

教材樣本集



國小階段



素養實踐計畫國小組





你會數數嗎？你可以從1數到多少呢？
下面的數字是阿拉伯數字，你認得幾個
呢？把你知道的圈起來！



1. 我們來看一看、讀一讀、還有聽寫數字！

(1) 讀讀看看這個車牌號碼。



(2) 請聽老師唸學校的電話
話號碼並寫下來。



(3) 翻翻數學課本，最後一
頁的頁碼是多少呢？()頁

然後，請你翻開到第35頁。

(4) 量一量自己的身高和體重！

你的身高是
()公分。

你的體重是
()公斤。



(5) 把下面這張高鐵票的阿拉伯數字圈起來，這些數字在說什麼呢？

2018/10/24	車次Train 125	單程票
南港 11:20 →	左營 13:05	
Nangang	Zuoying	
5 標準廂	2C	
car		
NT\$1530 現金	P1	
02-2-62-0-297-0006 成人		
06960009	2018/10/24發行	



感知、思考與學習

生活上經常使用數字，它們們都有各自的用途！有時是編號，有時是順序，有時是總數……。

2. 哇！好漂亮的金莎花束！數一數總共有多少顆巧克力呢？



1、2、3、4、…你是怎麼數的呢？

好多顆呀！拿盒子來裝，
一個盒子可以裝4顆，
全部有（ ）顆巧克力
可以裝成
（ ）盒又剩（ ）個。



包裝	盒	個
顆數		



感知、思考與學習

小單位不好用的時候，我們會用大單位！

3. 媽媽買了一些東西，收銀機上面顯示了這個數字

247

如果媽媽有足夠的零錢，她可以怎麼付錢呢？



()張



()個



()個



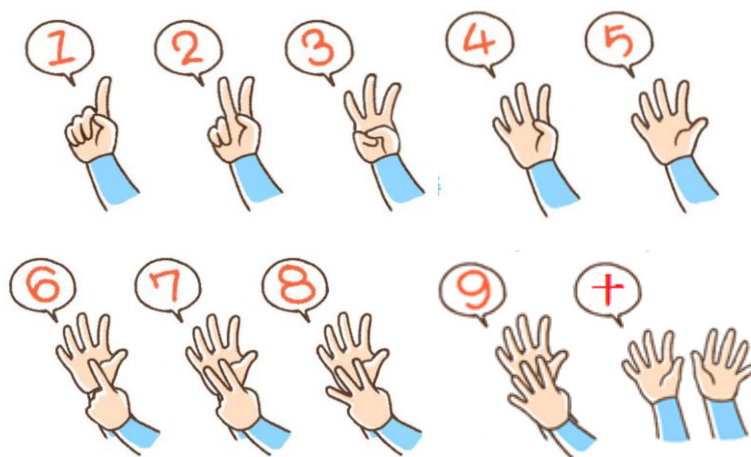
()個



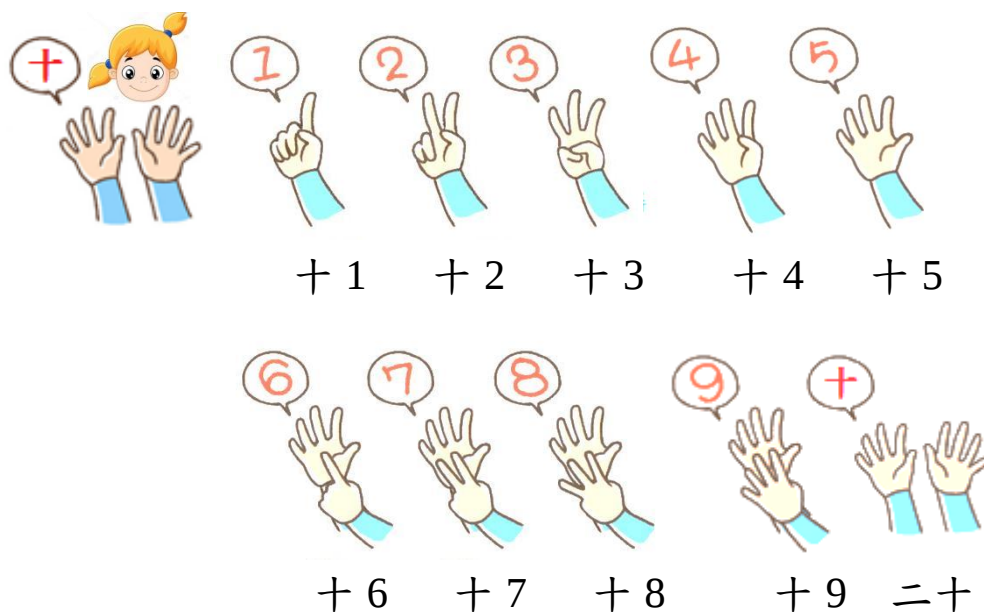
()個

4. 用手指比一比、數到30！

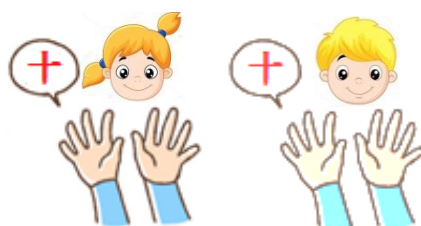
請一邊數一邊用手指比出來。



接下來呢？糟糕！手指頭不夠用了～
趕快找一位好同學來幫忙！



想要繼續數下去的話，
那就要再找一位同學來幫忙囉～

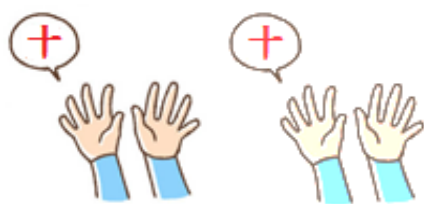


現在已經數到二十了！

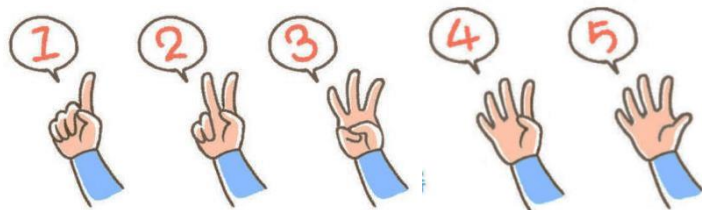


感知、思考與學習

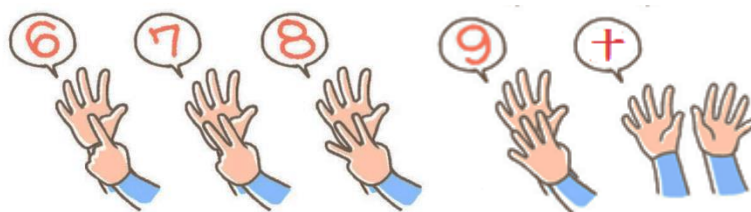
十個 1 就是 1 個十，二十個 1 就是 2 個十。



2 個「十」，是「二十」



二十 1 二十 2 二十 3 二十 4 二十 5



二十 6 二十 7 二十 8 二十 9 三十

如 果 再 繼 續 數 下 去 ，
那 就 要 找 更 多 的 同 學 呢 ！



現 在 已 經 數 到 三 十 了 ！

先 數 到 這 就 好 ！ 讓 我 們 想 一 想 ： 想 用 阿 拉 伯 數 字 寫 下 數 字 「 十 」 ， 怎 麼 寫 會 比 較 清 楚 呢 ？ 當 我 們 數 了 幾 個 「 十 」 又 多 少 時 ， 怎 麼 寫 呢 ？

十	壹
1	0

寫 這 樣 表 示 是
1 個 「 十 」 沒 有 壹 。

十	壹
2	5

寫 這 樣 表 示 是
2 個 「 十 」 又 5 。



有ㄟ的ㄟ書ㄟ放ㄟ得ㄟ好ㄟ高ㄟ～拿ㄟ不ㄟ到ㄟ呀ㄟ！怎ㄟ麼ㄟ辦ㄟ
才ㄟ好ㄟ呢ㄟ？請ㄟ你ㄟ幫ㄟ忙ㄟ想ㄟ個ㄟ好ㄟ辦ㄟ法ㄟ吧ㄟ！



生ㄟ活ㄟ上ㄟ有ㄟ時ㄟ候ㄟ會ㄟ遇ㄟ到ㄟ一ㄟ些ㄟ狀ㄟ況ㄟ，在ㄟ這ㄟ些ㄟ狀ㄟ況ㄟ中ㄟ，我ㄟ們ㄟ可ㄟ以ㄟ動ㄟ動ㄟ腦ㄟ、想ㄟ一ㄟ想ㄟ就ㄟ能ㄟ
長ㄟ知ㄟ識ㄟ喔ㄟ！

1. 在ㄟ賣ㄟ衣ㄟ服ㄟ的ㄟ店ㄟ家ㄟ內ㄟ。

媽ㄟ媽ㄟ挑ㄟ了ㄟ一ㄟ件ㄟ裙ㄟ子ㄟ試ㄟ穿ㄟ覺ㄟ得ㄟ有ㄟ點ㄟ短ㄟ，於ㄟ
是ㄟ，又ㄟ拿ㄟ了ㄟ一ㄟ件ㄟ試ㄟ穿ㄟ，媽ㄟ媽ㄟ覺ㄟ得ㄟ比ㄟ較ㄟ剛ㄟ
好ㄟ，便ㄟ結ㄟ帳ㄟ買ㄟ了ㄟ！你ㄟ知ㄟ道ㄟ媽ㄟ媽ㄟ買ㄟ的ㄟ裙ㄟ子ㄟ
是ㄟ下ㄟ面ㄟ的ㄟ哪ㄟ一ㄟ件ㄟ嗎ㄟ？在ㄟ□內ㄟ打ㄟ✓。

你ㄟ可ㄟ以ㄟ說ㄟ說ㄟ看ㄟ為ㄟ什ㄟ麼ㄟ嗎ㄟ？



練習題：你覺得哪一面的圍牆比較高呢？



☐ 左圖

☐ 右圖



感知、思考與學習

比較需要有個基準！

- 爸爸使用筆記型電腦工作，發現插座離桌子有點遠，電腦的電源線不夠長，於是，就拿了延長線。



你知道延長線的功能嗎？說說看！

練習題：

小欣說：我再長3公分就有125公分了！

所以，小欣的身高比125公分 ☐高 ☐矮



感知、思考與學習

比較短的，加一段就會變長！

3. 當我們覺得自己的頭髮變長了，想要短一點，就會到理髮店剪頭髮！



練習題：

右圖中的四位女生，誰的身高最高呢？





感知、思考與學習

比較長的，減一段就會變短！

4. 感覺厚與薄。

(1) 夏天遮陽防晒的時候，你會想要穿哪一件外套呢？

有寒流來的冬天你會想要穿哪一件外套呢？



(2) 下面是花生吐司，你喜歡吃哪一種？



一般吐司



厚片吐司

練習題：

你家有掛日曆嗎？

通常一年有幾天呢？

() 天。

日子一天一天過去，

日曆一天一天愈撕愈

☐厚 ☐薄



感知、思考與學習

厚薄感覺像切片，

薄的比較少片，厚的比較多片。

5. 你覺得照片中的小baby想拿到他的奶嘴，
他會怎麼爬呢？是直直的往奶嘴方向
爬嗎？



練習題：

照片中的這一座橋坐落在臺中的高美濕地，它看起來是「S」型的。一般的橋通常是「一」字型的。照片中有一個黃點，如果想要蓋一座到對岸「最短的」橋，應該怎麼蓋呢？請你畫畫看！



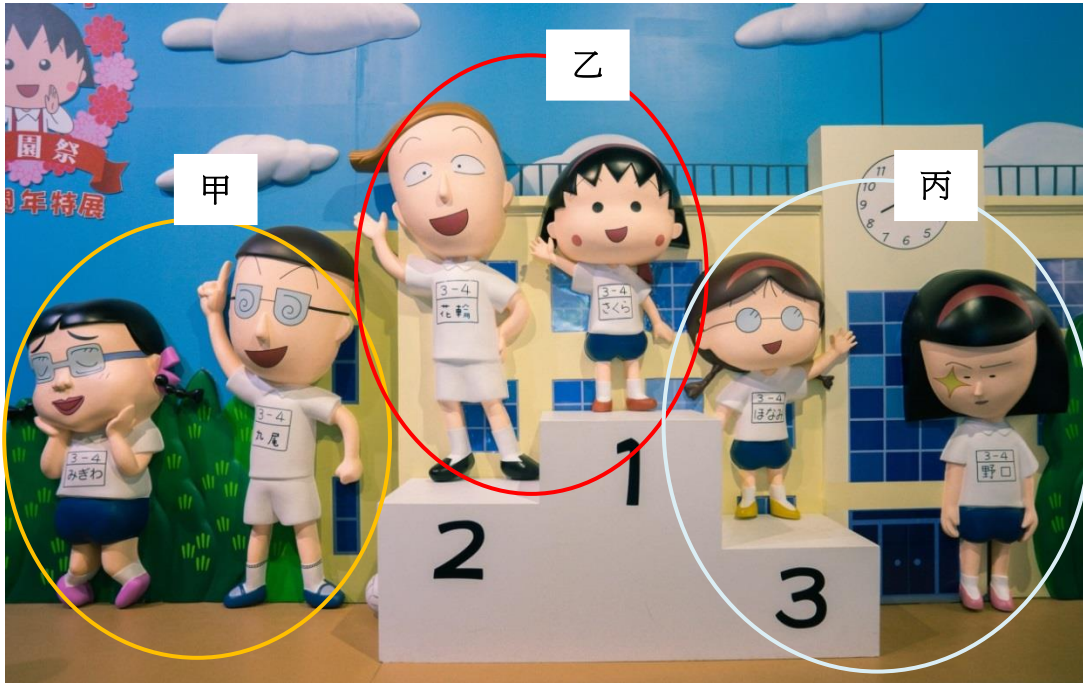
感知、思考與學習

從這邊到那邊，直直的不轉彎比較短！



練習問題

看圖比比看，誰比較高！



(1) 圈圈甲的兩個人，誰比較高呢？

☐ 左邊的男生 ☐ 右邊的男生

寫下你是怎麼知道的。

(2) 圈圈乙的兩個人，誰比較高呢？

☐ 左邊的男生 ☐ 右邊的男生

寫下你是怎麼知道的。

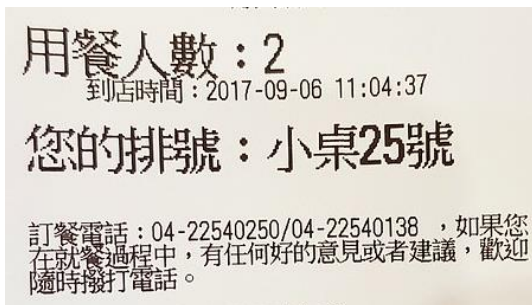
(3) 圈圈丙的兩個人，誰比較高呢？

☐ 左邊的男生 ☐ 右邊的男生

寫下你是怎麼知道的。



看看下面的圖片，想一想，通常我們到什麼地方做什麼事情的時候，會需要領號碼牌呢？



小朋友，你知道領號碼牌要做什么用嗎？拿號碼牌是不是一直可以知道還要再等幾個呢？

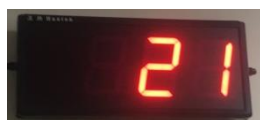
1. 老師請小朋友排成一隊，帶到戶外玩溜滑梯。



(1) 全部有()位小朋友，穿紅色運動服的小男孩排在第()個。

(2) 排在穿紅色運動服小男孩的「前面」有()位小朋友，他的「後面」還有()位小朋友。

2. 爸爸外帶餐點，目前燈號是 21 號，爸爸拿的是 33 號，請問他要再等幾個就可以輪到他了呢？再等()位。



22	23	24	25	26	27
↓	↓	↓			
1 個	2 個	3 個			
28	29	30	31	32	

33

↓
第 ? 個

3. 右圖是百貨公司樓層介紹。

小如現在在 3 樓。

她想到 10 樓吃個飯，3 樓再往上()樓，就到達 10 樓。

吃飽飯後，小如從 10 樓搭電梯往下()樓到 B2 開車回家！



10F	天幕饗宴 Skyview Restaurants & Bars
9F	樂夜朝聖 Night Fever
8F	文創立方 Art Show Box
7F	
6F	精緻饗宴 Gourmet Cuisine
5F	生活食趣 Lifestyle Bazaar
4F	酷玩潮流 Trend Setter
3F	花漾衣櫥 Her Wardrobe
2F	都會時尚 Urban Chic
1F	國際時尚 International Fashion
B1	設計時尚 Designer Fashion
B2	塗鴉美術停車場 Graffiti Car Park
B3	塗鴉美術停車場 Graffiti Car Park

4. 9 月 13 日 是 中 秋 節，也 就 是 9 月 的 第 13 天，那 麼，再 過 幾 天 就 是 教 師 節 呢？

西曆 2019 年 9 月 民國 108 年 農曆 歲次 己亥年 【豬】						
日	一	二	三	四	五	六
1 記者節	2 初四	3 軍人節...	4 初六	5 初七	6 初八	7 初九
8 白露	9 體育節...	10 十二	11 十三	12 十四	13 中秋節	14 十六
15 十七	16 十八	17 十九	18 二十	19 廿一	20 廿二	21 廿三
22 廿四	23 秋分	24 廿六	25 廿七	26 廿八	27 廿九	28 教師節...
29 9月小	30 初二					

13 中秋節	14 過一天	15 過二天	16 中秋節後第三天	17 第 4 天	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28 教師節

9 月 13 日 中 秋 節，再 過 () 天 是 9 月 28 日 教 師 節。



感知、思考與學習

有 順 序 的 數 字，可 以 計 算 相 差 多 少。



練習題

這一排的房子有 8 間，如果郵差從右邊過來送信件到箭頭指向的那一戶，那是從右邊數來第（ ）間；如果郵差從左邊過來，則是左邊數來第（ ）間。





下面的圖片是超商賣的茶葉蛋，原本一鍋滿滿的，後來，有人買走了就變少了。於是，店員又補了幾顆進去！



滿滿的



愈來愈少



再補一些

一個一個取走就變少，一個一個放進鍋裡就變多！

1. 增加與減少，如果覺得...

(1) 豆漿不夠甜，
我們會...



(2) 書包好重，
我們會...



(3) 體重過重，
我們會...



(4) 衣服穿太少好冷，
我們會...



