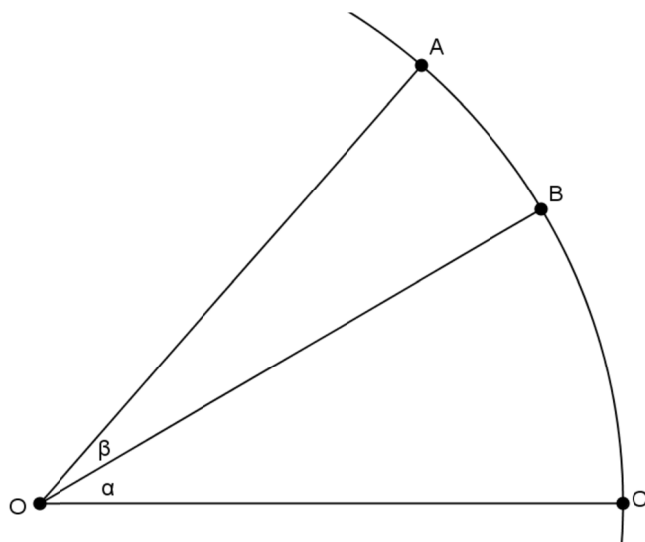
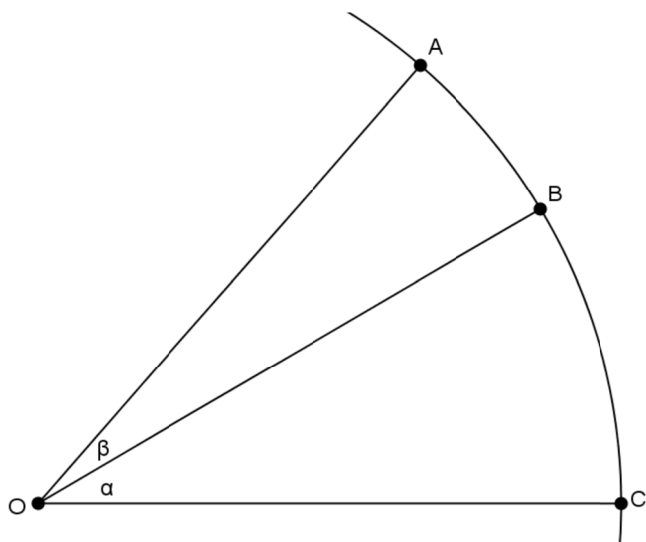
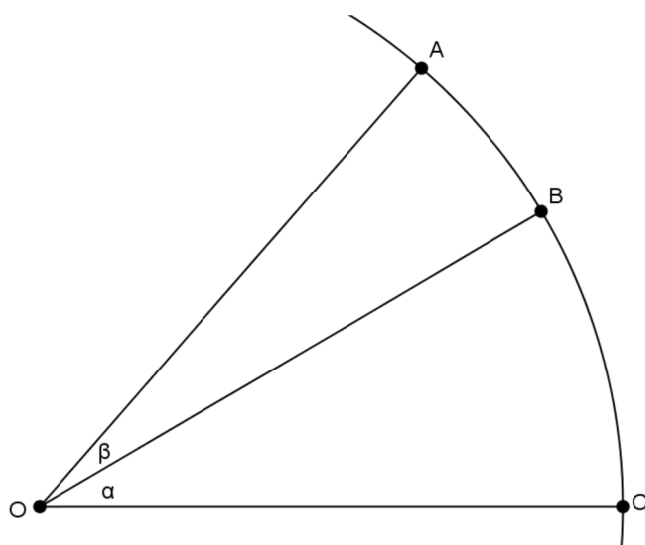
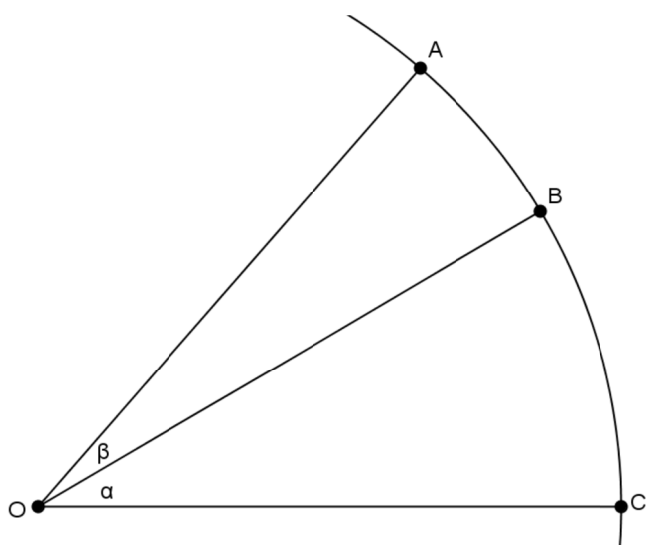


