

素養導向的數學教學材料

目標導向

施皓耀 白晨如 陳梅仙 蔡晴穎

2019. 8. 13-15

數學演繹算
根生新世界

數學新世界的數學教育

- ④ 從數學的哲學觀來反思學習階段數學的樣貌
- ④ 從心理學的角度來構思概念發展的脈絡
- ④ 從社會心理學的角度來看待生師(書)的角色
- ④ 從社會建構的觀點來引動學習的歷程

以比長短為例

反思樣貌



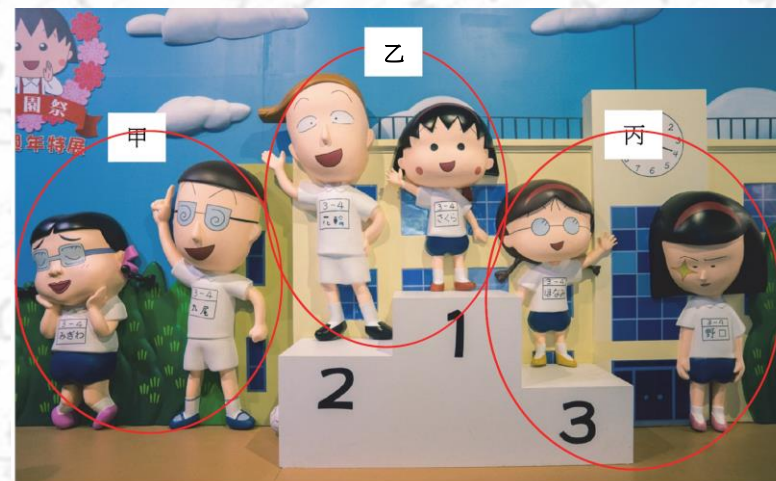
生師角色



構思脈絡



引動歷程



素材來自文化

⑤ 文明推演，知識早已**無形融入**文化

⑤ 從文化的**運作**理解其思維架構，

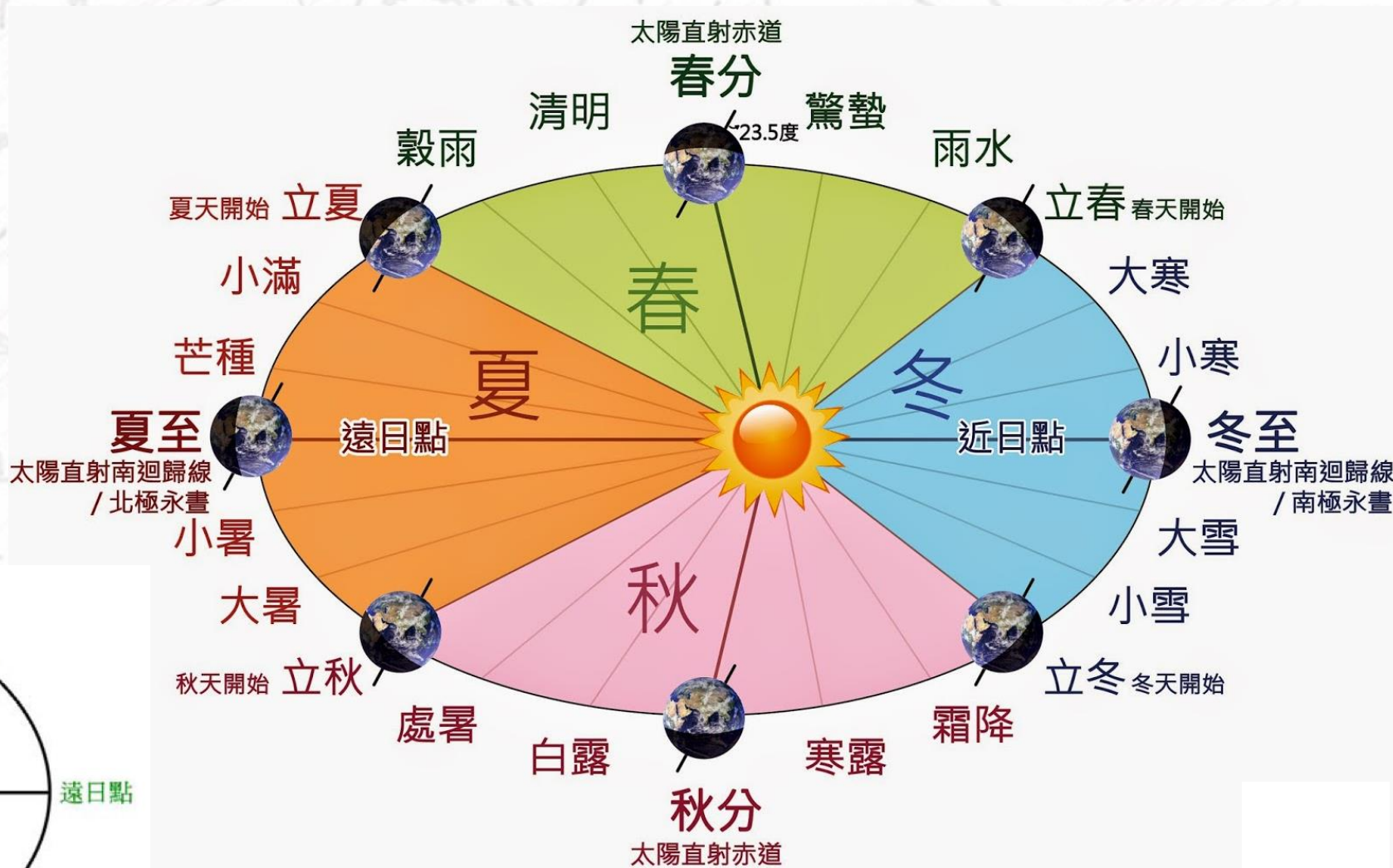
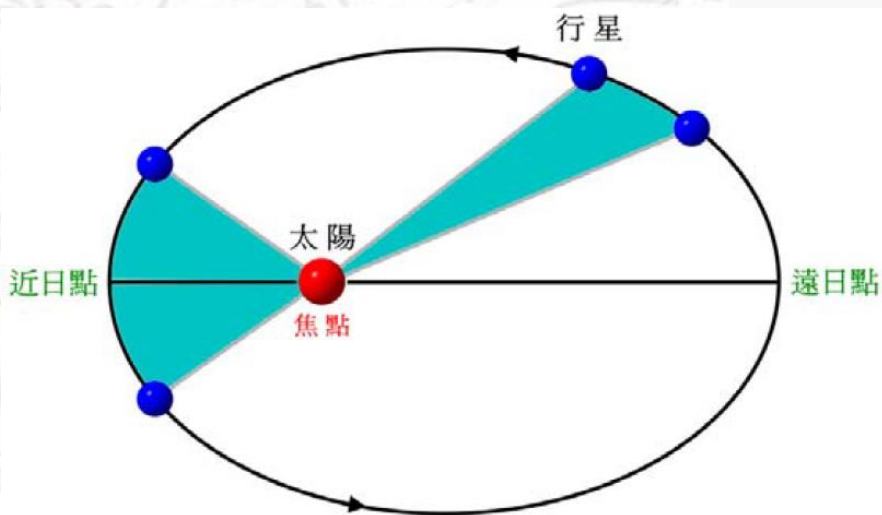
並**汲取**先人智慧。