2. 媽媽買了一盒 10 顆的湯圓。

家裡有 、、、 4 個人。

如果每人吃 2 顆，夠不夠吃呢？



結果，每人 2 顆 ☐ 夠 ☐ 不夠 吃。

有剩下嗎？☐ 有剩下 ☐ 沒有剩下。

那麼，夠不夠每人吃 3 顆呢？

☐ 夠 ☐ 不夠。

為什麼呢？說說看看！

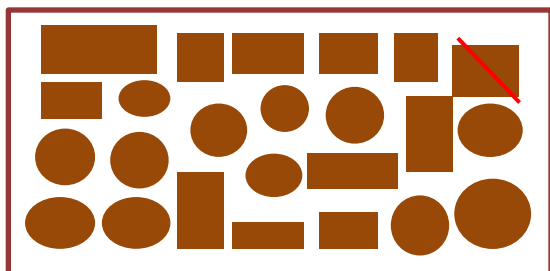
3. 這一盒巧克力夠不夠分給圖片中的小朋友們一人一顆呢？



我們怎麼知道夠不夠呢？



方法一：一個一個發！



一顆巧克力給一個小朋友！

也就 是，

每劃掉一顆巧克力，接著就劃掉一個小朋友！



方法二：數一數！

巧克力總共有（ ）顆，

小朋友總共有（ ）位。

結果，巧克力的個數比小朋友的個數

☐ 多 ☐ 少 （ ）個。



感知、思考與學習

想比出誰多誰少，

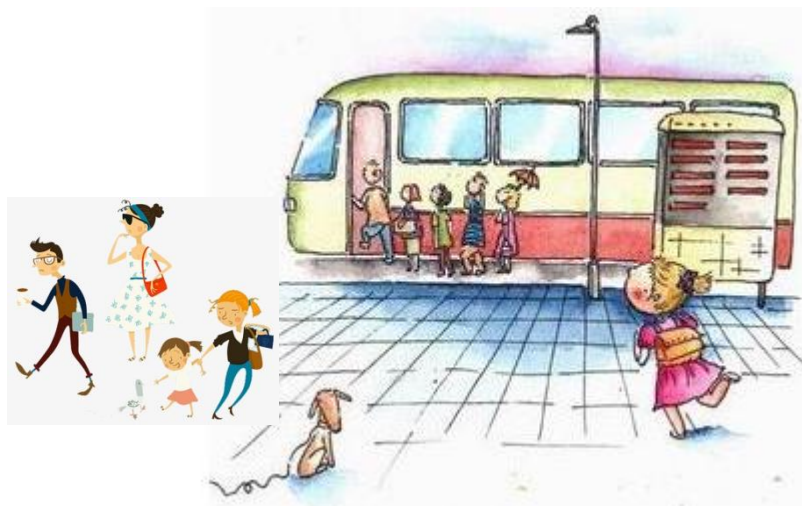
可以一個一個比，

也可以全部算出來再比！



練習題

公共車到站後，有 4 個人下車，6 個人上車，
請問公共車上的人會變多還是變少呢？



公共車上的人會 ☐ 變多 ☐ 變少 。



每天早上你是不是開開心心的上學呢？白天的時候，家人們會各自出門上學、上班，到了傍晚又會回到家聚在一起囉！



接下來，讓我們來想想有關分分合合的問題！

1. 明天要戶外教學，應該準備哪些東西呢？
下面這些東西你會把它們分別放在背包的哪裡呢？



因為經常想喝水，所以把水壺放在...
零食體積比較大，所以放在...
零錢和悠遊卡，隨時可能用到...



背包分層和大小区塊的設計，可以讓
我們按照需要將東西區別放好呢！

2. 為什麼大賣場的收銀台會有好幾個櫃台呢？如果只有一個收銀櫃台，那會發生什麼事呢？



3. 生活課的時候，老師拿了4個地球儀，要讓大家看看世界各國在哪裡，可是全班有22個人，怎麼樣才能讓全班同學都看得呢？你有什么好方法呢？



4. 小萱和小艾兩家人一起去遊樂區玩。

小萱家有 2 個大人 2 個小孩，小艾家是 2 個大人 1 個小孩。

也就是 () 個大人、() 個小孩。



5. 這裡有 13 顆糖果，你覺得可以分給幾個
人呢？



請你利用下面的 13 個圓圈，分分看！



自己留 2 顆



感知、思考與學習

把整體分成部分！

又可以再把整體合併回來！

6. 班上有 10 位同學，試回答下列問題：



(1) 如果今天有 2 位同學請假，

那麼，有 () 位同學有來上學。

全班 10 人	
有來上學	沒有來上學
	2

(2) 班上有 6 位女生，那麼，男生有多少

位呢？班上有 () 位男生。

全班 10 人	
女生	男生
6	



練習題

老師想知道班上的小朋友放學是怎麼回到家
的，請幫忙數一數和做記錄：
我們班總共有（ ）位小朋友。

「走路」回家的有：



畫記：

（ ）位小朋友

「家長接送」回家的有：



畫記：

（ ）位小朋友

「安親班、補習班」接回的有：



畫記：

（ ）位小朋友

還有其他的方嗎？

我們把這個調查做成表格：

全班（ ）人			
步行	家長接送	安親班 補習班	其他

教材樣本集

七

國中階段



素養實踐計畫國中組





1-1 負數的意義

天氣涼了，阿明穿起了外套走路上學去，阿明到學校後和同學們一起將教室的門窗打開，第二節上體育課，阿明把外套脫掉，上完課，阿明很渴，一下子就把水壺中的水喝完了，還沒能解渴，就趕緊到學校的飲水機裝水喝，午後大陽光好大都照進教室裡了，同學把窗簾拉起來遮陽，遮陽讓教室有些暗，只好開燈上課，慢慢的，到了放學的時間，阿明和同學們將窗簾拉開，門窗關妥，阿明和同學一起快樂的回家去了。

在阿明的這一天當中，哪些行為彼此之間是屬於相反，而且具有可以互相抵消作用的呢？請將下面具有互相抵消作用的語詞圈出來。

「穿外套」和「脫外套」。

「裝水」和「喝水」。

「上學去」和「回家來」。

「開門窗」和「關門窗」。

「拉開來」和「收起來」。

「開電燈」和「關電燈」。



在數學上，我們利用「負」這個字來表現「相反」的意思，所以，我們可以這樣說：「阿明穿外套」就相當於是「負」的「阿明脫外套」，或者，我們也可以這樣說，「負」的「阿明穿外套」就相當於是「阿明脫外套」，請你試著寫寫看：

「負」的「阿明關門窗」就相當於是「_____」

「負」的「阿明開電燈」就相當於是「_____」

結論：正負是用來描述兩個可以相互抵銷的語詞。

1-2 負數的使用

阿明的學校實施榮譽制度，學生有好的表現就可以取得「優點卡」給予鼓勵，不小心表現不好時給予「缺點卡」作為警惕，而且一張缺點卡可以與一張優點卡互相抵消，經過一個學期的表現，阿明收集了12張優點卡和4張缺點卡，經過抵消後總結算，我們發現阿明的結算結果是8張優點卡。



我們紀錄為(12張優點卡) + (4張缺點卡) = (8張優點卡)。

我們知道優點卡和缺點卡具有相反以及互相抵消的作用，因此，我們可以這樣說：1張優點卡就相當於是負的1張缺點卡，或者是說，1張缺點卡就相當於是負的1張優點卡。

如果我們將1張缺點卡紀錄為負1（記為-1），那麼，1張優點卡就紀錄為正1（記為+1）。我們也可以將上面的算式簡記如下：

$$(12 \text{ 張優點卡}) + (4 \text{ 張缺點卡}) = (8 \text{ 張優點卡})$$

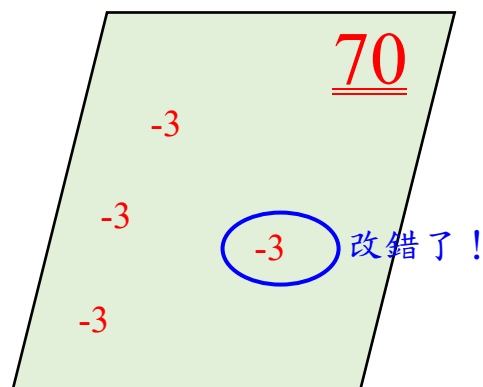
$$\begin{array}{l} \text{優點記為正、缺點記為負} \rightarrow \\ \text{正記為+、負記為-} \rightarrow \\ \text{正號(+)} \text{省略} \rightarrow \end{array} \quad (正 12) + (負 4) = (正 8)$$

$$(+12) + (-4) = (+8)$$

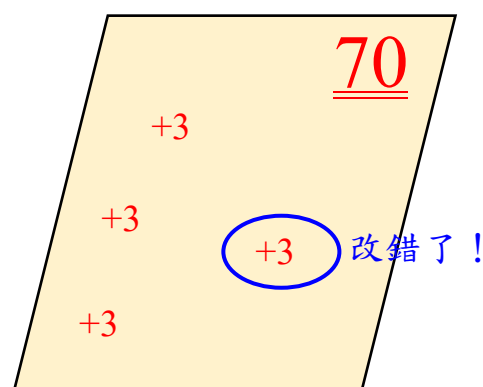
$$12 + (-4) = 8$$

1. 如果學期末做總結算，優點卡和缺點卡抵消後，小華的結算結果和阿明一樣是 8 張優點卡，請問小華可能拿到幾張優點卡？幾張缺點卡呢？有沒有可能和阿明是不一樣的呢？
2. 如果期末結算前，小華有一些優點卡跟缺點卡，如果，小華做了 1 件可以獲得 3 張優點卡的善行，可是，老師手邊已經沒有優點卡了，這時候老師可以怎麼做呢？（跟給 3 張優點卡的結果一樣）
3. 如果期末結算前，小華不小心犯錯，老師決定給小華 3 張缺點卡，可是，老師手邊已經沒有缺點卡了，這時候老師可以怎麼做呢？（跟給 3 張缺點卡的結果一樣）
4. 如果大明有 12 張優點卡，大咖有 4 張優點卡，大華有 4 張缺點卡？那麼，大明的卡分別是大咖跟大華的幾倍呢？

5. 學校段考時，小明數學考了 70 分，檢討考卷時，發現老師改的考卷改錯了，有道題他答對了，卻被老師扣了 3 分，這時候老師該怎麼做呢？

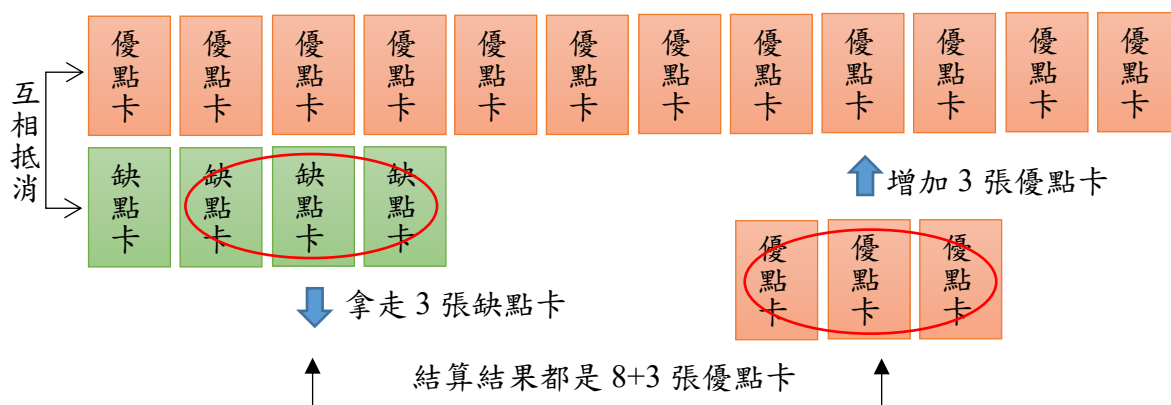


6. 學校段考時，小華數學考了 70 分，檢討考卷時，發現老師改的考卷改錯了，有道題他答錯了，卻被老師加了 3 分，這時候老師該怎麼做呢？



📖 經過上面的嘗試，我們來做一下整理喔！

下面的圖示的結算結果是 8 張優點卡，第 2 題老師想給小華 3 張優點卡，也就是說，結算結果必須是 $8+3$ 張優點卡，雖然老師沒有優點卡可以給小華，老師可以拿走小華 的 3 張缺點卡來讓結算結果仍然是 $8+3$ 張優點卡喔。



我們把上面的圖示紀錄如下：

「增加 3 張優點卡」=「拿走 3 張缺點卡」➡ 加上正 3=減去負 3。

使用相同的想法，我們也可以得到下面的結果喔！

「增加 3 張缺點卡」=「拿走 3 張優點卡」➡ 加上負 3=減去正 3。

結論

1. 正數和負數相加會互相抵消。
2. 減去一個數，相當於是加上這個數的抵消數(相反數)。

也就是說：減 a 等於加 $-a$

※12 張優點卡是 4 張缺點卡的幾倍呢？

我們知道 4 張優點卡的 3 倍會是 12 張優點卡，4 張缺點卡的 3 倍會是 12 張缺點卡，那 12 張優點卡會是 4 張缺點卡的幾倍呢？很顯然的，因為優點卡跟缺點卡是相反的，因此，12 張優點卡跟 4 張缺點卡的倍數關係可以這麼說：

12 張優點卡是 4 張缺點卡相反的 3 倍 記為

12 優點卡 = $(-3) \times (4 \text{張缺點卡})$ 或 $12 \text{優點卡} = (4 \text{張缺點卡}) \times (-3)$

$+12 = (-3) \times (-4)$ 或 $+12 = (-4) \times (-3)$

➡ 12張優點卡是4張缺點卡的負3倍，也就是說12是(-4)的(-3)倍。



那「12張缺點卡是4張優點卡的幾倍呢？」。

相同的，因為優點卡跟缺點卡是相反的，因此，12 張缺點卡跟 4 張優點卡的倍數關係可以這麼說：

12 張缺點卡是 4 張優點卡相反的 3 倍 記為

12 缺點卡 = $(-3) \times (4 \text{張優點卡})$ 或 $12 \text{缺點卡} = (4 \text{張優點卡}) \times (-3)$

$-12 = (-3) \times (+4)$ 或 $-12 = (+4) \times (-3)$

➡ 12張缺點卡是4張優點卡的負3倍，也就是說-12是(+4)的(-3)倍。



結論

1. 數字乘上負數會變成相反的幾倍。
2. 性質不同的數字會是彼此相反的幾倍，也就是負的幾倍。

1-3 負數的運算

1. 請利用「正數和負數相加會互相抵消」的關係計算下列各式。

(1) $5 + 8 =$	(2) $(-5) + (-8) =$
(3) $(-5) + 8 =$	(4) $5 + (-8) =$

2. 請利用「減去一個數，相當於是加上這個數的抵消數(相反數)」的關係計算下列各式。

(1) $5 - 8 =$	(2) $(-5) - (-8) =$
(3) $(-5) - 8 =$	(4) $5 - (-8) =$

3. 請利用「數字乘上負數會變成相反的幾倍」的關係計算下列各式。

(1) $5 \times 8 =$	(2) $(-5) \times (-8) =$
(3) $(-5) \times 8 =$	(4) $5 \times (-8) =$

4. 請利用「性質不同的數字會是彼此相反的幾倍，也就是負的幾倍」的關係計算下列各式。

(1) $5 \div 8 =$	(2) $(-5) \div (-8) =$
(3) $(-5) \div 8 =$	(4) $5 \div (-8) =$

☀ $\frac{-5}{8}$ 、 $\frac{5}{-8}$ 、 $-\frac{5}{8}$ 這3個數字是什麼關係呢？

$\frac{(-5)}{8}$ 是在表現-5是8的幾倍， $\frac{5}{-8}$ 是在表現5是-8的幾倍，分子和分母

性質相反，因此，分子會是分母相反的倍數，因此， $\frac{-5}{8} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$ 。

5. 負數的4則運算。

(1) $12 \div (-3) - 2 \times (-3)$	(2) $12 - 7 \times (-32) + 16 \div (-4)$
(3) $19 - (-2) \times [(-12) - 7]$	(4) $9 + (-2) \times [18 - (-3) \times 2] \div 4$



2-1 分數的意義

不到一個！不到一杯！不到一瓶！這個時候怎麼形容那些量呢？

1. 今天阿明生日，晚餐後，一家人喝茶聊天幫阿明慶生，吃蛋糕的時候，媽媽說她要吃少一點，爸爸說想吃大塊一點，妹妹負責切蛋糕，妹妹該怎麼分蛋糕才好呢？



2. 爸爸泡茶給大家喝，阿明負責倒茶，阿明發現爸爸泡的每壺茶剛好可以倒滿5個小茶杯，媽媽喝了3杯後就說喝不下了，妹妹很喜歡爸爸泡的茶，總共喝了13杯！我們會說妹妹喝了幾壺茶呢？



小幫手

- (1) 爸爸和媽媽可以利用分數來跟妹妹講清楚他們想要吃多大塊喔。
- (2) 妹妹很顯然喝超過1壺囉，1壺可以分5杯，妹妹最後喝了13杯，我們可以說妹妹喝了2壺又3杯，也可以利用分數 $2\frac{3}{5}$ 壺，或者 $\frac{13}{5}$ 壺來表現喔。
- (3) 分數就是先分再數喔！

3. 媽媽說她要吃蛋糕的 $\frac{1}{8}$ ，爸爸說他要吃蛋糕的 $\frac{1}{4}$ ，妹妹該怎麼切蛋糕才可以切出媽媽和爸爸想吃的蛋糕大小呢？切切看！



小幫手

妹妹可以先切出 $\frac{1}{4}$ 給爸爸，再細分後切出 $\frac{1}{8}$ 給媽媽。

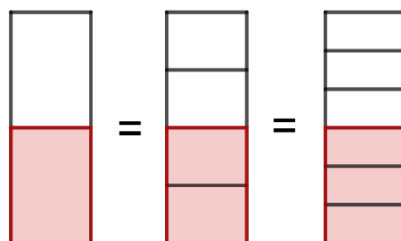
4. 妹妹把蛋糕分給爸爸和媽媽後，還剩下多少蛋糕可以給哥哥和自己享用呢？

小幫手

- (1) 分數再細分，幾倍分就幾倍拿(數)，大小不變。
- (2) 兩個分數的分母不同代表「分」的方式不同，無法合併算，必須先再細分成相同的分法才可以進行加減運算。

2-2 分數的運算

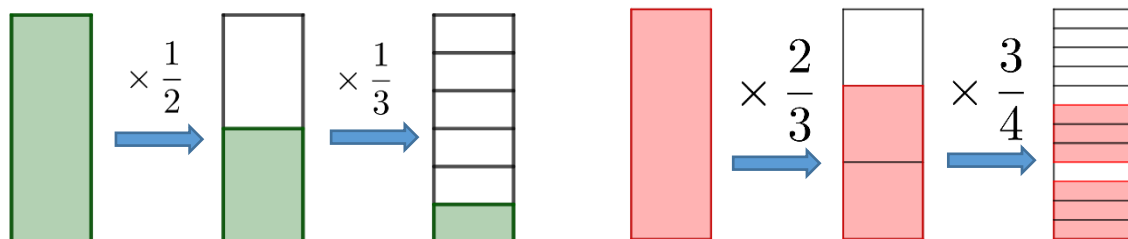
1. 請利用「分數再細分，幾倍分就幾倍拿(數)，大小不變。」把分母變成一樣來完成下面的計算。



(1) $\frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

(2) $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$

2. 請利用「先分再數」來完成下面的計算。



(1) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4}$

(2) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$

3. 我們知道兩個數字相除的結果不會因為這兩個數字一起放大(擴分)或一起變小(約分)而改變，我們利用把除數變成 1 來計算分數的除法，會發現 $\frac{2}{3} \div \frac{7}{5} = \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right) \div \left(\frac{7}{5} \times \frac{5}{7}\right) = \left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{7}\right) \div 1 = \frac{2}{3} \times \frac{5}{7}$ 。請利用「除以一個數就相當於是乘以這個數的倒數」來完成下面的計算。