26. 和角公式

(1) 請畫出 $\sin \beta$ 、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ 。

(2) 畫畫看！怎麼算出 $\sin(\alpha + \beta)$ ？

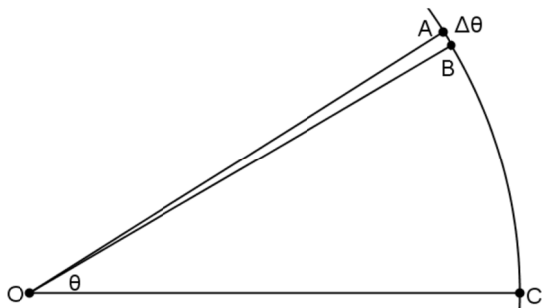
(3) 畫畫看！怎麼算出 $\cos(\alpha + \beta)$ ？



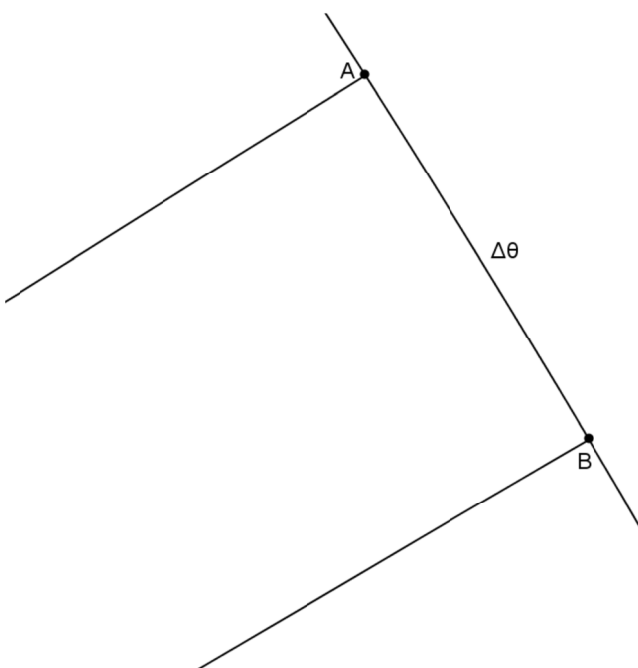


27. 微分：正弦函數、餘弦函數

(1) 想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sin \theta$ 的變化量

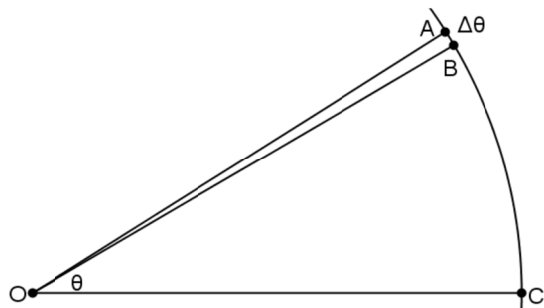


(2) 請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sin \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)

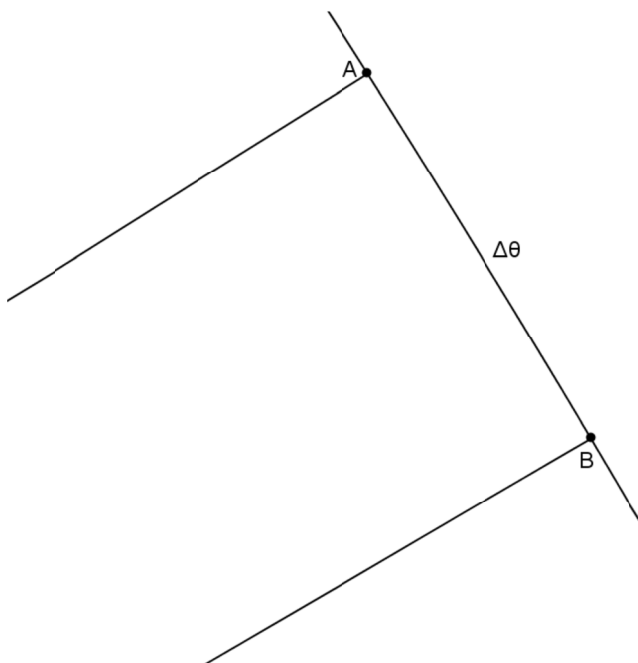


(3) 請求出 $\frac{\Delta \sin \theta}{\Delta \theta}$ 的值

(1) 想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cos \theta$ 的變化量



(2) 請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cos \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)