⑤ 從傳統文化與新興思維的
相互**衝擊**，激起無限的想像！

突破、超越！



24節氣



斤兩



度量



音樂

A_4 $f = 440 \text{ Hz}$
 $y(t) = \sin(2\pi 440 t)$

$F\#_4$ $f \approx 370 \text{ Hz}$
 $y(t) = \sin(2\pi 370 t)$

D_4 $f \approx 294 \text{ Hz}$
 $y(t) = \sin(2\pi 294 t)$

$$y(t) = \sin(2\pi f t)$$

f = frequency (in Hz)

t = time (in seconds)

0 seconds

0.042/(2 π) seconds

美術



gregorymoine.com

文字沿革

甲骨文

金文

小篆

隶书

楷书

𠨍 𠨍 𠨍 人 人
𠨍 𠨍 𠨍 鳥 鳥
𠨍 𠨍 𠨍 水 水
𠨍 𠨍 𠨍 牛 牛

𠨍

𠨍

車

車

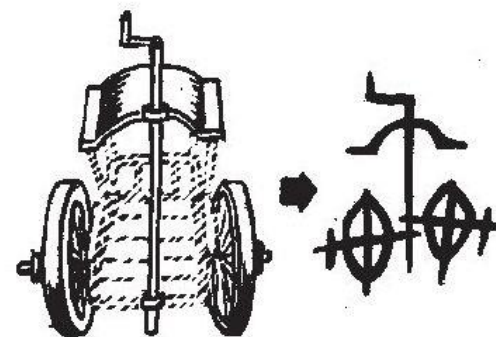
車

车

车

车

车(車)chē



这是一个典型的象形字：甲骨文和金文的多数写法是车厢、车辕和两个车轮俱全，形象逼真；后来车轮逐渐简化为一个。

生活作息



贝多芬

简单的晚餐，
一杯啤酒一管烟

在一家酒馆休息，
读报

长时间散步
口袋里揣着铅笔与纸张

红酒晚餐

睡眠

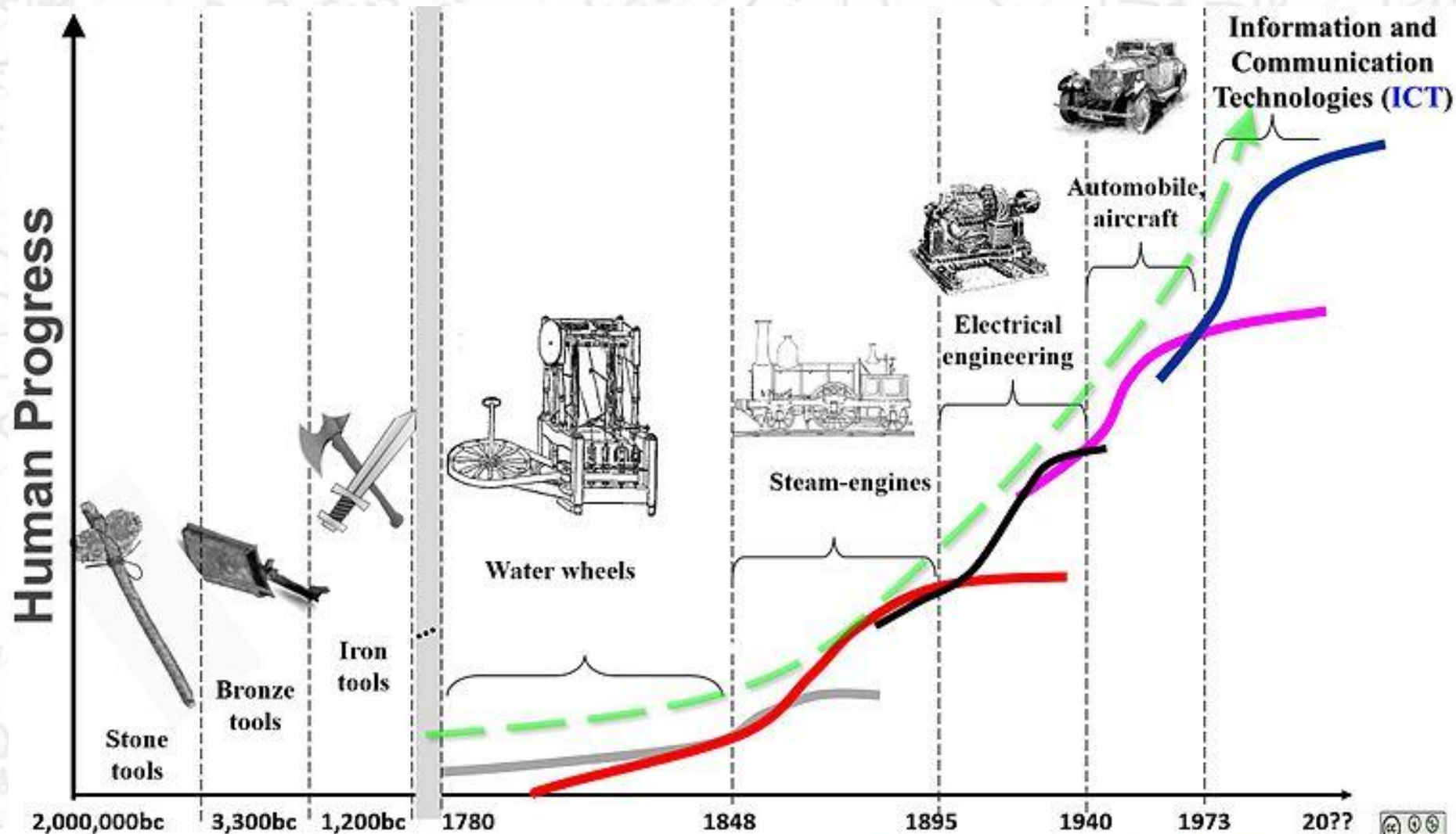
精心准备早餐咖啡
每杯精选 60 颗咖啡豆
一颗一颗亲自挑选

作曲



TARGET

思想

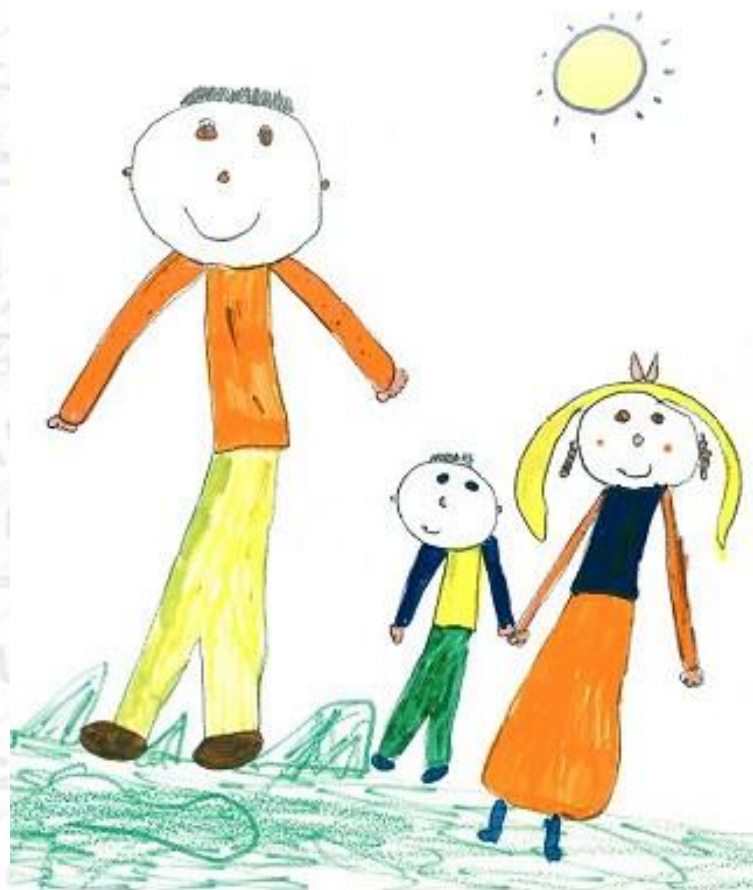