(1) $\frac{5}{6} \div \frac{3}{4}$	(2) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$
------------------------------------	------------------------------------

4. 請利用「 $\frac{-5}{8} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$ 」以及「負數具有相反抵消的性質」來完成下面的計算。

(1) $\frac{-5}{6} + \frac{3}{4}$	(2) $\frac{-3}{5} - \frac{2}{7}$
(3) $\frac{-5}{6} \times \frac{3}{4}$	(4) $\frac{-3}{5} \times \frac{-2}{7}$

(5) $\frac{5}{6} \div \frac{-3}{4}$	(6) $\frac{-3}{5} \div \frac{-2}{7}$
(7) $[-5 - (-11)] \div (\frac{3}{2} \times 4)$	(8) $3 \times (-9) - 18 \times (\frac{1}{9} - \frac{1}{3})$



3-1 數線的意義

1. 我們量身高的時候，都會先站到量身高的檯子上，然後再讀取頭頂著的刻度是多少，為什麼我們要先站在檯子上呢？
2. 當我們站到體重機上秤體重的時候，我們會看到指針從哪個數字開始移動呢？測量出來的體重有多少要看哪裡呢？



3. 阿明測量體重前，發現體重計的指針指在 3 公斤的位置，測量體重的時候發現指針最後停在 57 公斤的位置，阿明的體重是 57 公斤嗎？還是？

4. 在台灣看到下雪是很令人興奮的事情，一路開車從平地開往合歡山，會看到溫度不斷的下降，如果隔天溫度下降到 0 度以下，再加上濕度夠高，就會看到下雪啦！請在右邊溫度計上畫出溫度從 25 度下降到零下 3 度的圖形，並計算這樣的溫差有幾度呢？

- 小幫手：**
1. 刻度上的數字代表的是從基準 0 開始所測量出來的總大小。
 2. 如果沒有從 0 開始測量，那就必須扣除一開始的數值，做歸零的動作，才會是真正的測量值。
 3. 當想測量的物件是在基準以下，我們會使用負數來表現相反和大小。



3-2 數線的標記

1. 放學回家的時候，阿明和小華在校門口道別之後，阿明往右走，小華往左走，阿明路過 7-11 之後不久就到家了，小華在路過郵局之後也到家了，如果我們把學校的位置標記為 0（把它當基準點），7-11 的位置標記為 5，阿明家、郵局和小華家應該標記什麼數字呢？



2. 阿明和小華誰的家距離學校比較近呢？



3. 從小華家到 7-11 要怎麼說？有多遠該怎麼說呢？

- 小幫手：**
1. 只在乎大小，不管正負號，我們稱為「絕對值」。
 2. 利用適當的基準量（往哪個方向移動一個單位）將數字標記在一條直線上就稱為「數線」。

4. 請在下面的數線上標記出數字-4、0 和 2 的位置，基準量是什麼？



- 小幫手：**增加就變大，減少就變小，以右為正的數線，右邊的數字會比左邊的數字來得大。



3-3 數線上的計算

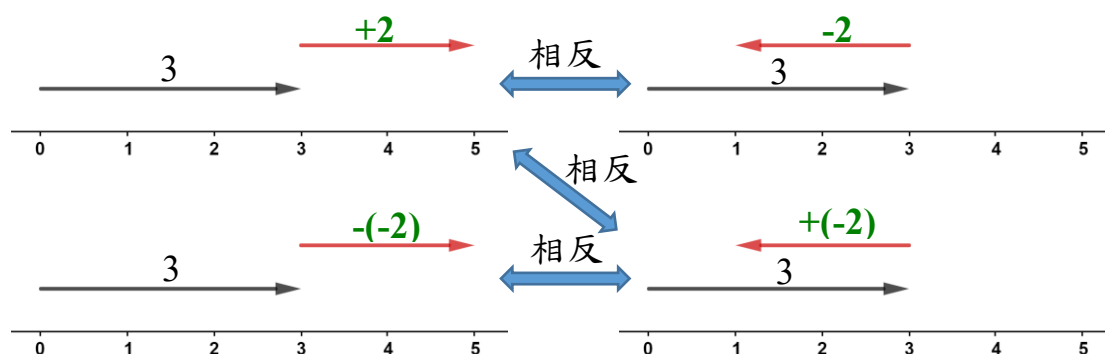
1. 加減法的運算

對比 $3+2$ 和 $3-2$ ，我們知道 $+2$ 和 -2 是相反的作用。

對比 $3+2$ 和 $3+(-2)$ ，我們知道 $+2$ 和 $+(-2)$ 是相反的作用。

對比 $3+(-2)$ 和 $3-(-2)$ ，我們知道 $+(-2)$ 和 $-(-2)$ 是相反的作用。

上面的算式在數線上計算的圖形如下：

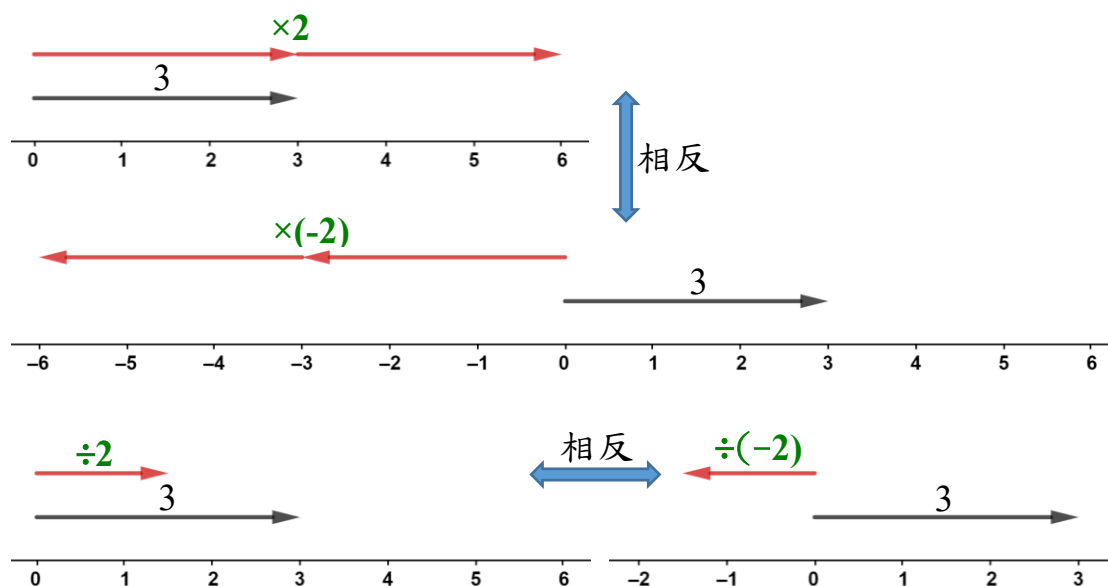


小幫手：1.減去 2 就是想把 2 拿掉，因此「減去 2=加上負 2」。
2.減去負 2 就是想把負 2 拿掉，因此「減去負 2=加上 2」。

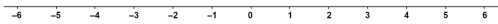
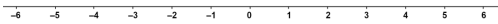
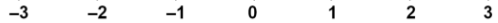
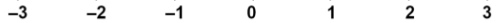
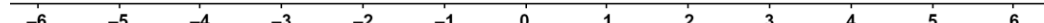
2. 請在數線上畫出下面的算式的計算。

(1) $-5+2$	(2) $-5-2$
(3) $-5+(-2)$	(4) $-5-(-2)$
(5) $-7-1+4$	

3. 請利用「負號代表相反的性質」來進行下面算式的乘除法運算
 對比 3×2 和 $3 \times (-2)$ ，我們知道 $\times 2$ 和 $\times (-2)$ 是相反的作用。
 對比 $3 \div 2$ 和 $3 \div (-2)$ ，我們知道 $\div 2$ 和 $\div (-2)$ 是相反的作用。
 上面的算式在數線上計算的圖形如下：



4. 請在數線上畫出下面的算式的計算。

(1) -3×2 	(2) $-3 \times (-2)$ 
(3) $-3 \div 2$ 	(4) $-3 \div (-2)$ 
(5) $-2 \times 3 \div (-1)$ 	

3-4 數線上的距離

1. 下面這個橡皮擦有多長呢？

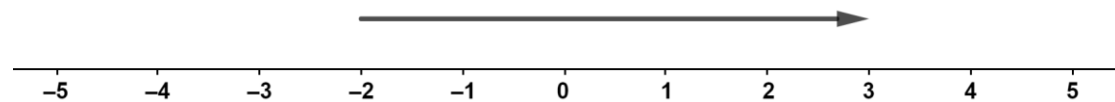


2. 如果你可以移動橡皮擦，你會把橡皮擦移到哪裡方便測量長度呢？

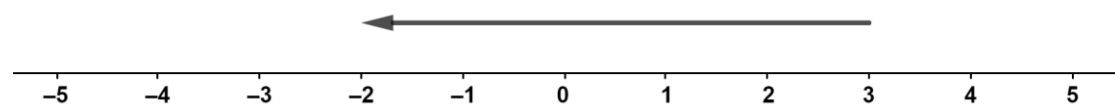
小幫手：把橡皮擦移到 0 的位置進行測量，就相當於是把原來 2 的位置歸零，因此，8.5 的位置就變成了 8.5-2。

3. 請用「歸零」的想法畫出並寫出下面不同測量方式的算式以及距離。

(1) 從 -2 量到 3，把 -2 歸零來看 3 會變成多少。



(2) 從 3 量到 -2，把 3 歸零來看 -2 會變成多少。

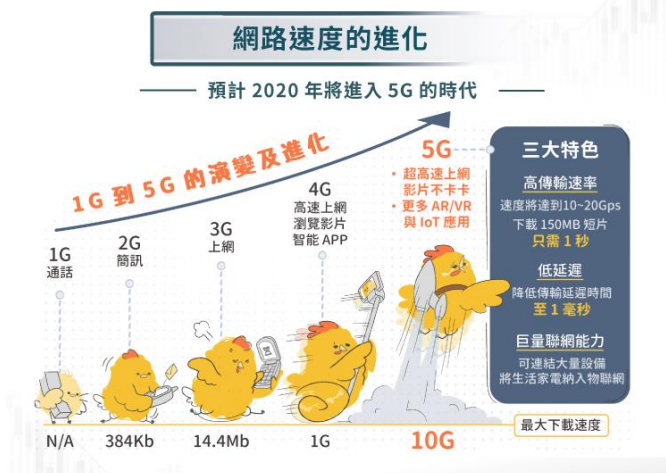


◎**結論：**想測量距離，我們會先把起點的數字 a 歸零，再來看終點的數字 b 會是多少，此時會因為測量的方向而有正負之別，但因為我們只在乎大小，因此，我們以 $|a - b|$ 或 $|b - a|$ 來表現結果。



4-1 科學記號的意義

1. 網路速度預計在 2020 年進入 5G 的時代，4G 和 5G 的差異是什麼呢？



2. 下面有兩棟房子要賣，如果你是房仲業者，你會標價多少起跳呢？

☐百萬 ☐千萬 ☐億

☐百萬 ☐千萬 ☐億



3. 如果右邊的屋主想要賣 32500000 元，你會怎麼標價呢？

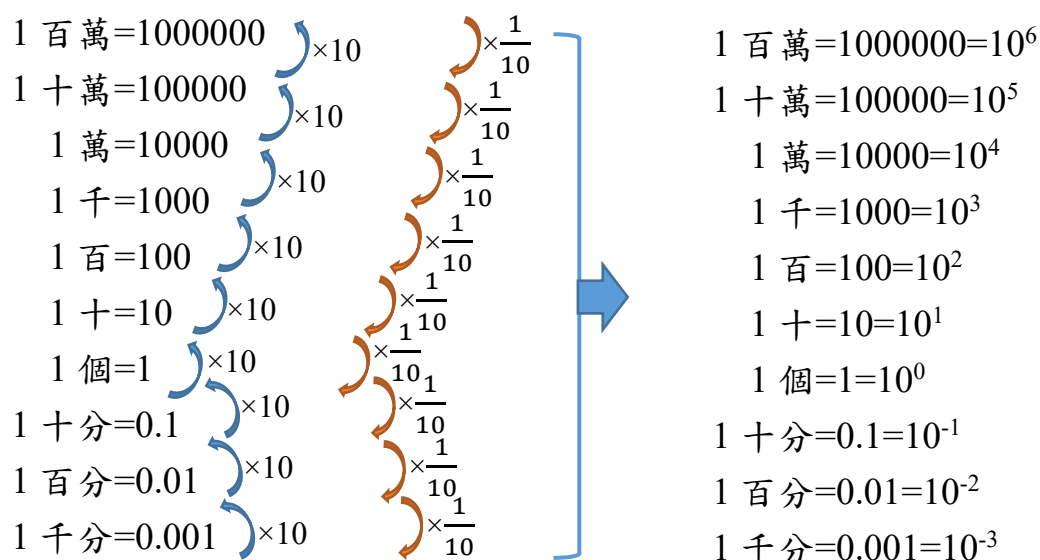
小幫手：數字的大小除了直接寫出來，我們也習慣用 10 進位的等級來表現大小，當我們以千萬等級來標價，這時候，房子就會至少是 1 千萬起跳，而且不會有 10 千萬，因為 10 千萬就已經是億的等級囉！

◎結論：以 10 為晉級標準，以等級來表現數字大小就稱為**科學記號**。再次提醒，我們只考慮**正數**的大小表示方式喔！

4-2 科學記號的表示

1. 在 10 進位的位值表，1 被寫在不同的位置，就擁有不同的位值，當我們將數字大小寫出來，就會是下面的表示方式：

百萬	十萬	萬	千	百	十	個	十分	百分	千分
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1



因為是 10 進位，不同位值彼此之間會以 10 倍晉級或是以 $\frac{1}{10}$ 倍降級，因此，我們將不同的位值以 10 為底數的次方來表示，如右上方所示，其中 $10^2 = 10 \times 10$ ； $10^{-2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$ 。

因為 5670000 這個數字的等級是百萬，也就是 10^6 ，以等級的方式改寫就會變成是 5.76×10^6 。而 0.23 這個數字的等級是百分，也就是 10^{-2} ，以等級的方式改寫就會變成是 2.3×10^{-2} 。

百萬	十萬	萬	千	百	十	個	十分	百分	千分
5	7	6	0	0	0	0			
						0.	0	2	3

將數字以 $a \times 10^n$ 來表現數字大小的格式，我們就稱為**科學記號**，其中 n 以整數來表現等級，a 要表現在同等級之中，因此至少有 1，最多不能有 10，因為滿 10 就晉級了，比 1 小就降級了，即 $1 \leq a < 10$ 。

2. 請試著以科學記號的表示方式改寫下面的數字。

(1) 834500000	(2) 0.000008345
(3) 0.12345	(4) 9

3. 請問 2.451×10^{-3} 這是一個正數還是負數？你是怎麼判斷的？

4-3 科學記號的計算：以科學記號來表現計算結果。

1. 比大小

(1) 9×10^5 2×10^4	(2) 9×10^{-5} 2×10^{-4}
--	--

2. 以等級表現下面運算的結果。

(1) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^4$	(2) $9 \times 10^{-5} - 2 \times 10^{-4}$
-------------------------------------	---

3. 計算下面算式

(1) $527 \times 10 =$	(2) $527 \div 10 =$
(3) $527 \times 10^{-1} =$	(4) $527 \div 10^{-1} =$

4. 以等級表現下面運算的結果。

(1) $(9 \times 10^5) \times (2 \times 10^4)$	(2) $(9 \times 10^{-5}) \div (2 \times 10^{-4})$
--	--



5-1 指數的意義

1. 哆拉 A 夢有一瓶倍增液，可以把好吃的栗子包從 1 個變 2 個，2 個變 4 個，4 個變 8 個，...，一開始只有 1 個栗子包，變 100 次之後會有多少個栗子包呢？



2. 莊子：「一尺之捶(木杖)，日取其半，萬世不竭。」，第 1 天剩下 $\frac{1}{2}$ ，第 2 天剩下 $\frac{1}{4}$ ，第 3 天剩下 $\frac{1}{8}$ ，...，第 100 天會剩下多少木杖呢？



小幫手：當我們並不想把真正的數值算出來的時候，我們會使用**指數**來**簡記運算的過程**，譬如說：2 連乘 100 次簡記為 2^{100} ，讀做 2 的 100 次方， $\frac{1}{2}$ 連乘 100 次簡記為 $(\frac{1}{2})^{100}$ ，讀做 $\frac{1}{2}$ 的 100 次方。

5-2 指數的表示

在這裡所稱的指數其實是指**某數的幾次方**，譬如說：

1. 某數是 2，2 連乘 5 次就稱為是 2 的 5 次方。
 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ ， $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ 。
2. 某數是 -2，-2 連乘 5 次就稱為是 -2 的 5 次方。
 $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = (-2)^5$ ， $(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$ 。
3. **小挑戰：**什麼是 -2^5 呢（看清楚，是哪一個數字連乘五次）？
4. **小挑戰：** 2^6 、 $(-2)^6$ 、 -2^6 和 $-(-2)^6$ 這四個數字一樣或不一樣呢？

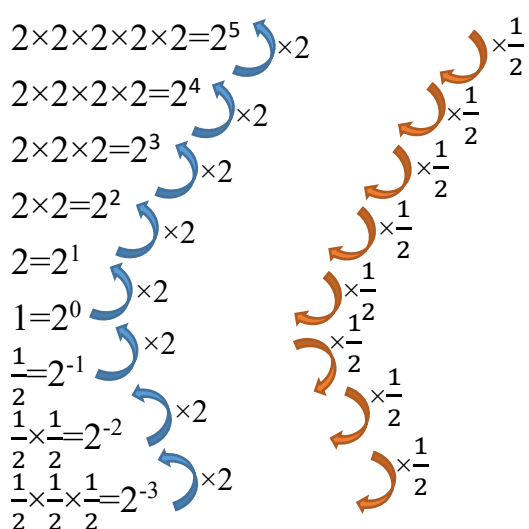
5. $\frac{2}{3}$ 連乘 5 次就稱為是 $\frac{2}{3}$ 的 5 次方。

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5, \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}。$$

6. 小挑戰： $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ 跟 $\frac{2^5}{3}$ 不一樣呢？

7. 比大小： $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ 和 $\left(\frac{2}{3}\right)^6$ 誰大？ $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ 和 $\left(\frac{3}{2}\right)^6$ 誰大？(貼心的提醒：就正數而言，乘大於 1 的數有放大的作用，乘小於 1 的數有縮小的作用)。

8. 某數的次方：



每乘 1 個 2，次方會增加 1，
每乘 1 個 $\frac{1}{2}$ ，次方會減少 1，
其中 $2^3 = 2 \times 2 \times 2$
 $2^{-3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

9. 小挑戰：會有 0^0 嗎？

5-3 指數律

指數律談的是某數的次方的運算的簡記，而且是乘除法的運算喔！
我們來看一下兩個指數運算的關係。

1. 某數相同，指數的乘除。

$$2^5 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{5+3} = 2^8$$

$$2^8 = 2^{5+3} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \times 2^3$$

$$2^5 \div 2^3 = 2^5 \times 2^{-3} = 2^5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2^{5-3} = 2^2$$

$$2^2 = 2^{5-3} = 2^5 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2^5 \times 2^{-3} = 2^5 \div 2^3$$