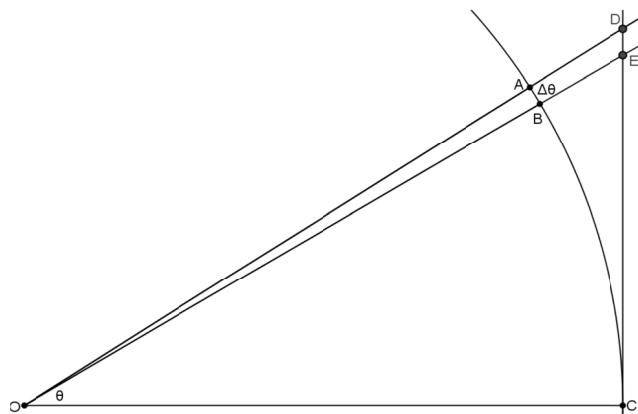


(3) 請求出 $\frac{\Delta \cos \theta}{\Delta \theta}$ 的值

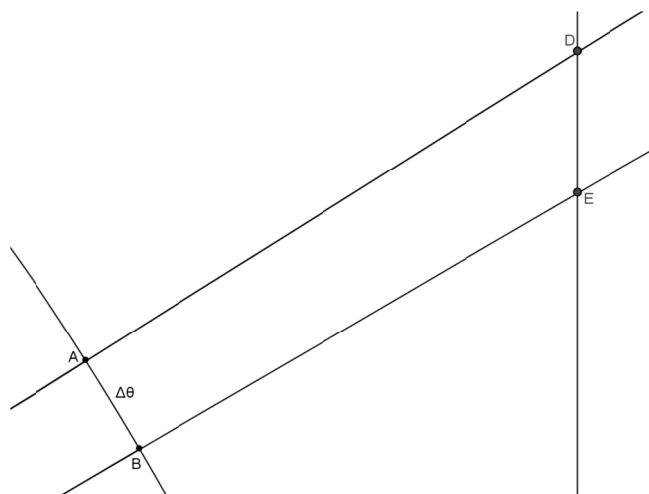


28.微分：正切函數、餘切函數

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\tan \theta$ 的變化量

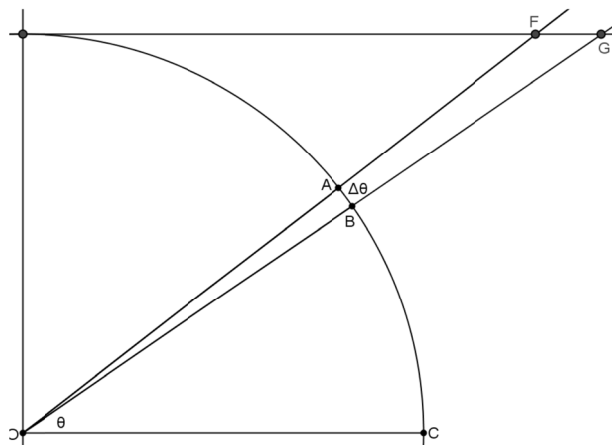


(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\tan \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)