M. Hilbert, Online Course *Digital Technology & Social Change*, University of California: <https://canvas.instructure.com/courses/949415>

Digital Technology & Social Change by Martin Hilbert is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License.

想要表達甚麼？怎麼畫？

認識圖形



甚麼時候做甚麼？怎麼說？

認識鐘錶



你看到什麼？
怎麼讓你的同伴也看到？



從心理學的角度 來構思概念發展的脈絡

目標導向的教材設計



有意義數學學習的基礎-目的

🐛 在 **情境** 下形塑目的

🐛 在 **目的** 下確認探索標的：跟目的相關的資訊及項目

🐛 **形成問題**（猜想預期結果）：相關資訊及項目間的關係（由運算加以詮釋）

🐛 從結果找理由，從現象 **歸納結論**。

以負數為例

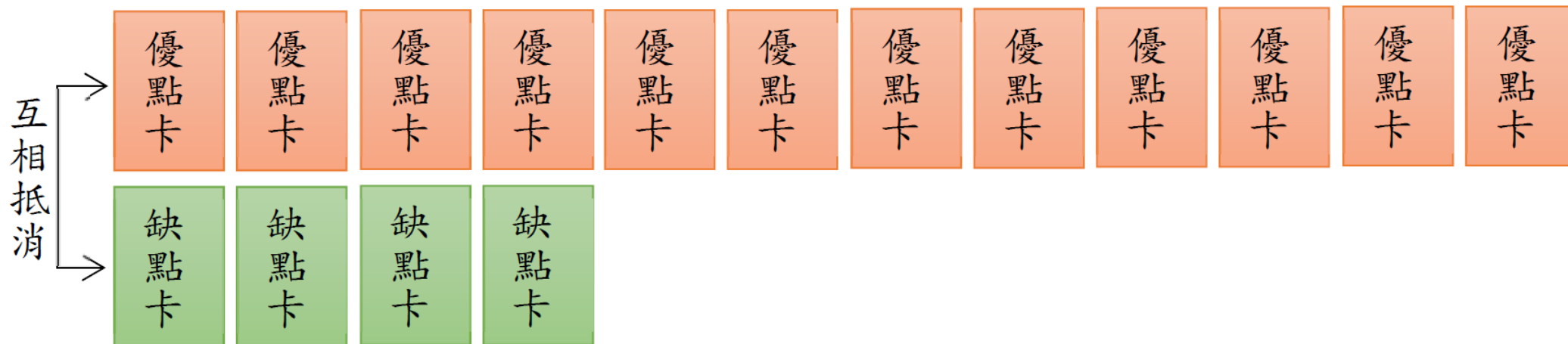
在情境下形塑目的



天氣涼了，阿明穿起了外套走路上學去，阿明到學校後和同學們一起將教室的門窗打開，第二節上體育課，阿明把外套脫掉，上完課，阿明很渴，一下子就把水壺中的水喝完了，還没能解渴，就趕緊到學校的飲水機裝水喝，午後大陽光好大都照進教室裡了，同學把窗簾拉起來遮陽，遮陽讓教室有些暗，只好開燈上課，慢慢的，到了放學的時分，阿明和同學們將窗簾拉開，門窗關妥，阿明和同學一起快樂的回家去了。

在目的下確認探索標的

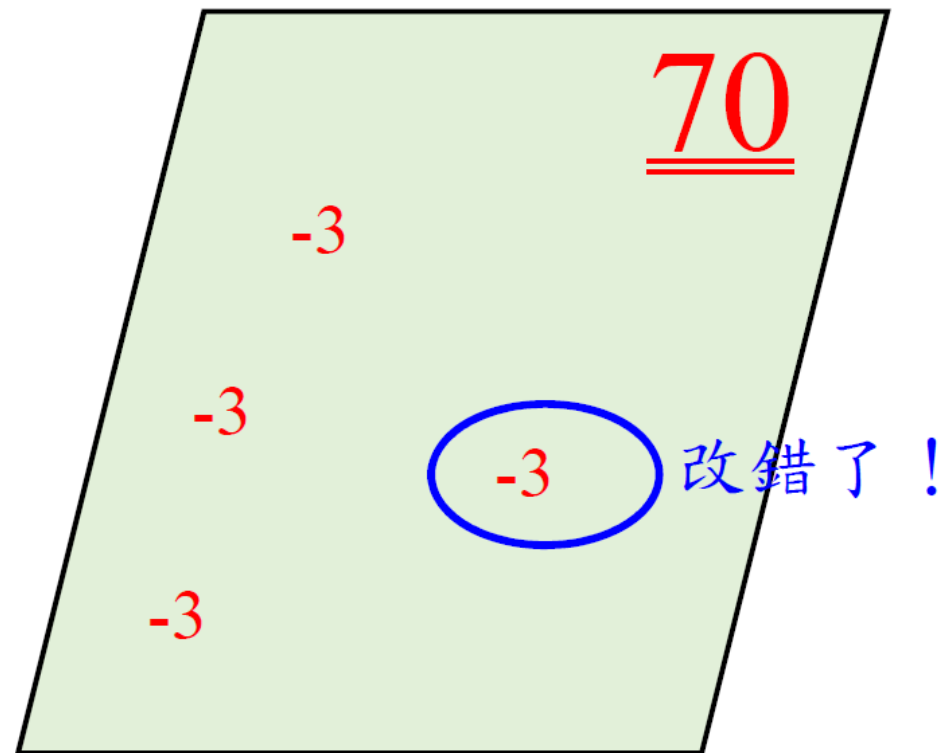
阿明的學校實施榮譽制度，學生有好的表現就可以取得「優點卡」給予鼓勵，不小心表現不好時給予「缺點卡」作為警惕，而且一張缺點卡可以與一張優點卡互相抵消