小幫手：在某數相同之下
指數相乘，次方相加。
指數相除，次方相減。
次方相加，指數相乘。
次方相減，指數相除。

2. 次方相同，指數的乘法。

$$2^5 \times 3^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = (2 \times 3)^5$$
$$(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^5 \times 3^5$$

小幫手：次方相同的指數相乘，某數可以先相乘再一起算次方。

兩數相乘一起的次方，就是兩數分開次方的相乘。

3. 某數的次方再次方。

$$(2^5)^3 = 2^5 \times 2^5 \times 2^5 = 2^{5+5+5} = 2^{5 \times 3}$$
$$2^{5 \times 3} = 2^{5+5+5} = 2^5 \times 2^5 \times 2^5 = (2^5)^3$$

小幫手：次方再次方，就是次方乘起來。

次方相乘，就是次方再次方。

◎ **結論：** 1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ，即 $a^{m+n} = a^m \times a^n$ 。

2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ，其中 $a \neq 0$ ，即 $a^{m-n} = a^m \div a^n$ 。

3. $(a^m)^n = a^{mn}$ ，即 $a^{mn} = (a^m)^n$ 。

4. $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ ，即 $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ 。

其中 a, b 為任意數。

5-4 指數的比大小與運算

1. 請比較下面這些數字的大小

(1) 2^8 、 4^6 、 8^3

(2) $(-2)^8$ 、 $(-4)^6$ 、 $(-8)^3$

(3) $(2 \times 3)^{15}$ 、 $2^{14} \times 3^{16}$

(4) $2^{13} \times 4^9$ 、 $4^{12} \times 8^3$

(5) $(2^9)^8$ 、 $(2^{10})^7$

2. 計算 $7^3 + (-4)^3$ 之值為何？

3. 下列敘述何者正確？

(A) $2^3 - (-2)^3 = 0$

(B) $2^4 - (-2^4) = 0$

(C) $(-2)^3 - (-2^3) = 0$

(D) $(-2)^4 - (-2^4) = 0$

4. 計算 $11 - 3^2 \times [2 - (-3)^2] + 6$ 之值為何？

5. 算式 $(-3)^4 - 7^2 - \frac{2^6}{(-2)^3}$ 之值為何？

教材樣本集

+

高中階段



素養實踐計畫高中組





數，因使用需求而產生。

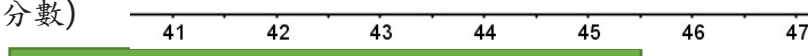
只要是實際看得到的長度，都可以用「實數」系統形容。

我們需要哪些數，才能描述所有可能的長度？

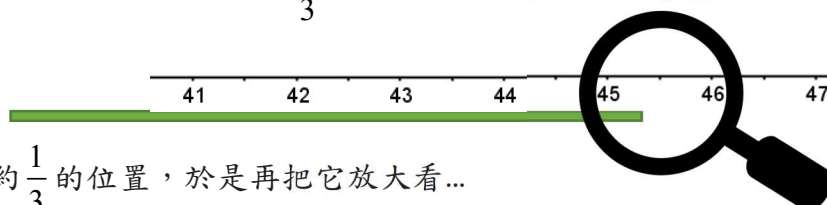
阿銘想量竹竿的長，他把一端放在 0 的位置...

1. 若另一端剛好落在刻度 45 公分的位置，那麼量到的竹竿長為_____公分。
(整數)

2. 若另一端剛好落在刻度 45 和 46 公分中間的位置，那麼量到的竹竿長為_____公分。(分數)



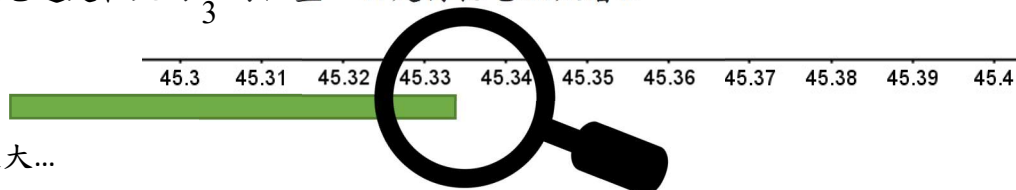
3. 若另一端落在刻度 45 和 46 公分大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，我們把它放大來看...



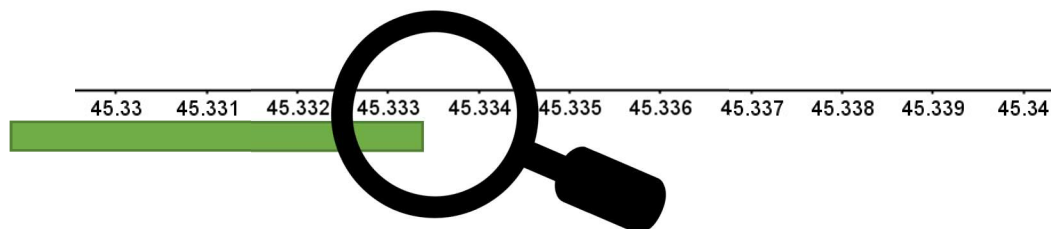
發現它還是在大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，於是再把它放大看...



發現它還是在大約 $\frac{1}{3}$ 的位置，於是再把它放大看...



再放大...



一直都還是在 $\frac{1}{3}$ 的位置...，那它的長度應該是多少呢？_____我們有真的量到它嗎？_____它寫成小數是_____

4. 分數寫成小數只有兩種形態：

有限小數，如 $\frac{1}{2}$ 。

反過來，我們可以把 5.3 這個有限小數寫成分數嗎？_____

無限循環小數，如 $\frac{1}{19}$ ，一定保證會循環嗎？請說明。

$19 \overline{)1}$

反過來，我們可以把 $5.\overline{328}$ 這個無限循環小數寫成分數嗎？

想想看...「無窮」這件事

無窮，是個形容詞，不能直接拿來算，只能靠推論。

阿銘量身高，機器上方的量尺不斷下降，靠近阿銘的頭...慢慢的、不斷的靠近...

當尺靠到頭的時候，量到的長度是尺的長度還是阿銘的身高？它們是一樣的嗎？_____

尺的刻度可以拿來標示為阿銘的身高嗎？_____有更好的選擇嗎？_____ 身高是身高、尺是尺，阿銘的身高和尺的刻度差了什麼？_____

數，被用來標記長度，差一個點，長度有差嗎？_____

$0.\overline{9} = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \dots$

每加一次，它與 1 的距離就又縮為原來的 _____，無止無盡的靠近，

那麼 $0.\overline{9}$ 和 1 有一樣嗎？_____

我們如何檢驗？

重要觀

三一律：
兩實數之間的關係，大於、等於、小於，三選一

$0.\bar{9}$ 是形容一個不斷靠近 1 的數，那麼最適合拿來描述 $0.\bar{9}$ 的數是哪一個數呢？

兩個分數之間，一定還有分數嗎？_____ 你能在 $\frac{1}{9999}$ 與 $\frac{1}{10000}$ 間再找一個分數嗎？_____

0 是什麼都沒有嗎？ $\frac{1}{9}, \frac{1}{99}, \frac{1}{999}, \frac{1}{9999}, \frac{1}{99999}, \dots$ 這樣的數列，會一直往 0 靠近，越來越小、越來越小... 到最後還有剩嗎？剩下什麼呢？_____

按照這樣的想法，有理數（分數）已經密密麻麻的囉！那麼，數線還有空隙嗎？... 也就是說，分數已經足夠我們描述所有可能的長度了嗎？

重要觀念

兩數是否一樣，如何得知？

(1) 減法： $a - b$ 是否為 0？

(2) 除法： $\frac{a}{b}$ 是否為 1？

非分數 Irrational Numbers (無理數)

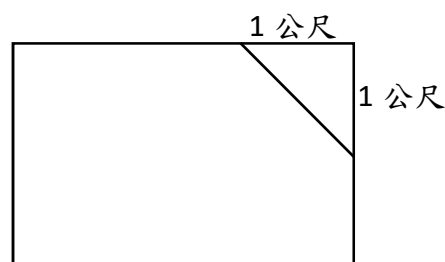
阿銘想在房間的一個轉角做一個櫃子，如右圖，請用畢氏定理，幫阿銘算出櫃子的面寬應該是_____公尺。

這個數是量出來的，還是算出來的？_____

它是真實存在的長度，所以我們在數線上一定找得到它，對吧！

$\sqrt{2}$ 這個數可以寫成有限小數或無限循環小數(分數)嗎？

- 證明 $\sqrt{2}$ 不是分數。

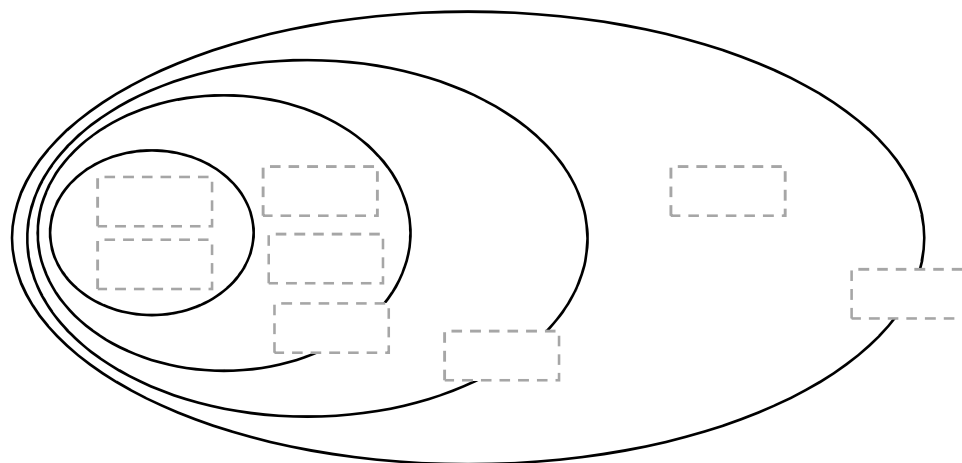


顯然，原來發展出來的數已經不夠用。我們稱像 $\sqrt{2}$ 這樣的數為無理數。但它不是分數，所以既不是有限，也不會循環，那麼它就是無限不循環小數了！

無理數不是分數，表示分數還是有空隙囉！那麼，數線上我們再加上無理數(非分數)之後，還有空隙嗎？

→戴得金切割 (Dedekind cut) 告訴我們，沒空隙了，已經全部填滿了。

自然數 $\mathbb{N}$ 、整數 $\mathbb{Z}$ 、正整數 $\mathbb{Z}^+$ 、0、負整數 $\mathbb{Z}^-$ 、有理數 $\mathbb{Q}$ (分數)、無理數(非分數)、實數 $\mathbb{R}$ ，這些數如果要用填入下列區域中，如何擺放比較好？





絕對值，意思是「我不在乎這個數的正負(性質)，只想知道它的值有多大～」

例一：

下圖是我國 2016~2018 年的進出口統計表。

淨出口為正值時，稱為貿易順差或出超。

淨出口為負值時，稱為貿易逆差或入超。

但是當我們想觀察貿易活躍程度時，我們必須同時觀察進口與出口的貿易值，也就是說，我們在乎貿易總值。此時，我們不在乎正負，只在乎總量。因此，貿易總值＝出口總值＋進口總值。我們在乎的是差距還是正負？_____

表 我國進出口統計

單位：億美元；%

年月別	貿易總值		出口總值		進口總值		出(入)超	
	金額	成長率	金額	成長率	金額	成長率	金額	成長率
2016年	5,108.9	-2.2	2,803.2	-1.8	2,305.7	-2.8	497.5	3.4
2017年	5,765.2	12.8	3,172.5	13.2	2,592.7	12.4	579.8	16.5
2018年	6,222.4	7.9	3,359.1	5.9	2,863.3	10.4	495.8	-14.5

資料來源：經濟部國際貿易局

例二：

媽媽用奶瓶餵 baby 喝奶，每餐都固定準備 200ml 的奶。

第一餐，baby 喝完後剩下 30ml。請問 baby 這餐喝了多少奶？

你如何算出來的呢？請列出算式。

第二餐，baby 喝到刻度 80ml 時睡著了，醒來後又繼續喝，最後剩下 15ml。請問 baby 醒來後喝了多少 ml？請列出算式。

第三餐，baby 喝完後剩下 50ml。

請算出 baby 今天這三餐一共喝了多少奶？_____ml



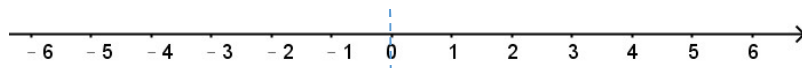
重要觀念

我們在乎的是差距還是正負？_____

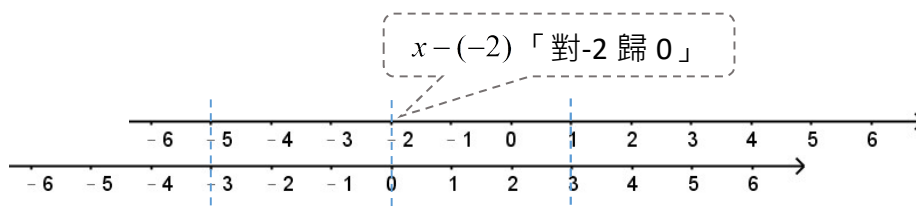
$a - b$ ，減 b 就是「對 b 歸 0」

看差距

- $|x-0|=3$ 的解為_____ $\Leftrightarrow$ 在數線上與 0 差距為 3 的點有哪些?



- $|x+2|=3$ 的解為_____ $\Leftrightarrow$ 在數線上與 -2 差距為 3 的點有哪些?



代數——研究數、數量、關係、結構與代數方程（組）的通用解法及其性質的數學分支。

幾何——核心是距離，研究圖形的結構與性質之數學分支。

圖形輔助——代數與幾何的相輔相成。

針對一個問題，我們可以用**代數**的思維來看，也可用**幾何**的想法。

另外，自從有了笛卡兒坐標幫我們從圖形的高度看到數值的大小，代數與幾何於是相輔相成，又有了不一樣的視野，我們可以透過對函數圖形的了解來協助我們思考。

在高中，我們常在這三種思維中切換，尋找方法解決問題。針對絕對值，我們也可分別用三種角度來切入。

首先，我們應該找到正負之間的臨界點在哪裡？

如果 $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $|x+3| = 0$

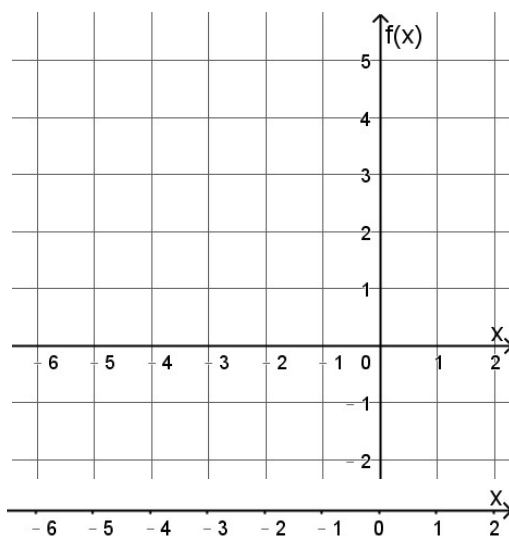
如果 $x > \underline{\hspace{2cm}}$, $|x+3| = \underline{\hspace{2cm}}$

如果 $x < \underline{\hspace{2cm}}$, $|x+3| = \underline{\hspace{2cm}}$

歸零的點(臨界點)是 $\underline{\hspace{2cm}}$

如果我們把它視為數值 $y = |x+3|$

，請在右方畫出它的圖形。



接下來，我們要開始看圖說話哦！

(1) x 是多少的時候 y 值會等於 3？

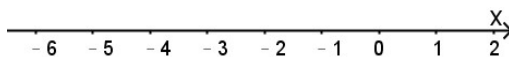
專業數語： $|x+3| = 3$ 的解。

請在右方標示解範圍。

並在下方以代數形式寫出 x 的可能範圍。

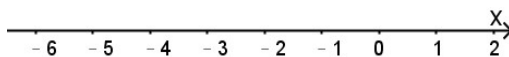
(2) x 是哪個範圍的時候 y 值會比 3 大？

專業數語： $|x+3| > 3$ 的解。



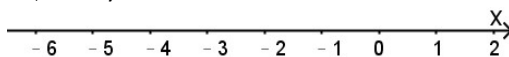
(3) x 是哪個範圍的時候 y 值會比 0 大？

專業數語： $|x+3| > 0$ 的解。

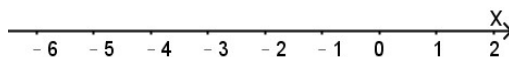


(4) x 是哪個範圍的時候 y 值會比 3 小？(不准笑!!)