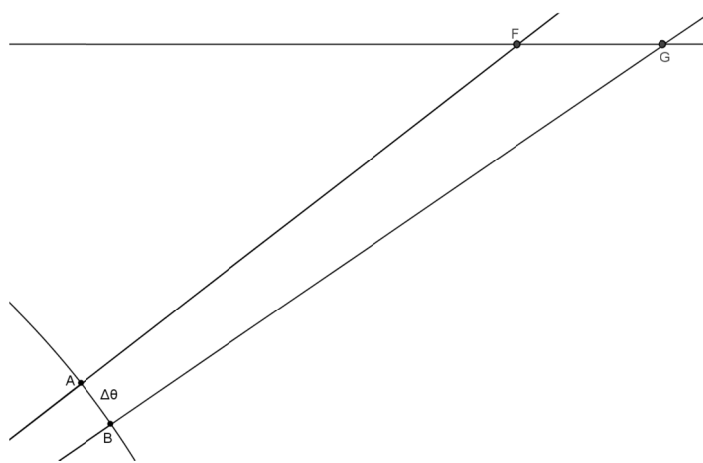


(3)請求出 $\frac{\Delta \tan \theta}{\Delta \theta}$ 的值

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cot \theta$ 的變化量



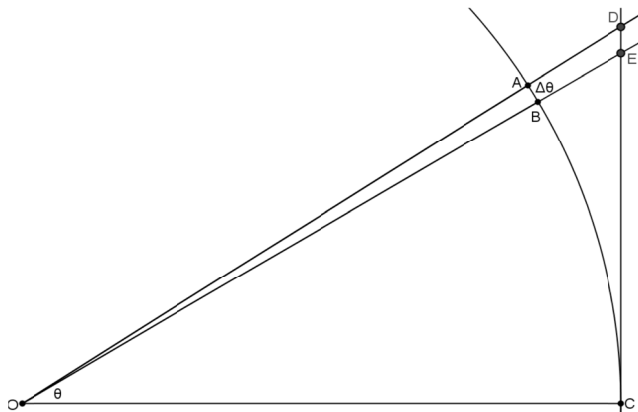
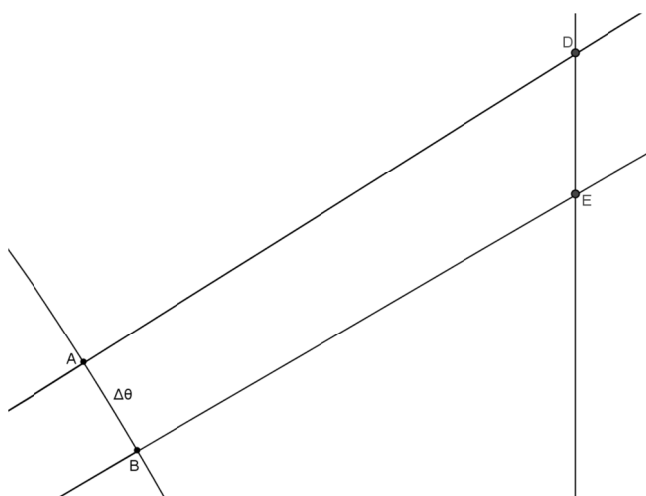
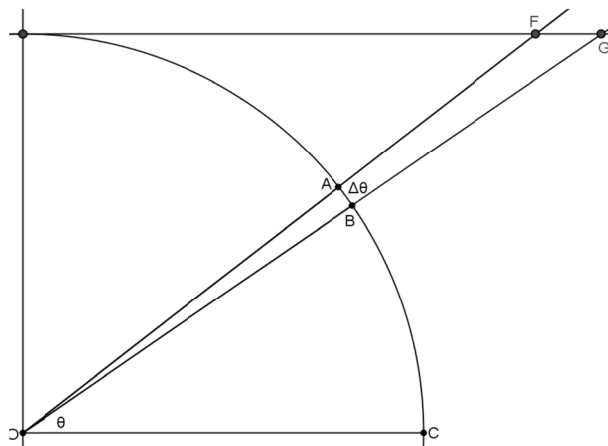
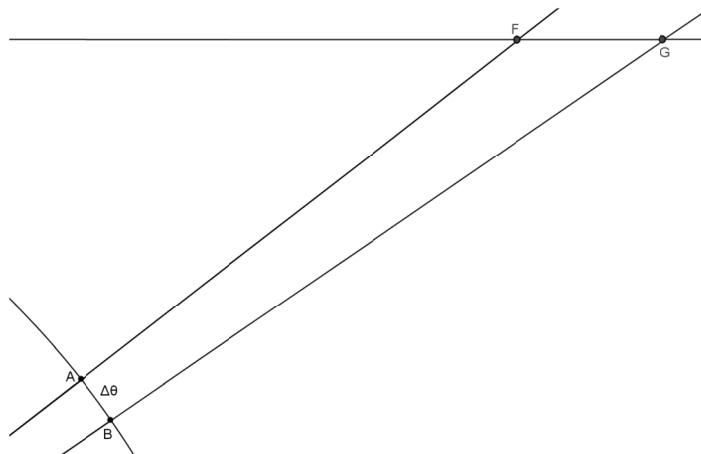
(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cot \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)



(3)請求出 $\frac{\Delta \cot \theta}{\Delta \theta}$ 的值



29.微分：正割函數、餘割函數

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sec\theta$ 的變化量(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sec\theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)(3)請求出 $\frac{\Delta \sec \theta}{\Delta \theta}$ 的值(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\csc\theta$ 的變化量(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\csc\theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)(3)請求出 $\frac{\Delta \csc \theta}{\Delta \theta}$ 的值

重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>