我們紀錄為 (12張優點卡) + (4張缺點卡) = (8張優點卡)。

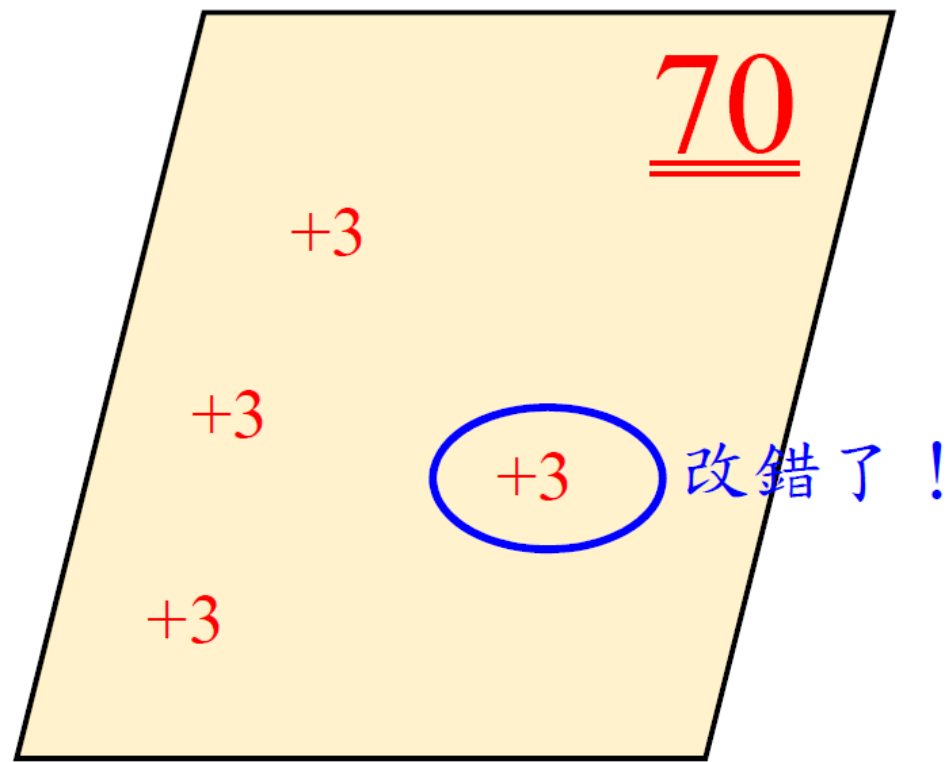
形成問題（猜想預期結果）

學校段考時，小明數學考了70分，
檢討考卷時，發現老師改的考卷
改錯了，有道題他**答對了**，卻被
老師**扣了3分**，這時候老師該怎
麼做呢？

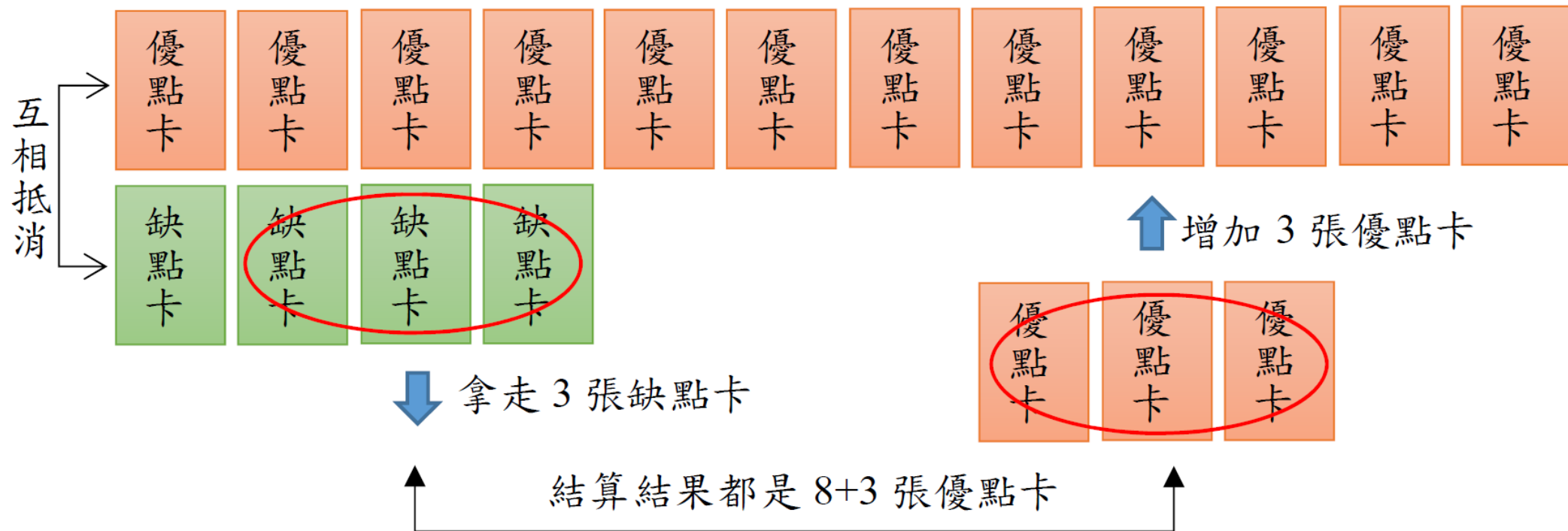


形成問題（猜想預期結果）

學校段考時，小華數學考了70分，
檢討考卷時，發現老師改的考卷
改錯了，有道題他**答錯了**，卻被
老師**加了3分**，這時候老師該怎
麼做呢？



從結果找理由，從現象歸納結論



先確立目的何在？

🌀 能不能擁有更全面描述事物的數字系統？

🌀 再來一次：

把相關的項目列出來

相互抵消如何列式

歸納結論

從結果找理由

我們把上面的圖示紀錄如下：

「增加3張優點卡」=「拿走3張缺點卡」

加上正3=減去負3。

使用相同的想法：

「增加3張缺點卡」=「拿走3張優點卡」

加上負3=減去正3。

從結果找理由，從現象歸納結論

結論

1. 正數和負數相加會互相抵消。
2. 減去一個數，相當於是加上這個數的抵消數（相反數）。

也就是說：減 a 等於加 $-a$

互動

從社會心理學的角度
來看待生師(書)的角色

調適性？服從性？



調適性



服從性



面對文化的反應態度：

從**自身**的觀點理解**接納**或調整以**發揚**

從**服從**智慧的態度**學習**遵循與**宣揚**

啟動學習

從社會建構的觀點
來引動學習的歷程

以釜剖木、知行合一



學習的核心-分析

🧠 分辨(區分)是學習的起點，

🧠 分析(以斧剖木)是學習的靈魂，

🧠 條理是學習的骨肉，

🧠 行是學習的體現。



🧠 判天地之美，析萬物之理(莊子，天下)

學習

應用



知與行



知行合一



行中求知，知之實踐

知識的應對

🧐 學習場域VS. 應用場域

🧐 場域的屬性不是地點而是人的態度

🧐 學習不必然在教室，應用未必在日常



以實數系為例

分析是學習的靈魂

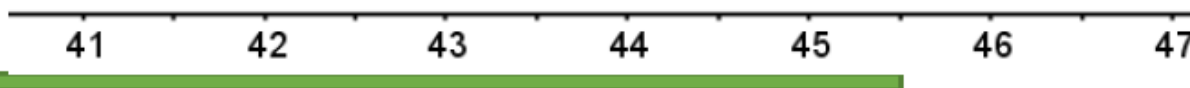
數，因使用需求而產生。

只要是實際看得到的長度，都可以用「實數」系統形容。

我們需要哪些數，才能描述所有可能的長度？

阿銘想量竹竿的長，他把一端放在 0 的位置...