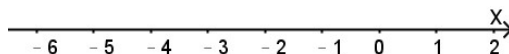
專業數語： $|x+3| < 3$ 的解。



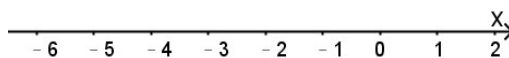
(5) 求 $|x+3| < 0$ 的解。



(6) 求 $|x+3| \leq 0$ 的解。



(7) 求 $|x+3| \geq -1$ 的解。



註：課綱提到不應出現函數圖形求解，請自行斟酌教學

代數思維：

求解 $|x-2|+|x+3|=7$

找到臨界點，並分段討論 **方程式**：

第一段：

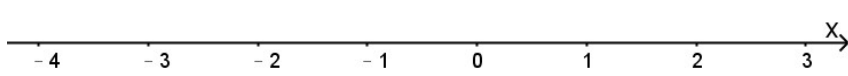
第二段：

第三段：

幾何思維：

求解 $|x-2|+|x+3|=7$

→ 到_____的距離 + 到_____的距離 = 7 的點 → 拉橡皮筋…



解範圍：_____

圖形輔助思維：

求解 $|x-2|+|x+3|=7$ → 將方程式轉換成函數值的思維…

(1) 找到臨界點，並分段討論 $y=|x-2|+|x+3|$ 之值

第一段：

第二段：

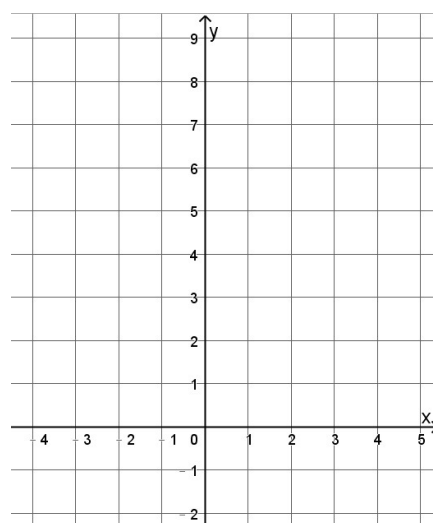
第三段：

$f(x)=$

$f(x)=$

$f(x)=$

(2) 畫出 $y=|x-2|+|x+3|$ 的圖形



(3) 判斷並找出符合要求的解



一. 前言

生活中遇到的事物，有時候我們會說越小越好，有時候我們會說越大越好...，
例如：

日前精密加工的精度已達到奈米級，並不斷的向更高精度、更小尺度方向發展，量子力學和雷射技術引發的微奈米製造，製造出極小尺度和極高精度產品。對奈米加工技術而言，越小等級越高。

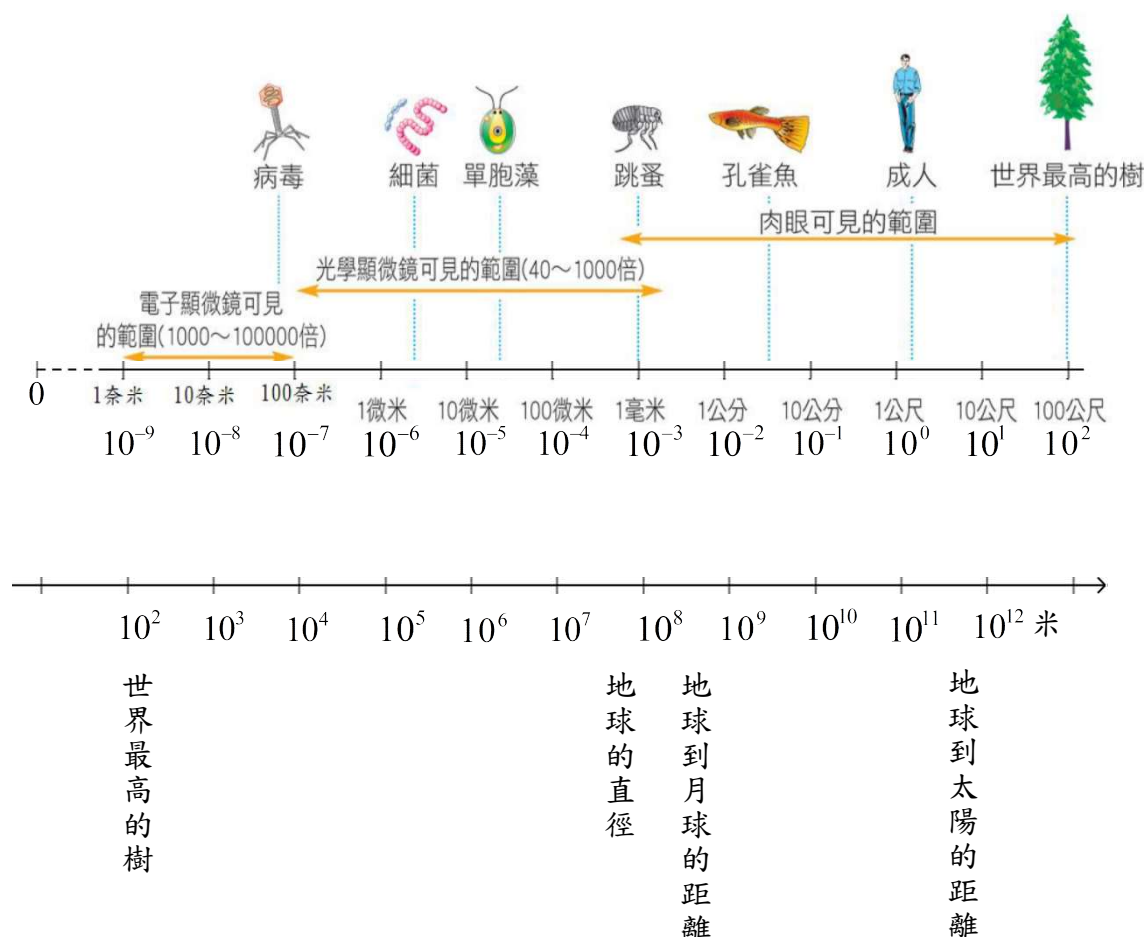
地震能量的計算可以研究地震的發生及地震的本質，而地震規模越大，地震所釋放的能量也越高。

在過去，我們會以幾個單位量來感受數的大小，但如此對於相對很大或很小的數，僅僅使用不同的單位不容易理解它的大小，也不方便做計算。尤其很多時候我們更在意的其實是數是以什麼樣的倍率在成長（如銀行的複利）時，我們想看的是它被等倍數放大或縮小幾次。（一種 zoom in 與 zoom out 的感覺）
在這個單元，我們要換個角度，用等級的方式來表達一個數的大小，特別是很大或很小的數。

二. 看等級

我們想要看什麼事物的等級？

1. 多大？多小？ 你想要看的是哪一個等級？



- 夜空中群星閃爍，明亮有別。為定量描述星星亮度，天文學家創用「星等」的概念，把星星分成六個等級，一等星最亮，六等星最暗，一等星的星光強度大約是六等星的 100 倍，等級之間的星光強度相差約 2.5 倍。
- 自然界，對於地震的大小是用等級衡量的，地震等級每相差 2 級，能量增加 1000 倍，能量等級之間的差約 32 倍。
- 人的感覺上的強度，大約和刺激強度的等級成正比。比如，我們感覺聲音大了一倍，不是因為聲源功率增加了一倍，而是聲源功率增加了一個數量級。每增加 10 分貝的音量，相對強度實為原來相對強度的 10 倍。

三. 科學記號→最簡單的等級表示法

科學記號是一種以 10 倍為晉級標準的整數等級表示法，也就是說兩數相差 10 倍，他們就相差一個等級，方便我們用來描述很大或很小的數。因為它跟我們平常慣用的數字系統相似，因此，它可瞬間讓我們清楚讀出該數大小，並且可以判讀此數在該等級中的定位大小。就讓我們來看看它的好用之處！

5. 這是辛巴威幣，你能在 5 秒讀它的面額嗎？很難吧！

請試著把這張鈔票的面額用最容易讀出來的方式寫下來：_____



2015 年辛巴威總統為了解決長久以來的通膨問題，宣布要正式廢棄辛巴威幣。2008 年之前發行的貨幣，每 250 兆辛巴威幣可以

重要觀念

$\frac{a}{b}$ 有兩種思維：

「把 b 當 1， a 是多少？」

「 a 是 b 的幾倍？」

換得 1 美元，請問這張辛巴威幣可以換成多少美元？_____

6. 某種病毒大小約為 0.00000008 米，你能一眼讀出它大約是多少奈米嗎？

你覺得我們會用 0.000000080003 米這樣的數來描述它嗎？_____

為什麼？_____

請試著把 0.00000008 用最容易讀出來的方式寫下來：_____

如果一奈米 = 10^{-9} 米，0.00000008 米是多少奈米呢？_____

如果你的身上有 34565 元，你會如何「大約」形容身上錢的多寡？

☐ 0.3 十萬多元 ☐ 3 萬多元 ☐ 34 千多元

在你的形容中 $34565 = 3 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

萬

千

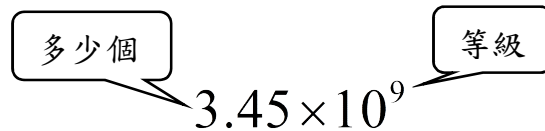
百

十

個

7. $10^{10} + 10^{15}$ 最接近哪一個數？ ☐ 10^{10} ☐ 10^{15} ☐ 10^{16} ☐ 10^{25}

8. 對於很大或很小的數，我們會用科學記號來形容它的大小。因為數很大或很小，所以我們只在乎(或是只能精確到)前幾個具有影響力的數字。
用科學記號來形容，方便直接讀取其等級，以及在這個等級中的大小：

 3.45×10^9

9. 1×10^9 是第 9 等， $10 \times 10^9 = 10^{10}$ 是第 10 等，那麼你覺得科學記號 $a \times 10^b$ 中， a 應該有何限制？_____

四. 有效數字

在談有效數字之前，我們先談談什麼是「概數」。

「概數」談的是，針對我們既有的數據，我們不需要太精準描述時，會想找到一個可以形容其大概的大小，又不失真過多又好用的做法。四捨五入常常是我們拿來取概數的一個方法。

例如：



- (1). 如果我們四捨五入取概數 7 來描述鉛筆的長度時，它實際的長度可能是介於哪一個範圍：_____ < 鉛筆長 < _____. 而剛好是兩個刻度的一半時，我們統一選擇下一個比較大的整數刻度單位來代表其值。

- (2). $\sqrt{2} \approx 1.4142135623730950488016887242097\dots$

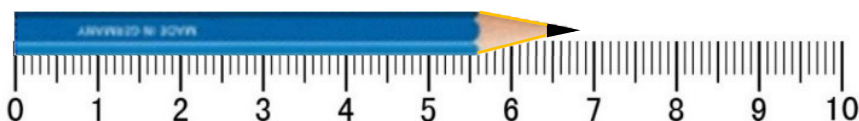
我們其實常常沒有必要這麼精準，所以會取個足以滿足需求的概數來

表示，如 $\sqrt{2} \approx 1.414$ 。

「有效數字」是：真正有意義的數字。

例如：當我們在測量的時候，它已經不在刻度上了，但我們想要找一個比現有刻度更準確的描述。它不一定是真正數值的大小，但卻是最靠近真正數值的最佳猜測。

例如：



- (1). 我們估計它真實的長度是 6.73。6、7、3 這三個數字都有它的代表意義，我們稱有效數字位數為 3 位。而 6.73 也是我們能夠精準描述的上限了。

估計值

- (2). 從地球到月球的平均距離是 384,401 公里(因為月球在橢圓軌道上運動，實際的距離隨時都在變化著)。寫成科學記號應為 3.84401×10^5 ，隨著測

量儀器的日益精進，有效位數已可達 6 位。換算成公尺則記為 3.84401×10^8 ，有效位數仍然是 6 位。

但如果我們只想大約描述其距離，我們可能會說大約是 384000 公里，或 38 萬公里，如此我們稱之為概數。

科學記號 $a \times 10^b$ ($1 \leq a < 10$, b 為整數) 中，係數 a 的所有數字皆為**有效數字**。
有效數字的位數稱為「有效位數」。

10. 科學記號表示法 3.1×10^5 與 3.100×10^5 有何差別呢？_____

有效數字的加減乘除

為方便識別估計數字，我們在其下方畫一短橫，如 2.35。

由於估計數字的不精確性，當我們想對帶有估計值的數字做運算時，我們同樣也必須考慮計算完後的數字之精確性，提供之後運用時參考。

估計

$$\begin{array}{r} 56.\underline{2} \\ + 0.4\underline{6} \\ \hline 56.66 \end{array}$$

精確

相加後受到影響
已不甚精確

估計

$$\begin{array}{r} 56.\underline{2} \\ - 0.4\underline{6} \\ \hline 55.84 \end{array}$$

精確

相減後受到影響
已不甚精確

估計

$$\begin{array}{r} 56.\underline{2} \\ \times 0.4\underline{6} \\ \hline 2248 \\ 25852 \\ \hline 25852 \end{array}$$

估計

被估計值乘到的數，通通不精確了

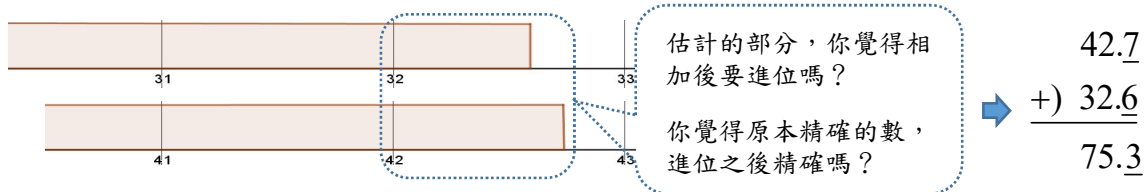
被估計值加到的數，也都不精確了

你覺得要不要用四捨五入進位？

從上面的例子我們發現：

- 估計的數字與精確數字作加減乘除的運算後，精確數字因為受到估計數字不精確運算後的影響，會：☐精確 ☐不那麼精確

另一個運算上會遇到的問題是進位。舉例來說42.7與32.6這兩數相加時：



- 兩個估計數字相加後若進位，則：☐還算得上精確 ☐不那麼精確

我們試著練習對帶有估計位數的有效數字做加減乘除的運算。過程中每一次的運算都請在「不那麼精確」的數字下方畫上短橫。並在最後，圈出精確數字並取一位最高的估計位數，之後的位數均四捨五入。

例如： $9.28 + 3.954 + 4.40 = 17.634 = 17.63$

$$\begin{array}{r} 5.8 \\ +) 2.35 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5.8 \\ -) 2.35 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5.8 \\ \times) 2.35 \\ \hline \end{array}$$

$$6.7 \overline{) 75.3}$$

小結：

(1) 加減法：有效位數取估計數字位數最高者，其餘四捨五入。

估計的數字與精確數字作加減乘除的運算後為估計數字。

兩個估計數字相加後若進位，則算確定數字。

(2) 乘除法：有效位數取兩數中之最小有效位數。

★如需複習國中的指數律，可先看第八部分：『關於指數』

五. 數字的等級表示法

(以下註：十年級課綱僅介紹以 10 為底的常用對數符號，其他底數挪往十一年級，可斟酌教學)

我們用等級的方式來詮釋一個數字的方法有兩種：

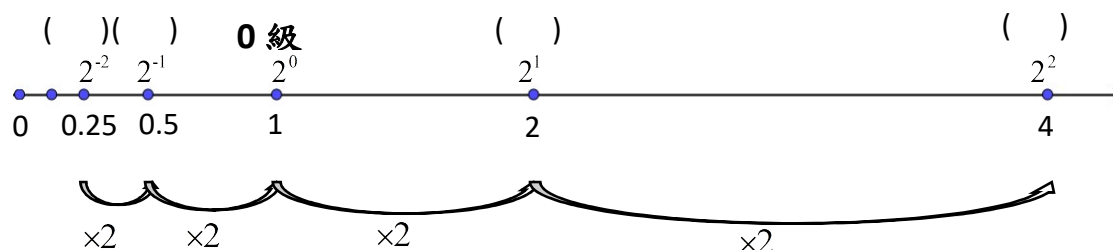
A. 數字越大等級越高， B. 數字越小等級越高。

A. 數字越大等級越高

★以晉級標準 2 示例

數字越大等級越高，表示晉級標準____1。(填大於或小於)

請在括號寫標上對應的等級。



試將 5 這個數寫成以 2 為晉級標準的科學記號，

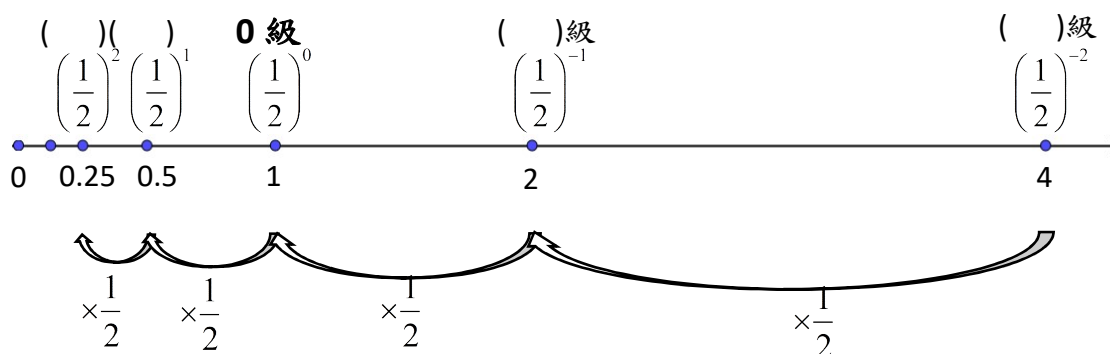
亦即 $5 = \boxed{a} \times (2)^{\boxed{b}}$ ， $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

B. 數字越小等級越高

★以晉級標準 $\frac{1}{2}$ 示例

數字越小等級越高，表示晉級標準____1。(填大於或小於)

請在括號內標上對應的等級。



試將 5 這個數寫成以 $\frac{1}{2}$ 為晉級標準的科學記號，

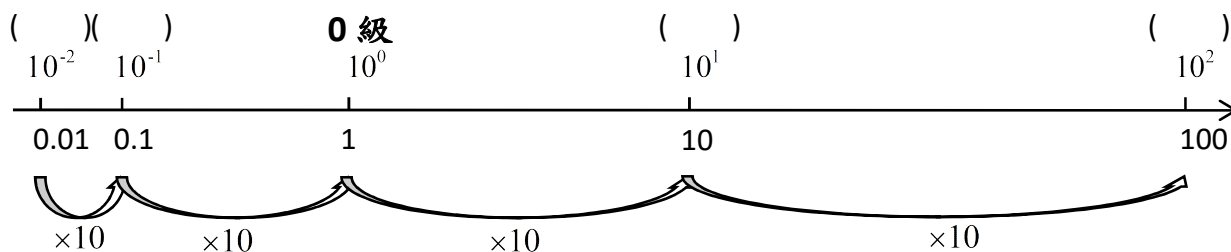
亦即 $5 = \boxed{a} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{b}}$ ， $a = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

六. 重返科學記號

11. 我們再回到慣用的科學記號看等級。首先，每 $\times 10$ 就會增加一等，所以我們的晉級標準是 10。

請在括號內標上對應的等級。

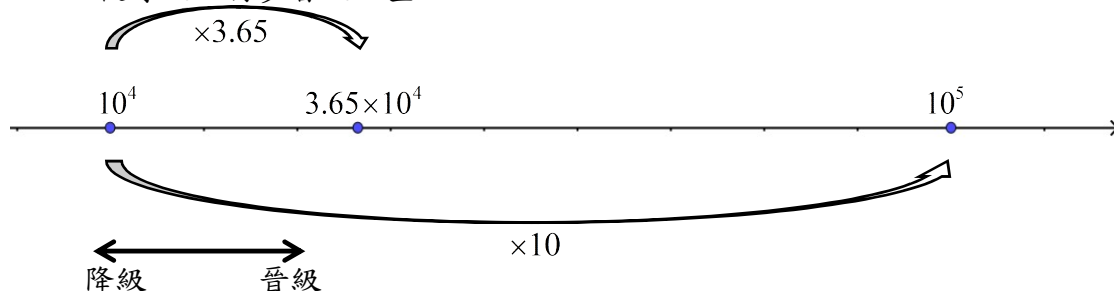
(此 scale 未按照比例畫)



由此可知，當晉級標準為 10 時，增加 1 級，數會變為原來的_____倍；增加 2 級，數會變為原來的_____倍；增加 3 級，數會變為原來的_____倍…，以此類推。

12. 細看 10^4 這個等級中， 3.65×10^4 在什麼位置呢？

從等級 4 再多晉級一些...



整數的等級顯然不夠用，如果我們需要更精確的形容等級， 3.65×10^4 應該大約是幾等呢？我們不妨分段思考。

如果我們單看 10^4 ，它是幾等呢？_____

如果我們單看 3.65 的等級，它大約是幾等呢？_____ (亦即 $3.65 = 10^?$ ， $0 < ? < 1$)

用計算機幫忙，看看能不能更精確些？_____ (請四捨五入精確到小數點後二位)

試試把 3.65 和 10^4 這兩個等級合併，它代表的等級是_____。

13. 在數學上，我們另有專有名詞來分別形容這個不滿 1 的等級與整數等級
哦！

$$3.65 \times 10^4 = 10^{\boxed{\text{尾數}}} \times 10^4 \approx 10^{\boxed{\text{首數}}}$$

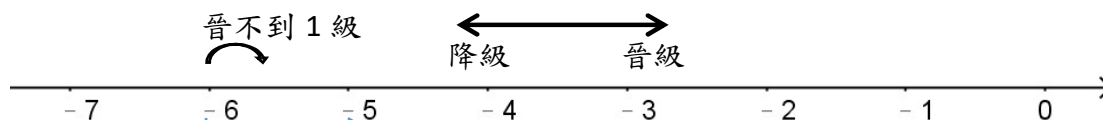
也就是說，

首數是：在那一個等級之下。
尾數是：再繼續「晉級」的大小。

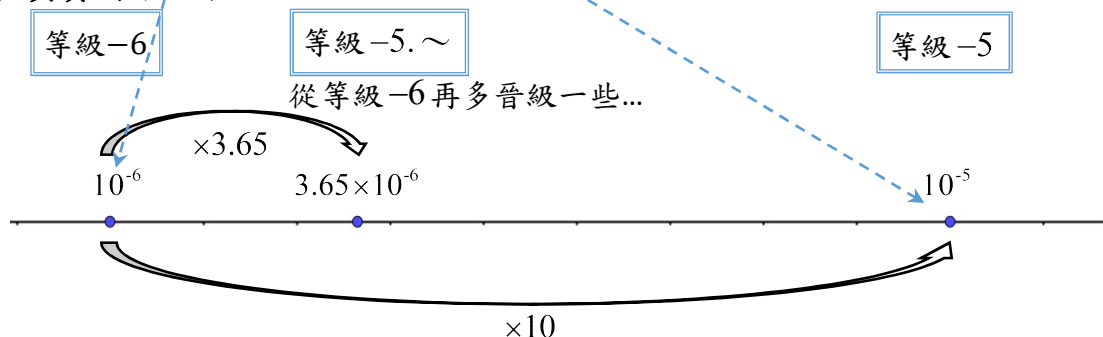
14. 接下來我們來挑戰負等級。

細看 10^{-6} 這個等級中...。負的等級，我們必須慢慢想清楚。

就等級而言：



就真實的數而言：



3.65×10^{-6} 應該大約是幾等呢？我們也可分段思考。

參考前面算出的數據， 10^{-6} 是____等，而再 $\times 3.65$ 會讓我們的等級從 -6 再多晉一些，大約多_____等（亦即 $3.65 = 10^?$ ， $0 < ? < 1$ ），

所以 3.65×10^{-6} 代表的等級會是_____。

尾數：再多晉級一些

首數：在等級

$$3.65 \times 10^{-6} = 10^{\boxed{\text{尾數}}} \times 10^{-6} \approx 10^{\boxed{\text{首數}}}$$

(註：十年級課綱不介紹首尾數，挪往十一年級，可斟酌教學)

15. 在數學上，用對數函數 $\log x$ 來標示 x 這個數的等級。

$\log x$ 代表：『 x 』這個數在 10 這個晉級標準下，所代表的

『等級』。
$$x = 10^{\log x}$$

16. x 在以 a 為底時的等級為_____

x 在以 b 為底時的等級為_____

x 在以 c 為底時的等級為_____

所以， $x = a^{\boxed{}} = b^{\boxed{}} = c^{\boxed{}}$

17. 做些練習熟悉一下新學到的對數函數：

$\log 1000 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 10^{9.8} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 10^{-7.1} = \underline{\hspace{1cm}}$ ，

$\log \frac{1}{10000} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $10^{\log 3.6} = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $10^{\log \frac{1}{2}} = \underline{\hspace{1cm}}$ ；

若 $\log 5.5 \approx 0.74$ ，那麼 $10^{1.74} \approx \underline{\hspace{1cm}}$

18. 請用計算機，找到下列等級，精確到小數點後 4 位：

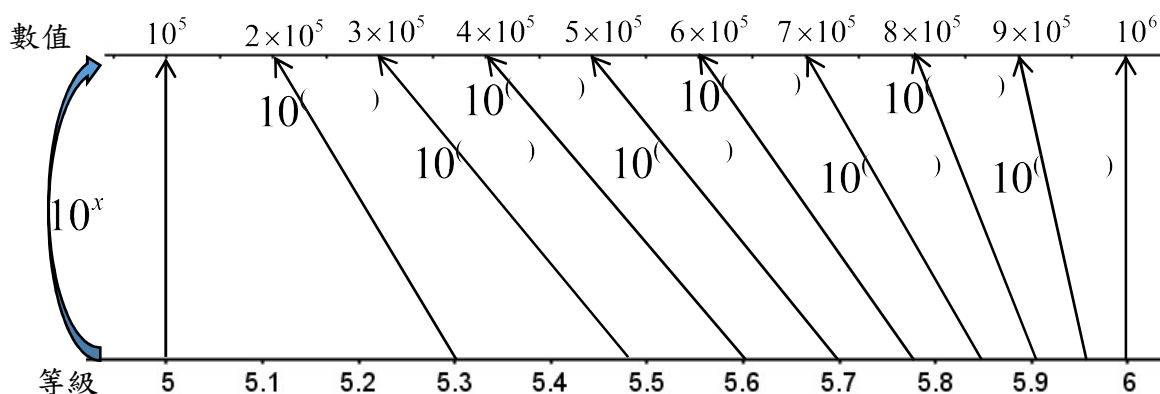
$\log 2 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 3 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 4 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 5 = \underline{\hspace{1cm}}$ ，

$\log 6 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 7 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 8 = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $\log 9 = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

19. 如果將 x 寫成科學記號 $x = a \times 10^b$ ， a 的範圍是_____，

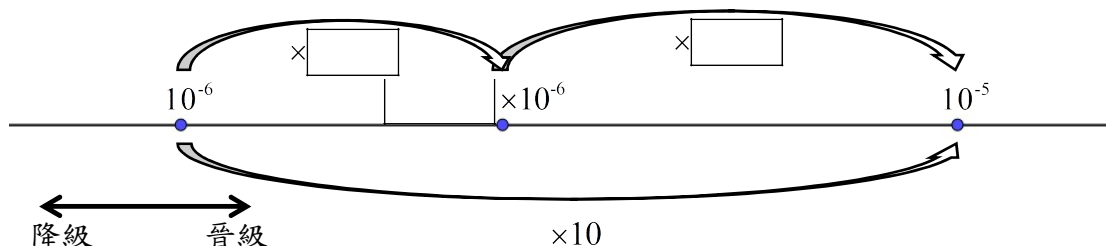
所以 x 的尾數可記為_____，其範圍應為_____。

20. 利用 17 題的數值，完成下方空格。



21. 算算看，0.5 等級大約是多少？_____ (請精確到小數後 2 位)

因此科學計號 (等級) 表示法中，代表等級 5.5 等的數應該為：_____



22.

一定大於 0 小於 1 $\Rightarrow$ 尾數 $\left\{ \begin{array}{l} \text{首數} \leftarrow \text{可以大於 0，也可以小於 0} \end{array} \right.$

$$a \times 10^b = 10^{\boxed{}} \times 10^b \approx 10^{\boxed{}}$$

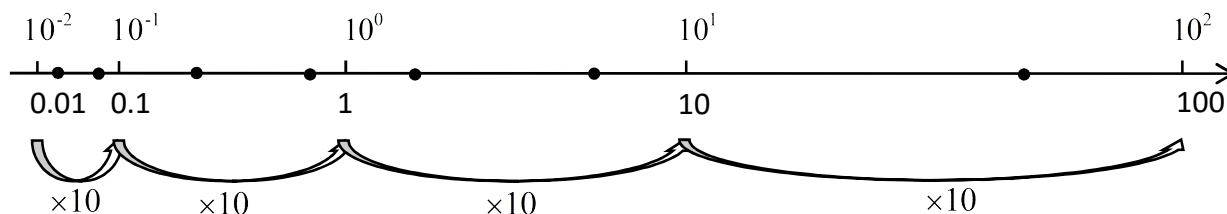
23. 有了等級的表示法，對於很大或很小的數，是不是變得更好算了呢？

(用計算機幫忙，等級四捨五入到小數後 2 位)

$$\begin{aligned} & 3450000000 \times 700000000 \\ &= (3.45 \times 10^9) \times (7 \times 10^8) \\ &= 10^{\boxed{}} \times 10^9 \times 10^{\boxed{}} \times 10^8 \\ &= 10^{\boxed{}} \end{aligned}$$

24. 利用 20 題的數據或計算機，連連看，在下方找到適合這些數的等級。

$10^{-1.8}$ 、 $10^{0.11}$ 、 2×10^{-1} 、 7×10^{-2} 、 6.1×10^1 、 $10^{-0.2}$ 、 3.6×10^0



25. 5.99×10^{13} 是 5.99×10^{10} 的 _____ 倍。

$a \times 10^{b+1}$ 是 $a \times 10^{b-1}$ 的 _____ 倍。

$5a \times 10^{b+1}$ 是 $a \times 10^{b-1}$ 的 _____ 倍。

26. 若 $\log x = 8.622$, $\log y = 5.622$, 則 x 是 y 的 _____ 倍。

若 $\log x = -3.622$, $\log y = -1.622$, 則 x 是 y 的 _____ 倍。

若 $\log x = 1.622$, $\log y = -0.378$, 則 x 是 y 的 _____ 倍。

27. $10^{11.3}$ 是 $10^{14.3}$ 的 _____ 倍。

$10^{-1.27}$ 是 $10^{-2.27}$ 的 _____ 倍。

$10^{2.66}$ 是 $10^{-1.34}$ 的 _____ 倍。

28. 若 $\log x = 3 + \log y$, 則 x 是 y 的 _____ 倍。

若 $\log x - \log y = -2$, 則 $\frac{x}{y} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

29. 若正實數 x, y 滿足 $\log_{10} x = 2.8$, $\log_{10} y = 5.6$, 則 $\log_{10}(x^2 + y)$ 最接近下列
哪一個選項的值? ($\log 2 \approx 0.301$)

(1) 2.8 (2) 5.6 (3) 5.9 (4) 8.4 (5) 11.2 。 **【101 學科能力測驗】**

30. 芮氏地震規模 r 與釋放能量 E 的關係為何?

留意：這裡是 1.5 倍

中央氣象局根據地震學家古騰堡之公式： $\log E = 11.8 + 1.5r$ 。

可知規模 r 每增加 1 , 其所釋放的能量(E 單位爾格,erg)約增大 _____ 倍。

規模增加 2 , 相當於地震釋放能量增大為 _____ 倍。

31. 承上題，已知民國 88 年 921 集集大地震芮氏規模為 7.3 , 民國 100 年 311 日本仙台大地震芮氏規模為 9.0 。那麼日本仙台大地震所釋放出的能量約為集集大地震的 _____ 倍。

32. 分貝表示聲音的強度或響度，也就是音量。零分貝的設定，是根據聽力正常的年輕人所能聽到的最小聲音所得到的。發出零分貝所需的功率值為 P_0 。我們把所需的功率值稱為強度。

描述聲音大小的單位為分貝(dB)，其與聲音的相對強度($\frac{P_{dB}}{P_0}$)可寫成下列

關係式：
$$dB = 10 \cdot \log \frac{P_{dB}}{P_0}。$$

根據此式：

- (1). 10 分貝相對強度是 0 分貝強度的_____倍。
20 分貝相對強度是 0 分貝強度的_____倍。
- (2). 故每增加 10 分貝等於相對強度變為原來相對強度的_____倍，每增加 20 分貝等於相對強度變為原來相對強度的_____倍，每增加 30 分貝等於相對強度變為原來強度的_____倍。
- (3). 一般人的談話音量約為 60 分貝，而哭鬧中的孩子音量可達 122 分貝，請問哭鬧聲的相對強度是談話聲音相對強度的多少倍？_____
- (註：救護車警笛開到最大聲時，高達 118 分貝，飛機場跑道 120 分貝。)
- (4). 一個小孩哭鬧以 122 分貝來計算的話，幾個小孩一起哭鬧時，音量會變成 132 分貝？_____ (有沒有很佩服幼兒園老師呢?)

我們也會需要別種晉級標準嗎？

33. pH 值是衡量酸鹼性的直接尺度，其範圍介通常於 $pH=0$ 到 $pH=14$ 之間，

化學上以 pH 值來表示水溶液的酸鹼性，以氫離子莫耳濃度 $[H^+]$ 來標定。

在 25°C 下， $pH=7$ 的水溶液為中性，這是因為水在 25°C 下自然電離出的氫離子和氫氧根離子濃度的乘積始終是 1×10^{-14} ，中性水溶液此時兩種離子的濃度都是 $1 \times 10^{-7} \text{mol/L}$ 。

pH 大於 7 表示 H^+ 的濃度小於 OH^- 的濃度，此時我們定義溶液鹼性比較強。

我們希望定義 pH 愈大，溶液的鹼性（等級）也就愈強。

例如：

氫離子莫耳濃度 $[H^+]$	pH 值
10^{-5}	5
10^{-6}	6
10^{-7}	7
10^{-8}	8
10^{-9}	9

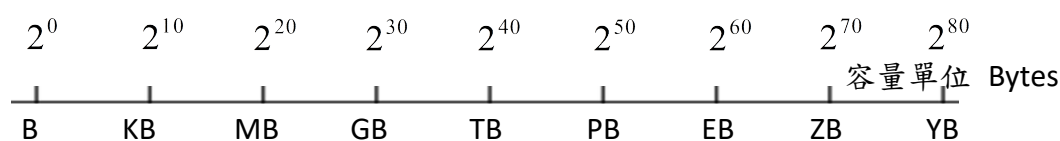
氫離子濃度越小，等級越：☐高 ☐低

猜猜看它的晉級標準是：_____

34. 電腦是採用電路運作（I/O），故儲存容量單位是以二進位計，因

此，我們會使用 2 當晉級標準。

你的硬碟是哪一個等級呢？



1 PB 的硬碟容量是_____TB。

35. 晉級標準可以是 1 嗎？_____

如果晉級標準是 1，那等級有意義嗎？_____為什麼？_____

七. 對數函數

(註：十年級課綱不介紹底為 10 以外的對數函數，挪往十一年級，可斟酌教學)

$f(x) = \log_a x$ ，這是對數函數，它在表現 x 這個數在以 a 為晉級標準時的「等級」。簡言之，它是一個看等級的函數，直接反應出 x 這個數的等級大小。

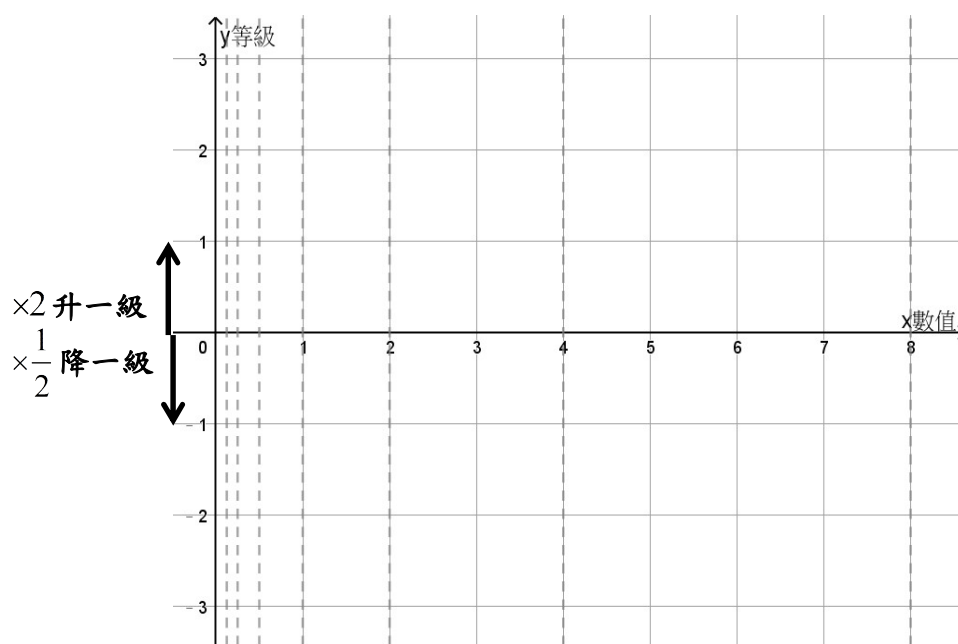
$f(x) = \log_a x$

真數

晉級標準，
一般稱底數
(底數為 10 時
常省略不寫)

例如： $f(x) = \log_2 64$

36. 就如同其他函數，我們想看它函數值是如何改變的，可以藉助函數圖形。用前述「數字的晉級表示法」的概念，以高度代表等級，描點概畫出函數 $f(x) = \log_2 x$ 的圖形。(僅在 y 為整數的地方描點即可)

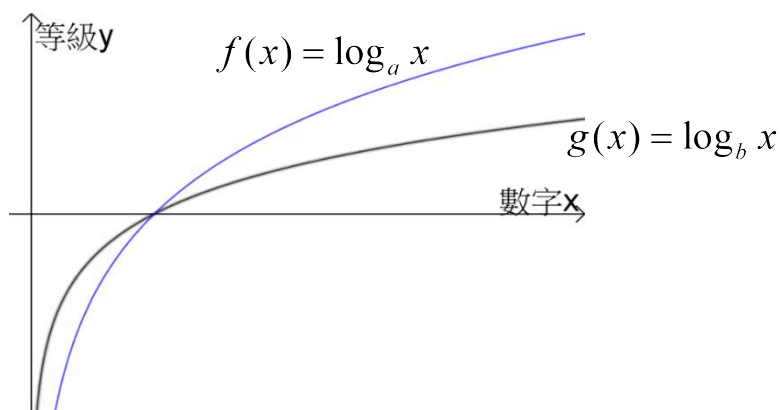


觀察圖形：

- (1). 當 x 越大，等級會越_____，當 x 越小(靠近 0)，等級會越_____。
- (2). 我們不看負數的等級，所以對數函數圖形只表現在 x 軸正向。
- (3). 觀察圖形中的虛線，每一個等級的範圍，都是前一個等級範圍的_____倍，但等級只有提高一級，等同於它用比前一級多兩倍的距離才能再晉升一級。換句話說，只要把這一級的圖左右放大兩倍，就會是下一級的函數圖形。
- (4). 因此，我們只要掌控了 0~1 級之間的圖形，就等於掌控了整個函數的圖形。
- (5). 由於底數為 2，所以等級為 1 時， x 必為_____。我們可藉此快速辨認函數圖形的底數大小。
- (6). 下列哪些點也會落在函數 $f(x) = \log_2 x$ 的圖形上呢？

☐ $(3, \log_2 3)$ ☐ $(-3, -\log_2 3)$ ☐ $(2^{4.5}, 4.5)$ ☐ $(10, 2^{10})$ ☐ $(\frac{1}{2^{2.9}}, -2.9)$