1. 若另一端剛好落在刻度 45 公分的位置，那麼量到的竹竿長為_____公分。
(整數)
2. 若另一端剛好落在刻度 45 和 46 公分中間的位置，那麼量到的竹竿長為_____公分。(分數)

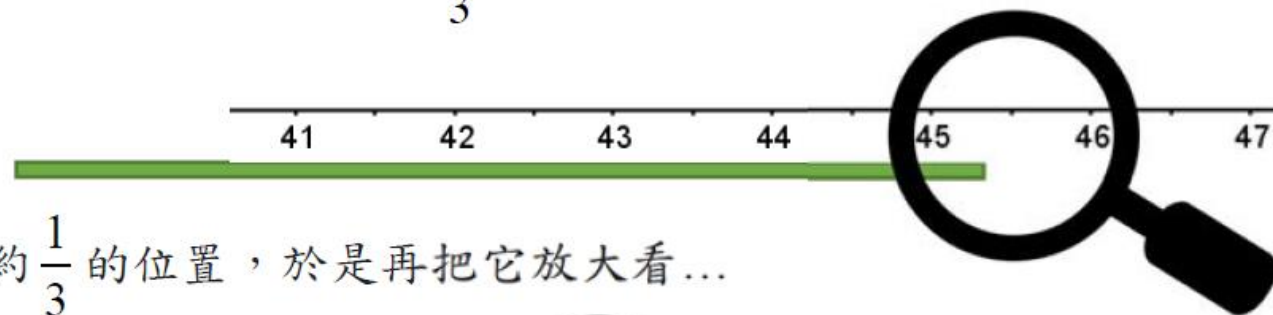


不斷放大

不斷分析

看到數系

3. 若另一端落在刻度 45 和 46 公分大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，我們把它放大來看...



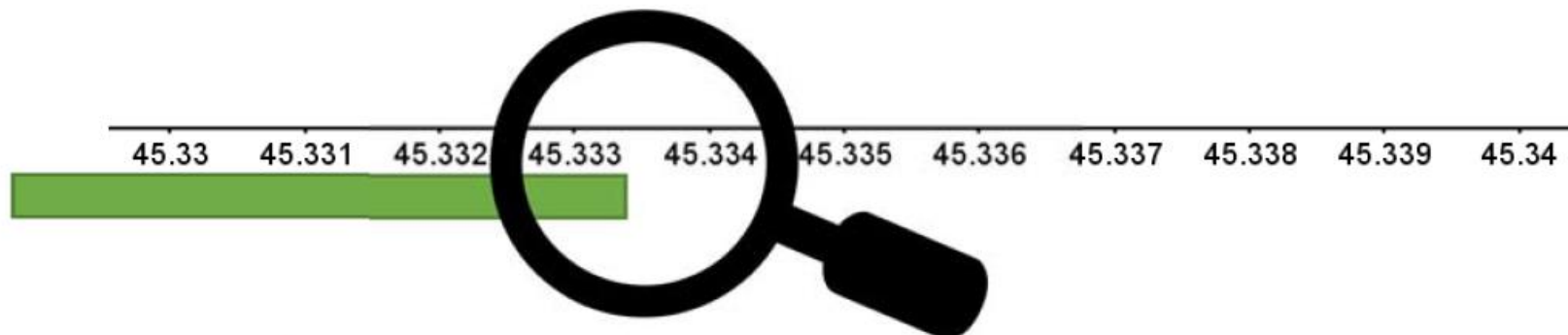
發現它還是在大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，於是再把它放大看...



發現它還是在大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，於是再把它放大看...



再放大...