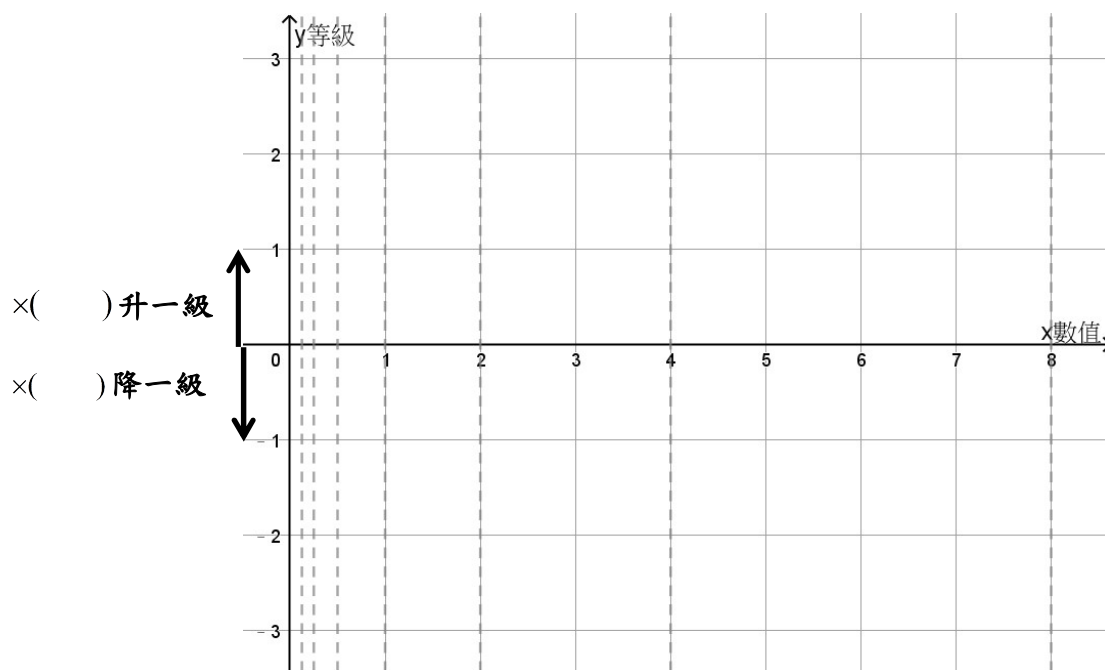
37. 觀察下圖，試著回答下列問題：



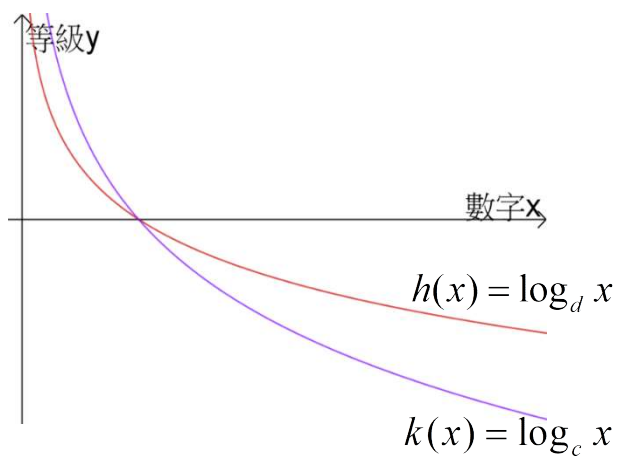
- (1). 哪一個函數比較容易晉級？_____
- (2). a 與 b 兩個晉級標準哪一個比較大？_____，你如何得知？

- (3). 左圖中的晉級標準 a 、 b 是比 1 大還是比 1 小的數？_____，
你如何得知？_____

38. 描點概畫出函數 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形。(僅在 y 為整數的地方描點即可)



39. 觀察右圖，



(1). 哪一個比較容易晉級？____

(2). c 與 d 兩個晉級標準哪一個比較大？ c ____ d 你如何得知？

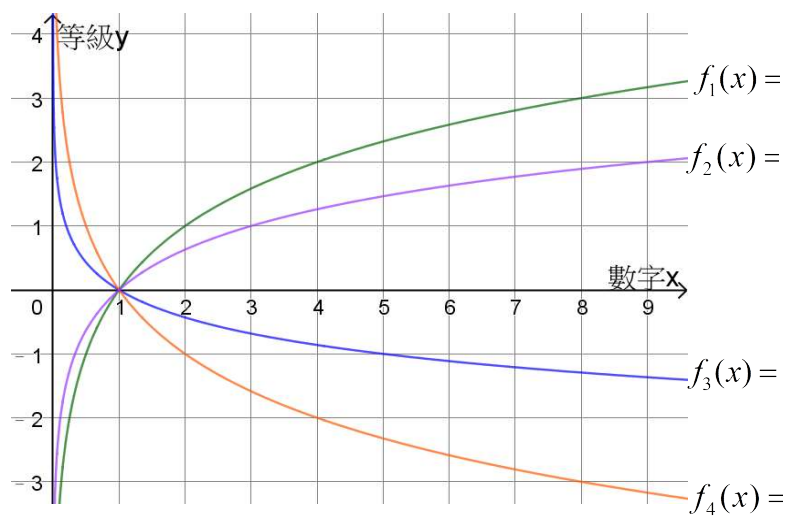
(3). 左圖中的晉級標準 c 、 d 是比 1 大還是比 1 小的數？_____

你如何得知？_____

40. 請找出下面 4 個等級函數圖形的“晉級標準”，並在圖形旁寫下其函數。

(1). 當晉級標準(底數)大於 1 時，你是如何判別的？

(2). 當晉級標準(底數)小於 1 時，你是如何判別的？



八. 關於指數

國中學過的指數表示法，它的指數部位代表等級(Index)。用等級的思維，指數律自然而然因應產生。

一次跳一級

等級 升一級 ↺ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	數 2^9 2^8 2^7 2^6 2^5 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 2^{-1} 2^{-2} 2^{-3} 2^{-4}	原本的數	2^2	2^2	2^2	2^2	2^2	2^2	2^2
		乘以	2^3	2^5			2^{-5}		
		升降級	+3						-4
		怎麼算	2^{2+3}			2^{2+10}		2^{2-7}	
		後來的數	2^5		2^9				

小結➡ (1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ (2) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$

一次跳 m 級(以 $m=3$ 為例)

等級 往上跳一次 ↺ -3 0 3 6 9 12	數 2^{12} 2^9 2^6 2^3 2^0 2^{-3}	從 2^0 開始，一次跳 2^3							
		升降級 (跳幾次)	+2	+4			-5		
		變成	$(2^3)^2$			$(2^3)^5$		$(2^3)^{-3}$	
		怎麼算	$2^{3 \times 2}$						
		後來的數	2^6		2^9				2^{-21}

小結➡ $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$

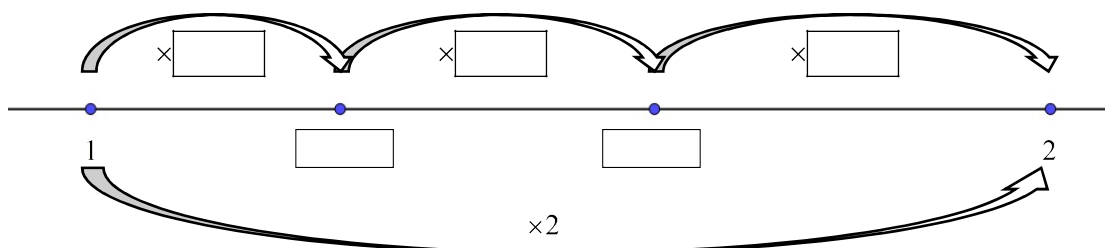
實數等級(實數指數)

從前述有關等級的討論我們可以了解，等級(index)經常會用到小數。也就是說，整數的等級是不夠用的，我們需要的是「實數」的等級。

我們知道，實數＝有理數＋無理數。我們分別來看它們。

①當等級是分數(有理數)時：

首先，我們來看看 $2^{\frac{1}{3}}$ 是什麼？同一個數連乘了3次會變成2



同一個數連乘了3次會變成2

→ $x^3 = 2$ ，我們稱之為『2的三次方根』，記為 $\sqrt[3]{2}$ 。

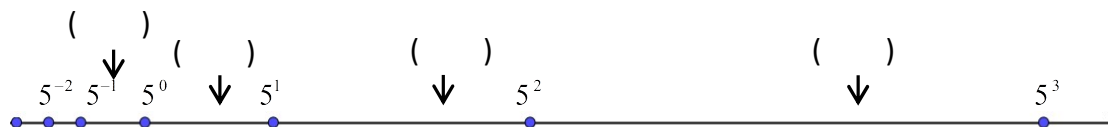
分數指數的定義：設 $a \in R, a > 0, m, n \in Z, n > 0$ ，則：

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (2) a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \times m} = (a^{\frac{1}{n}})^m, \text{ 解讀為 } m \text{ 個 } a^{\frac{1}{n}} \text{ 相乘。}$$

②當等級為不是分數(無理數)時：

你認為 $5^{\sqrt{3}}$ 大約在哪個位置比較合理？

試著下方適當的括號中填入 $5^{\sqrt{3}}$ 。($\sqrt{3} \approx 1.732$) → 我們依然相信有這個數！



41. 請用計算機算出 $5^{\sqrt{3}} =$ _____

42. 練習化簡：

$$(1) 27^{\frac{1}{3}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (2) 25^{\frac{3}{2}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (3) 8^{\frac{2}{3}} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (4) \sqrt[6]{4096} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

九. 對數的運算

(註：十年級課綱對數函數的運算，挪往十一年級，可斟酌教學)

當我們以等級(index)來表示數的大小，那麼等級的四則運算與真數之間有何關聯呢？在這個單元，我們要一起來想清楚， $\log_a x + \log_a y = ?$

首先，我們必須釐清一件事：不同的底之間適合做運算嗎？

例如： $3^{20} \times 5^{15}$ 好算嗎？

但如果我們都以 10 為底來看的話…，

我們知道 $3^{20} = 10^{9.542}$ 、 $5^{15} = 10^{10.485}$ ，

如此 $3^{20} \times 5^{15}$ 就會變得比較好算： $3^{20} \times 5^{15} \approx 10^{9.542} \times 10^{10.485} = 10^{20.027}$ 。

因此，我們喜歡在「相同的底」下做運算。

暖身： $\log_a 1 = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $\log_a a = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $a^{\log_a b} = \underline{\hspace{2cm}}$

A. 等級的加減法

43. **想法**： $\log 3 + \log 5 = \log ?$

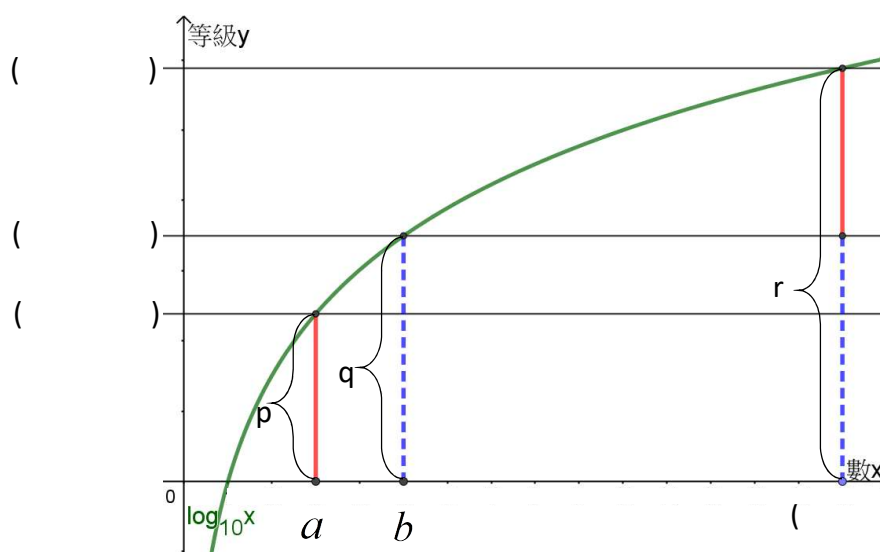
也就是說，在底為 10 時，3 的等級 + 5 的等級 = 哪一個數的等級？

先想想，原來的數做什麼樣的運算時，等級會相加？

$3 = 10^{\boxed{}}$ $5 = 10^{\boxed{}} \Rightarrow$	仿左，試論： $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$
--	---

結論：兩個數相乘 $\rightarrow$ 等級相加 $\log_a rs = \log_a r + \log_a s$

44. 若 $p + q = r$ ，請用 a, b 表示括弧中的數。



45. 想法： $\log_3 24 - \log_3 8 = ?$

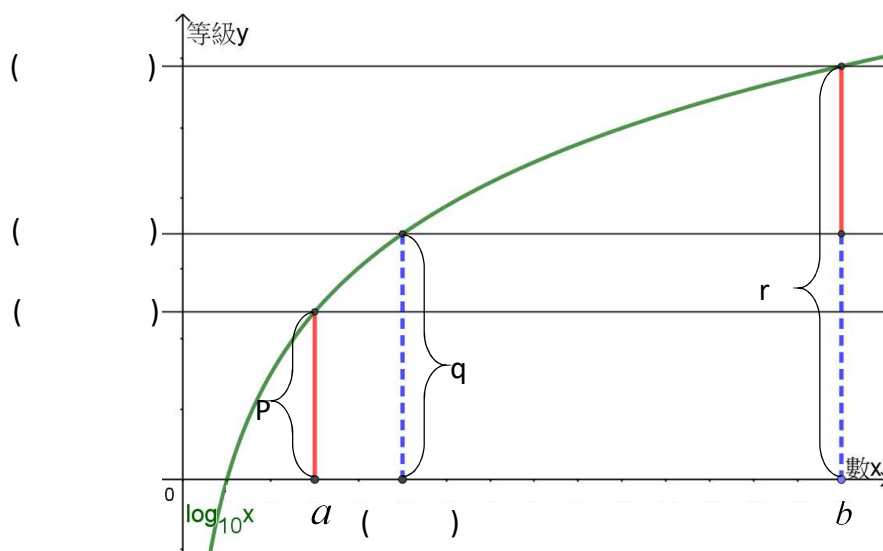
也就是說，在底為 3 時，24 的等級－8 的等級＝哪一個數的等級？

先想想，原來的數做什麼樣的運算時，等級會相減？

$24 = 3^{\boxed{}}$ $8 = 3^{\boxed{}} \Rightarrow$	仿左，試論： $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$
---	---

結論：兩個數相除→等級相減 $\log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$

46. 若 $p+q=r$ ，請用 a, b 表示括弧中的數。



B. 等級的乘法

47. (1) $3\log_5 8 = ?$

想想看 → 那一個數的等級是 $3\log_5 8 = ?$?

我們知道，8 以 5 為底的等級為 $\log_5 8 = ?$ ，

$$\Rightarrow 8 = 5^{\log_5 8}$$

$5^{\log_5 8}$ → 等級變 3 倍...

$$\Rightarrow 5^{3\log_5 8} = 5^{\log_5 8} \cdot 5^{\log_5 8} \cdot 5^{\log_5 8} = 8 \times 8 \times 8 = 8^3$$

48. (2) $\frac{1}{2}\log_5 8 = ?$

想想看 → 那一個數的等級是 $\frac{1}{2}\log_5 8$?

$$\Rightarrow 8 = 5^{\log_5 8}$$

$$\Rightarrow 5^{\frac{1}{2}\log_5 8} = \left(5^{\log_5 8}\right)^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{1}{2}}$$

$5^{\log_5 8}$ → 等級變一半...

承上試論： $\log_a r^t = t \log_a r$

結論：以 a 為底， r 這個數的等級 t 倍代表將原來的數 t 次方。

$$\Rightarrow \log_a r^t = t \log_a r$$

49. 請試著解釋為什麼 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

50. 請問下列哪一個選項等於 $\log(2^{(3^5)})$?

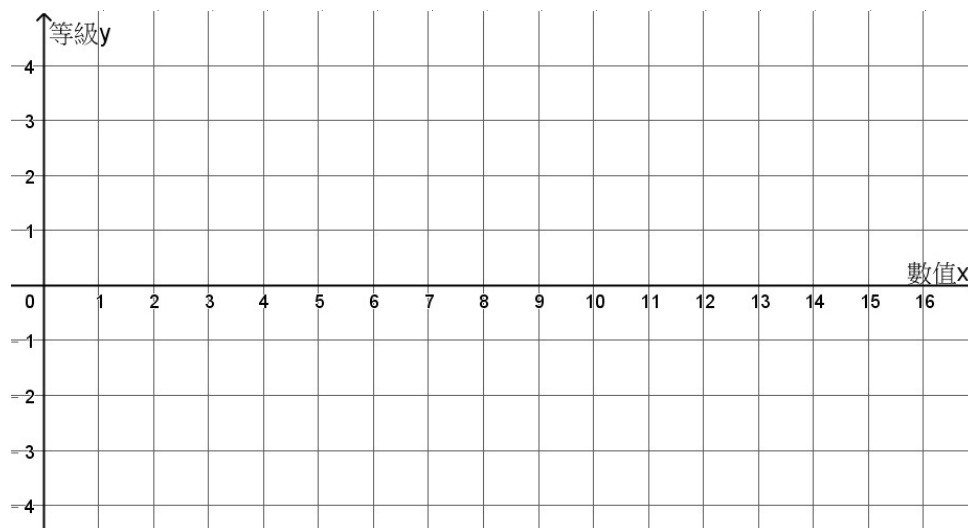
(1) $5\log(2^3)$ (2) $3 \times 5\log 2$ (3) $5\log 2 \times \log 3$ (4) $5(\log 2 + \log 3)$ (5) $3^5 \log 2$ 。

【103 學科能力測驗】

C. 換底公式

有時當我們想要對不同底的數做運算時，換成別的底會比較好算。因此，我們會有隨時可以轉換基底的需求。到底基底是如何進行轉換的呢？其實很簡單哦！

請在下方坐標中畫出 $\log_2 x$ 、 $\log_4 x$ 與 $\log_8 x$ 三個函數的圖，並回答下列提問。



(1) 看樣子不同底的晉級能力不同。哪一個函數的晉級能力最好？__

(2) $\log_4 4 = 1$ ，那麼 $\log_2 4 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

也就是說，如果底為 4 時可以晉 1 級，那底為 2 時可以晉 2 級。

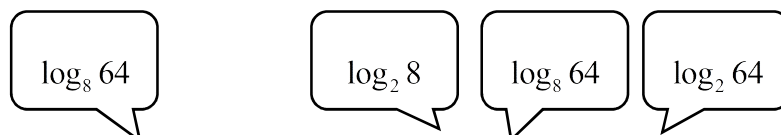
所以底為 2 時晉級能力是底為 4 時的 倍。

(3) $\log_8 8 = 1$ ，那麼 $\log_2 8 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

也就是說，如果底為 8 時可以晉 1 級，那底為 2 時可以晉 3 級。

所以底為 2 時晉級能力是底為 8 時的 倍。

(4) 針對 64 這個數在不同底的等級，如果能把底由 8 改為 2.....



$$64 = 8^2 = (2^{\boxed{3}})^2 = 2^{\boxed{3} \times 2} = 2^{\boxed{6}}$$

所以 $(\log_2 8)(\log_8 64) = \log_2 64$

將底由 8 改為 2 的倍

(5) 針對 729 這個數在不同底的等級，如果要把底由 9 改為 3.....

$$729 = 9^{\boxed{}} = (3^{\boxed{}})^{\boxed{}} = 3^{\boxed{}} \times \boxed{} = 3^{\boxed{}}$$

$\log$
 $\log$
 $\log$
 $\log$

所以

$$\boxed{}(\boxed{}) =$$

將底由 9 改為 3 所需的倍率

(6) 針對 540 這個數在不同底的等級，如果要把底由 7 改為 2.....

$$540 = 7^{\boxed{}} = (2^{\boxed{}})^{\boxed{}} = 2^{\boxed{}} \times \boxed{} = 2^{\boxed{}}$$

$\log$
 $\log$
 $\log$
 $\log$

所以

$$\boxed{}(\boxed{}) =$$

將底由 7 改為 2 所需的倍率

(7) 針對 c 這個數在不同底的等級，如果要把底由 b 改為 a.....