行中求知，知之實踐

想想看...「無窮」這件事

無窮，是個形容詞，不能直接拿來算，只能靠推論。

阿銘量身高，機器上方的量尺不斷下降，靠近阿銘的頭...慢慢的、不斷的靠近...，當尺靠到頭的時候，量到的長度是尺的長度還是阿銘的身高？它們是一樣的嗎？



以絕對值為例

知識應對的場域與態度

絕對值，意思是「我不在乎這個數的正負（性質），
只想知道它的值有多大～」

媽媽用奶瓶餵baby喝奶，每餐都固定準備200ml的奶。
第一餐，baby喝完後剩下30ml。請問baby這餐喝了多少奶？
你如何算出來的呢？請列出算式。

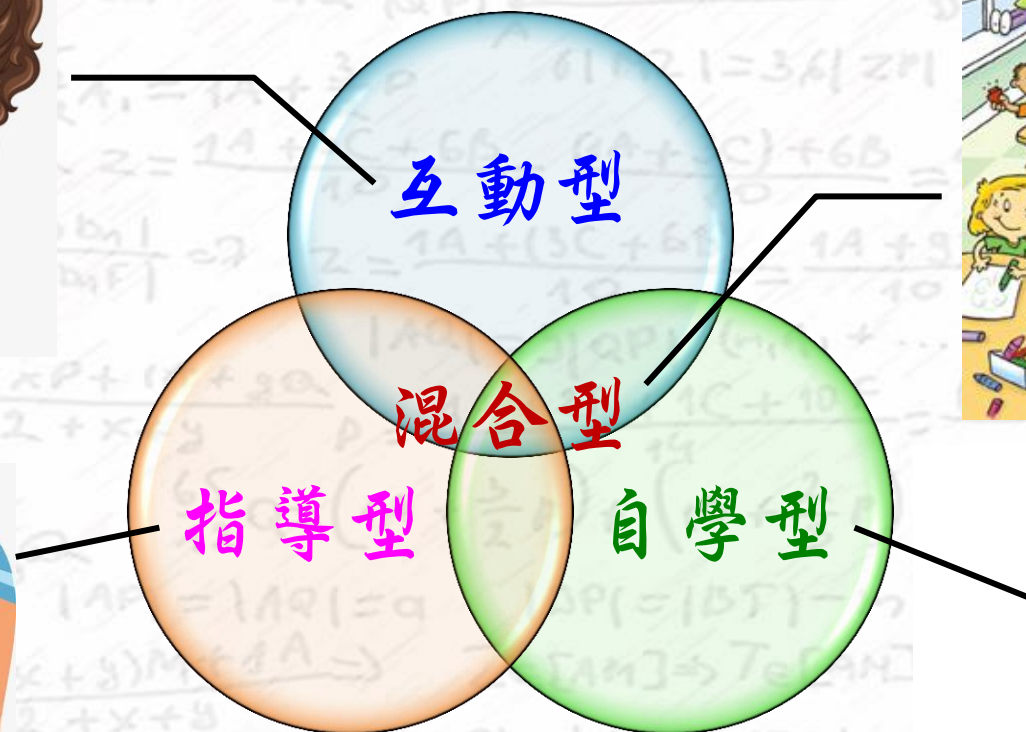
我們在乎的是差距還是正負？

重要觀念

$a - b$ · 減 b 就是「對 b 歸 0」



書的使用型態



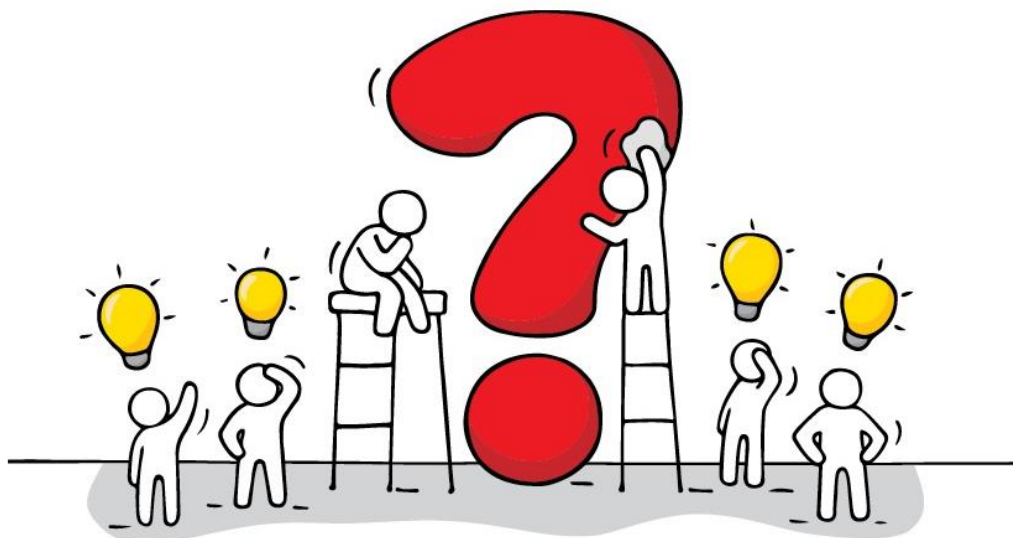
互動型的師生角色

🧑‍🏫 教師與學生以互動交流的型態進行教學

🧑‍🏫 教師主要的工作在於：

激發學生的想像力、注意力、猜想力

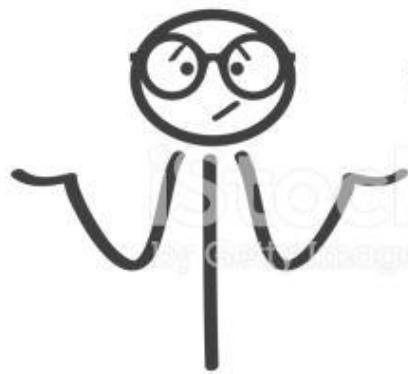
將教師想法、學生想法充分討論，形成結論。



互動型的教學脈絡

產生問題

(分辨)



problem

探索問題

(分析)



analysis



idea

形成知識

(條理)



plan



realization

應用知識

(行)

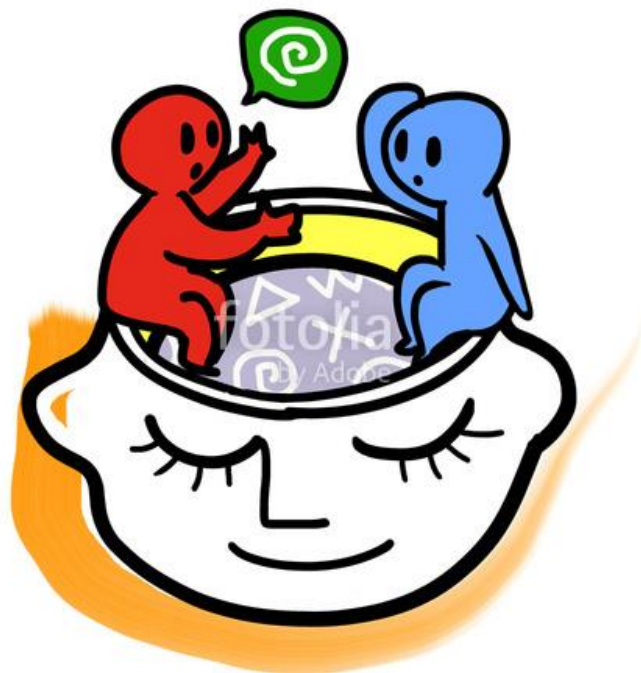


success

自學型

學習素材扮演與學習者可互動的對象

自問自答



教導型

學習內容的條理鋪陳

言之有理

有道理



混合型

以上兩種或三種的混合型態

因材施教



不同階段的型態

國小

互動為主



國中

互動為主
自學為輔



高中

互動自學
並行





你會數數嗎？你可以從1數到多少呢？
下面的數字是阿拉伯數字，你認得幾個呢？把你知道的圖起來！



國小 範例

1. 我們來看一看、讀一讀、還有聽寫數字！

(1) 讀讀看這個車牌號碼。



(2) 請聽老師唸學校的電話號碼並寫下來。



(3) 翻翻數學課本，最後一頁的頁碼是多少呢？
然後，請你翻開到第35頁。

(4) 量一量自己的身高和體重！

你的身高是
()公分。

你的體重是
()公斤。



(5) 把下面這張高鐵票的阿拉伯數字圈起來，這些數字在說什麼呢？



2. 哇！好漂亮的金莎花束！數一數總共有多少顆巧克力呢？



1-1 負數的意義

天氣涼了，阿明穿起了外套走路上學去，阿明到學校後和同學們一起將教室的門窗打開，第二節上體育課，阿明把外套脫掉，上完課，阿明很渴，一下子就把水壺中的水喝完了，還沒能解渴，就趕緊到學校的飲水機裝水喝，午後大陽光好大都照進教室裡了，同學把窗簾拉起來遮陽，遮陽讓教室有些暗，只好開燈上課，慢慢的，到了放學的時間，阿明和同學們將窗簾拉開，門窗關妥，阿明和同學一起快樂的回家去了。

在阿明的這一天當中，哪些行為彼此之間是屬於相反，而且具有可以互相抵消作用的呢？請將下面具有互相抵消作用的語詞圈出來。

「穿外套」和「脫外套」。

「裝水」和「喝水」。

「上學去」和「回家來」。

「開門窗」和「關門窗」。

「拉開來」和「收起來」。

「開電燈」和「關電燈」。



在數學上，我們利用「負」這個字來表現「相反」的意思，所以，我們可以這樣說：「阿明穿外套」就相當於是「負」的「阿明脫外套」，或者，我們也可以這樣說，「負」的「阿明穿外套」就相當於是「阿明脫外套」，請你試著寫寫看：

「負」的「阿明關門窗」就相當於是「_____」

「負」的「阿明開電燈」就相當於是「_____」

結論：正負是用來描述兩個可以相互抵銷的語詞。

1-2 負數的使用

阿明的學校實施榮譽制度，學生有好的表現就可以取得「優點卡」給予鼓勵，不小心表現不好時給予「缺點卡」作為警惕，而且一張缺點卡可以與一張優點卡互相抵消，經過一個學期的表現，阿明收集了 12 張優點卡和 4 張缺點卡，經過抵消後總結算，我們發現阿明的結算結果是 8 張優點卡。



我們紀錄為 $(12 \text{ 張優點卡}) + (4 \text{ 張缺點卡}) = (8 \text{ 張優點卡})$ 。

我們知道優點卡和缺點卡具有相反以及互相抵消的作用，因此，我們可以這樣說：1 張優點卡就相當於是負的 1 張缺點卡，或者是說，1 張缺點卡就相當於是負的 1 張優點卡。

如果我們將 1 張缺點卡紀錄為負 1 (記為 -1)，那麼，1 張優點卡就紀錄為正 1 (記為 $+1$)。我們也可以將上面的算式簡記如下：

$$(12 \text{ 張優點卡}) + (4 \text{ 張缺點卡}) = (8 \text{ 張優點卡})$$

優點記為正、缺點記為負

$$(\text{正 } 12) + (\text{負 } 4) = (\text{正 } 8)$$

正記為+、負記為-

$$(+12) + (-4) = (+8)$$

正號(+)省略

$$12 + (-4) = 8$$

國中
範例

數，因使用需求而產生。

只要是實際看得到的長度，都可以用「實數」系統形容。

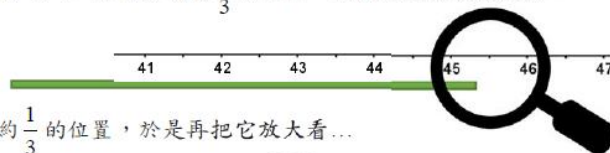
我們需要哪些數，才能描述所有可能的長度？

阿銘想量竹竿的長，他把一端放在 0 的位置...

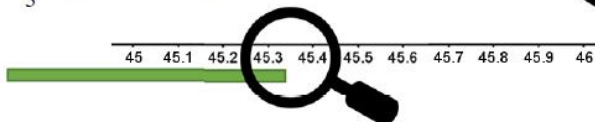
1. 若另一端剛好落在刻度 45 公分的位置，那麼量到的竹竿長為_____公分。
(整數)
2. 若另一端剛好落在刻度 45 和 46 公分中間的位置，那麼量到的竹竿長為_____公分。(分數)



3. 若另一端落在刻度 45 和 46 公分大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，我們把它放大來看...



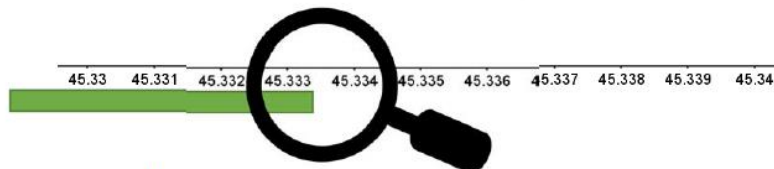
發現它還是在大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，於是再把它放大看...



發現它還是在大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，於是再把它放大看...



再放大...



一直都還是在 $\frac{1}{3}$ 的位置...，那它的長度應該是多少呢？_____我們有真的量到它嗎？_____它寫成小數是_____

4. 分數寫成小數只有兩種形態：

有限小數，如 $\frac{1}{2}$ 。

反過來，我們可以把 5.3 這個有限小數寫成分數嗎？_____

無限循環小數，如 $\frac{1}{19}$ ，一定保證會循環嗎？請說明。 19)1_____

反過來，我們可以把 $5.\overline{328}$ 這個無限循環小數寫成分數嗎？

想想看...「無窮」這件事

無窮，是個形容詞，不能直接拿來算，只能靠推論。

阿銘量身高，機器上方的量尺不斷下降，靠近阿銘的頭...慢慢的、不斷的靠近...

當尺靠到頭的時候，量到的長度是尺的長度還是阿銘的身高？它們是一樣的嗎？_____

尺的刻度可以拿來標示為阿銘的身高嗎？_____有更好的選擇嗎？_____身高是身高、尺是尺，阿銘的身高和尺的刻度差了什麼？_____

數，被用來標記長度，差一個點，長度有差嗎？_____

$0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$

每加一次，它與 1 的距離就又縮為原來的_____，無止無盡的靠近，

那麼 $0.\overline{9}$ 和 1 有一樣嗎？_____

我們如何檢驗？

重要觀

三一律：

兩實數之間的關係，大於、等於、小於，三選一

高中
範例

數學教學生涯

- ④ 從生命的哲學觀來反思現階段的教學樣貌
- ④ 從心理學的角度來構思信念改變的脈絡
- ④ 從社會心理學的角度來看待自我的角色
- ④ 從社會建構的觀點來開展有意義的教學歷程