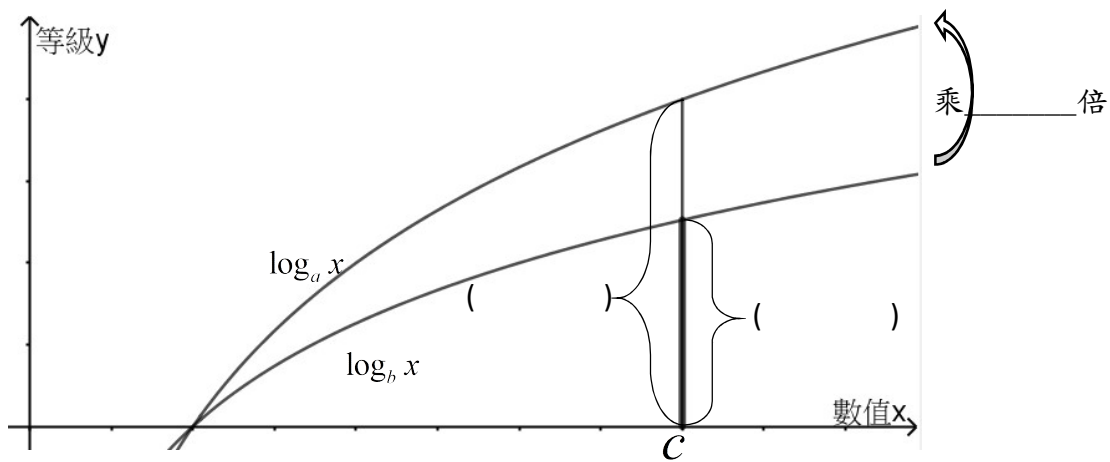
$$c = b^{\boxed{}} = (a^{\boxed{}})^{\boxed{}} = a^{\boxed{}} \times \boxed{} = a^{\boxed{}}$$

$\log$
 $\log$
 $\log$
 $\log$
 $\times$
 $\log$
 $\log$

所以

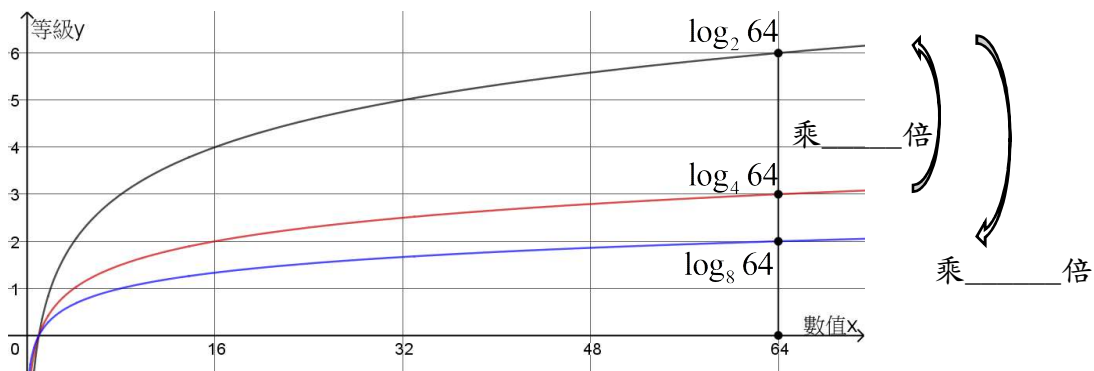
$$\boxed{}(\boxed{}) = (\boxed{})$$

將底由 b 改為 a 所需的倍率



★在兩個不同的底 a 、 b 中，不論 c 為何，都有著相同的等級換算倍率。

(8) 想想看，怎麼換的？



小結： $\Rightarrow (\log_a b)(\log_b c) = \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

51. x 在以 a 為底時的等級為 _____

x 在以 b 為底時的等級為 _____

x 在以 c 為底時的等級為 _____

所以， $x = a^{\boxed{}} = b^{\boxed{}} = c^{\boxed{}}$

52. 拿出你的計算機算出等級： $1000 = 2^{\boxed{}} = 3^{\boxed{}} = 5^{\boxed{}} = 10^{\boxed{}}$

例：利用換底公式 $\log_2 1000 = \frac{\log \boxed{}}{\log \boxed{}}$

十. 反函數

函數是什麼呢？

函數是一個可以用來研究變化的關係。

例如：

我們用函數 $f(x) = 4x - 37$ 來描述某飲料店氣溫 x 度時，冰茶的銷售量為 $f(x)$ ，那麼我們是想從「氣溫的變化」來看「冰茶銷售量的變化」。

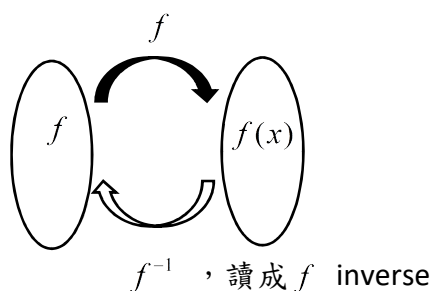


反函數：
主動與被動對調



反過來，我們也可以用「冰茶銷售量的變化」來看「氣溫的變化」。這個時候我們可以用函數 $f^{-1}(x) = \frac{x+37}{4}$ ，反向由「冰茶銷售量的變化」來求得「氣溫的變化」。

這樣主動與被動互換的函數，我們稱之為「反函數」

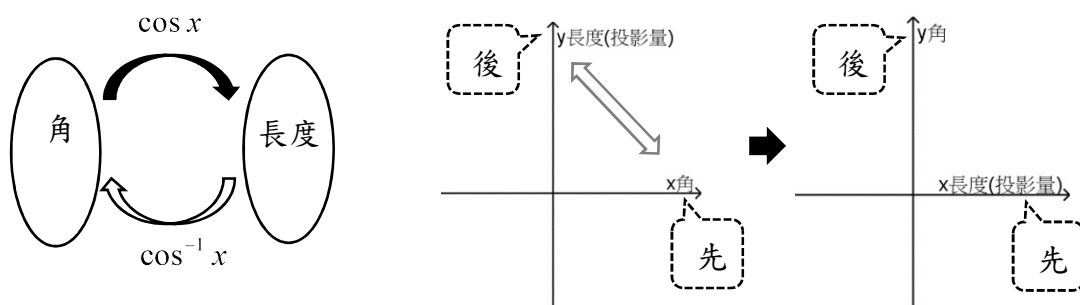


想法：

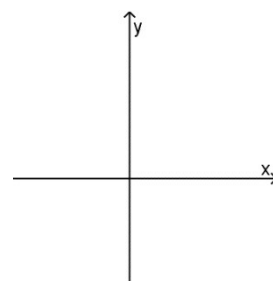
函數是想用 x 的變化來看 y 的變化，認知上是 x 先發生， y 才對應出現。

因此，我們稱 x 為自變數，而 y 為應變數。在數學上，我們習慣以 $x \rightarrow y$ 來定義順序，而在坐標軸上 x 與 y 也維持同樣的順序默契。也就是說，我們總是用 x 軸來代表自變數， y 軸來代表應變數。(先看 x 才看 y)

反函數剛好相反，這樣 x 與 y 對調的思維，呈現在坐標軸上即為「兩軸互換」。



53. 顯然，函數與反函數的圖形就是直接將 x 軸與 y 軸對調。請在右圖畫出將兩圖形對調時的對稱軸，並寫出對稱軸方程式_____。



十一. 指數函數的圖形

$g(x) = a^x$ ，這是指數函數。我們給定等級 index，想要還原其實際的數值大小。

疑？也和等級有關？！感覺上它和對數函數很有關聯～

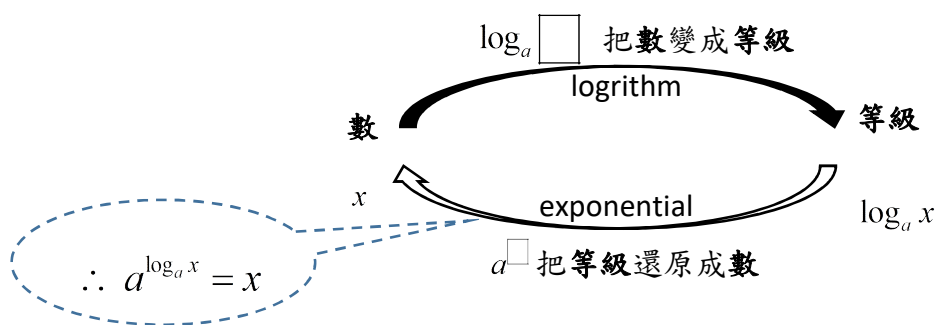
弄清楚，對數函數與指數函數的作用有何不同呢？(填入「數」或「等級」)

對數函數 $f(x) = \log_a x \rightarrow$ 把_____變_____；

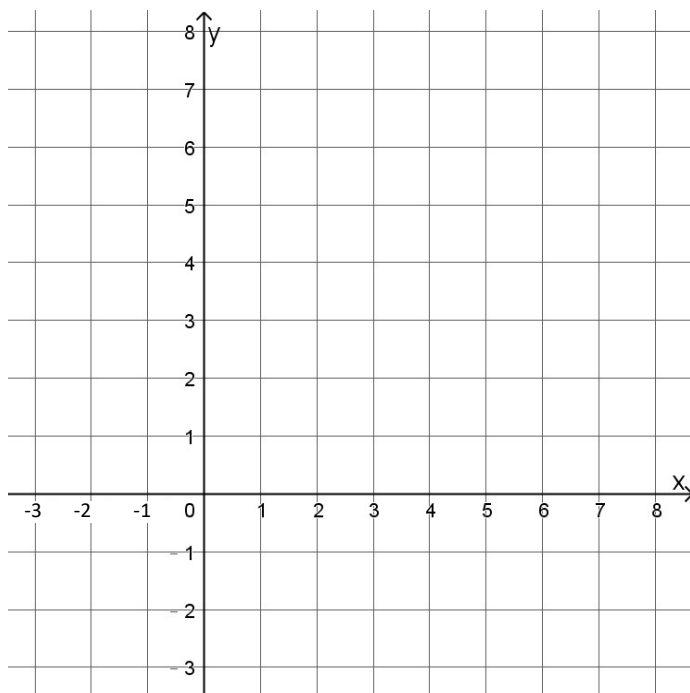
指數函數 $g(x) = a^x \rightarrow$ 把_____變_____

所以，有沒有發現其實對數函數與指數函數互為反函數！

圖解對數函數與指數函數之關係：

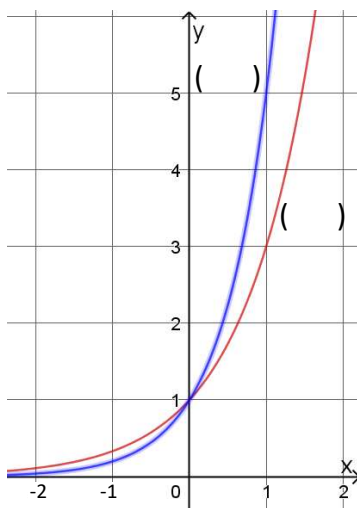


54. 利用函數與反函數圖形對稱的性質，先畫出對數函數 $\log_2 x$ 的圖形，再畫出指數函數 2^x 的圖形。

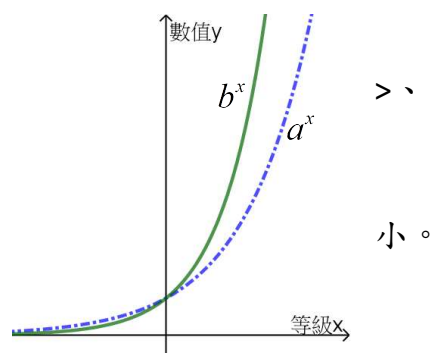


於是，我們可利用對於對數函數的理解，來理解指數函數。

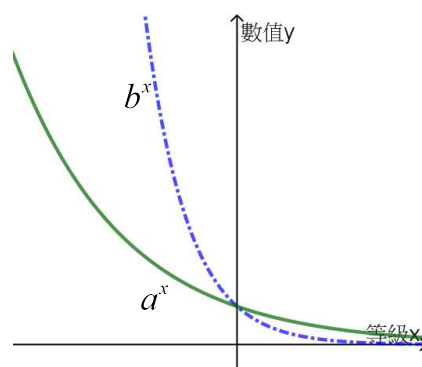
55. 右圖兩曲線均為
指數函數，分別判斷其
底數。



56. 右圖的指數函數圖形，底數_____1 (填
=、<)
試比較右圖兩個函數的底數 a、b 的大

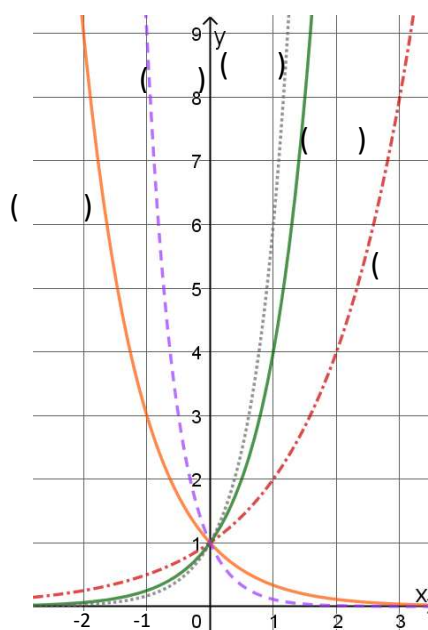


57. 右圖的指數函數圖形，底數_____1 (填
>、=、<)
試比較右圖兩個函數的底數 a、b 的大小。



58. 請在圖形旁寫出左方五個指數函數。

當底數小於 1 時，你是如何判別的？



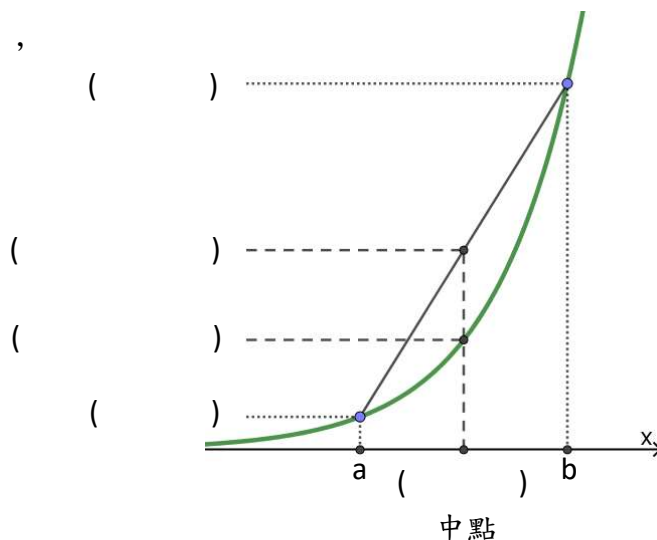
十二. 指對數圖形的凹向性觀察

最後，我們討論圖形的凹向性。由於對數與指數函數的圖形均為曲線，於是就有所謂凹向上與凹向下的區別。

59. 函數圖形上任兩點連線段都在函數圖形上方時，稱此函數圖形為凹向上。

通常最方便檢測的點是中點，

檢測方法如下：



即對任意實數 $a < b$ ，

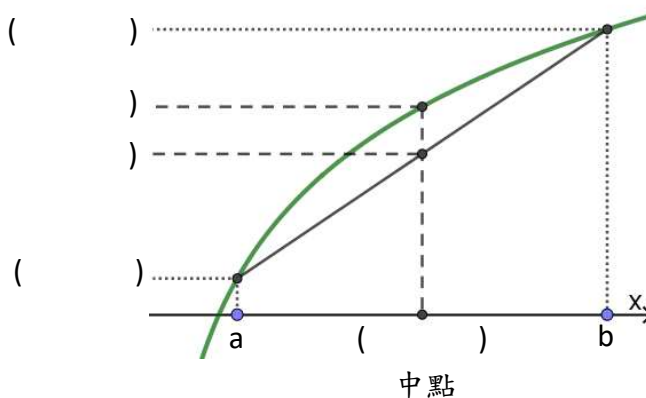
滿足 $\frac{f(a)+f(b)}{2} \underline{\hspace{1cm}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，(填 > 或 <) 我們就稱其為凹向上。

60. 函數圖形上任兩點連

線段都在函數圖形下

方時，稱此函數圖形

為凹向下。



即對任意實數 $a < b$ ，滿

足 $\frac{f(a)+f(b)}{2} \underline{\hspace{1cm}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ ，(填 > 或 <)，我們就稱其為凹向下。

61. 凹向上的圖形上任取兩點，其間的函數值比直線估計值：☐高 ☐低

62. 凹向下的圖形上任取兩點，其間的函數值比直線估計值：☐高 ☐低

63. 自己先畫畫看，並找出用來形容函數值「變化越來越和緩」的圖形：

☐凹向上又遞增 ☐凹向上又遞減 ☐凹向下又遞增 ☐凹向下又遞減

註：指對數推薦入班教學影片：

1. 數學新世界--CA--數字的等級表示法 入班教學 20190510（臺中市黎明國中）PART1

<https://www.youtube.com/watch?v=bQY3wsFg7qI&list=PL4d2Cjj-PombLvnvd0kEJXX1NyIVFtB4R&index=5&t=0s>

2. 數學新世界--CA--數字的等級表示法 入班教學 20190510（臺中市黎明國中）PART2

<https://www.youtube.com/watch?v=dZaXAwsAQwY&list=PL4d2Cjj-PombLvnvd0kEJXX1NyIVFtB4R&index=2&t=334s>

3. 數學新世界--CA-反函數 入班教學 20190517（臺中市黎明國中）PART1

<https://www.youtube.com/watch?v=RrR0uNnrfiE&list=PL4d2Cjj-PombLvnvd0kEJXX1NyIVFtB4R&index=3&t=0s>

4. 數學新世界--CA-反函數 入班教學 20190517（臺中市黎明國中）PART2

<https://www.youtube.com/watch?v=CDGE31bAQBc&list=PL4d2Cjj-PombLvnvd0kEJXX1NyIVFtB4R&index=4&t=0s>

5. 數學新世界--CA--幾何圖形 對數的首數和尾數 教師共備 20190719（新北市蘆洲國中）PART3

<https://www.youtube.com/watch?v=2FtVqBzE6Sc&list=PL4d2Cjj-PombLvnvd0kEJXX1NyIVFtB4R&index=6&t=1020s>

數學新世界-各階段教材樣本

總編輯／施皓耀

作者／白晨如、陳梅仙、蔡晴穎

出版者／國立彰化師範大學數學系

彰化縣彰化市進德路 1 號

電話：(04)7232105 ext. 3288

印刷者／洪記印刷有限公司

地址：臺中市西區明智街 25 號

電話：(04)2314-0788

傳真：(04)2313-9222

出版日期／108 年 8 月 12 日

印刷經費／教育部國民及學前教育署

科技部

敬請尊重智慧財產權，未經作者同意，請勿翻印、轉載或部分節錄。
(版權所有翻印必究)