大家聚在這裡

我們現實的情境是

過去偏重解題，我們盡責想幫學生，

因為解題能力可以幫學生跨越評量的關卡！

慘痛的現實，學生的學習意志被推毀了！

老師迷失了，如果不教解題要教什麼？

大家聚在這裡

在情境下形塑目的

充滿成就感的學到有價值的數學

讓學生能享受學習過程的奮鬥滋味



大家聚在這裡

在目的下確認探索標的

跟目的相關的資訊及項目-

手邊的資源
我們來奮鬥



老師的專業
你們來努力

大家聚在這裡

形成問題（猜想預期結果）：相關資訊及項目間的關係（由運算加以詮釋）

樂觀的因子（大於一）跟我們用乘法來運作！

保守的性格（等於一）跟著我們一起做！

悲觀的心情（負數）先變個號，再來一起做！

大家聚在這裡

從結果找理由，從現象歸納結論

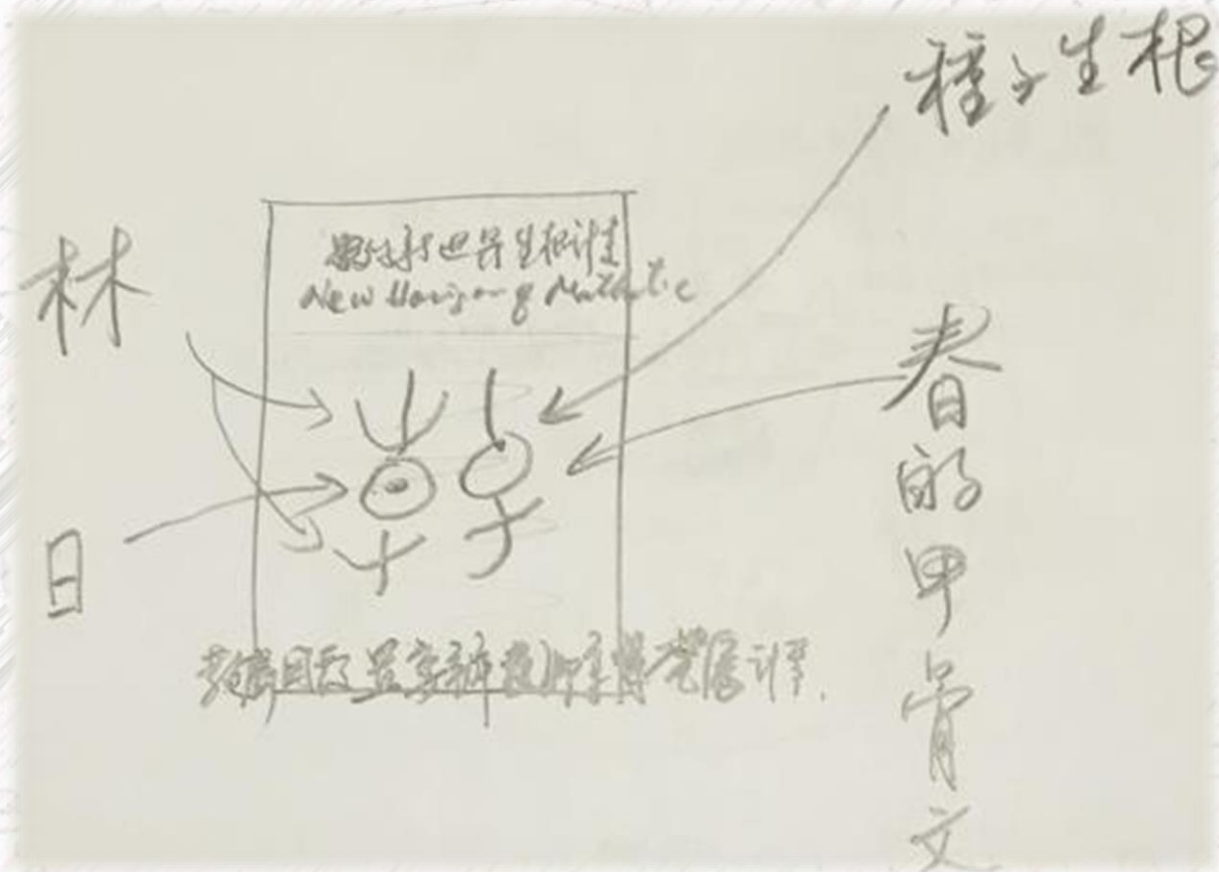
我們準備好踏出這一步了，

讓我們

從實踐的結果找出成功的理由，

從看到的現象歸納結論出成功的方程式！

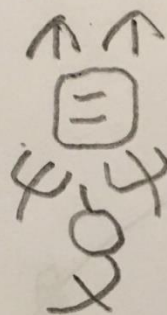
數學新世界Logo設計由來與想法 by CA



春天來了，萬物欣欣向榮

數學新世界

New Horizon of Mathematics



數學演算 根生新世界

教育部國教署委辦 教師專業發展計畫

數學演算
根生新世界

一起努力

徵實則效存

徇名則功淺 — 唐 王勃



數學演繹算 根生新世界

國小組
FB
討論平台



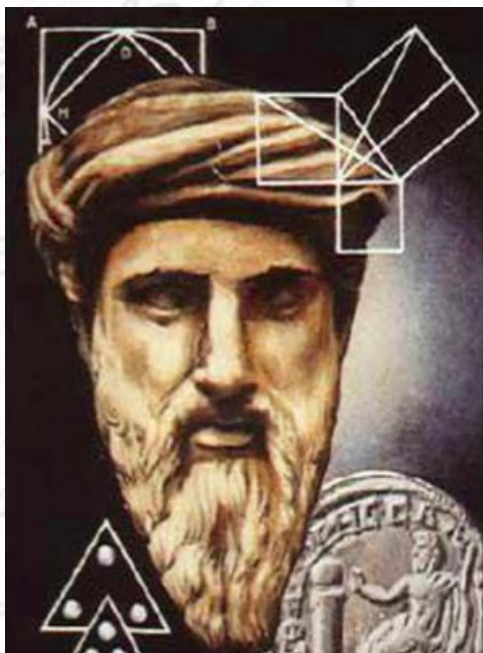
國中組
FB
討論平台



高中組
FB
討論平台



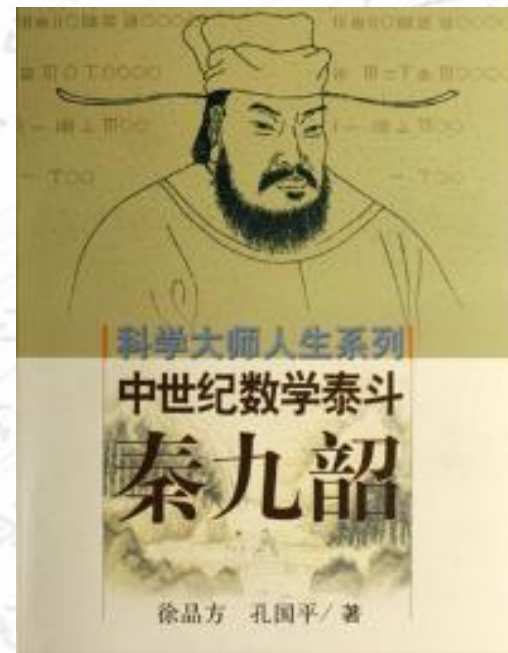
上一代 寫下歷史



畢達哥拉斯 580-520B.C.



祖沖之 409-502A.D.



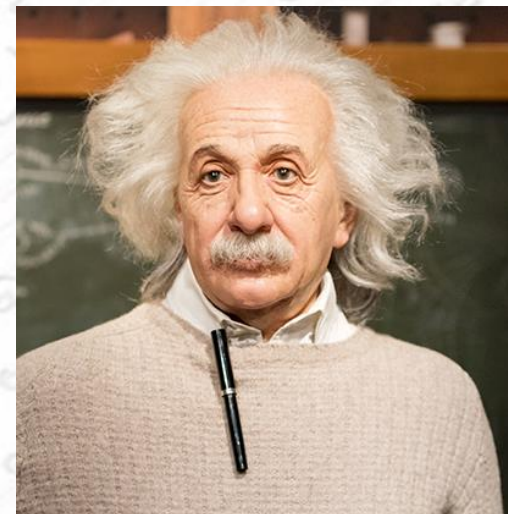
秦九韶430-501A.D.



笛卡爾1596-1650A.D.



黎曼1826-1866A.D.



愛因斯坦1879-1955A.D.

這一代
數學教育讓我們一起領風騷



感謝大家的參與

