根號數和根式運算 想法源頭：CA 設計者：陳梅仙

1.關於數字

(1)你學過那些**種類**的數字？請寫出來！

(2)那些數字可以把”1,2,3,4,…”這些數字**抵銷**呢？

2.一張紙的有多長？請拿出一張紙試摺看看，要**精準**喔

3.我們知道，那可以寫成什麼呢？

(1)把寫成0.33，顯然**不夠**，我們是怎麼**檢查**的呢？

(2)把寫成0.34，顯然**太多**了，我們是怎麼**檢查**的呢？

(3)請發揮你的**創意**，我們應該怎麼表現最好呢？

(4)李安執導的”少年π的奇幻漂流”，π這個數字代表什麼呢？數字有多大呢？

**小結論**：1.當我們想知道一個**不知道**的**數字有多大**，我們會先\_\_\_\_\_\_\_，然後再\_\_\_\_\_\_\_\_是否正確。

2.當我們想表現一個**寫不完**的**數字**，最簡單的**手段**就是給個\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_來**代表**這個數字。

4.下面是一些經過**相同**倍率**兩次**縮放的數字，請你在空格中**猜出**適當數字來完成運算

註：每小題中的3個空格的數字都一樣喔，(3)猜兩數乘積**比較接近**結果的數就好！

|  |  |
| --- | --- |
| (1)142**×**2**×**2**–2****×****–2****×****–2** | (2)19**×****×****×****×** |
| (3)12**×****×****×****×** | (4)1x**×****×****×****×** |

其中(3) □ × □ ＝ 2 當□＝1.4，則1.4 × 1.4 ＝1.96 ＜ 2 當□＝1.5，則1.5 × 1.5 ＝2.25 ＞ 2

此時如何精準的表達□？ 數學家決定仿照當初創造分數與π的概念，創造出了一個符號

因此

$$×$$

$=$ 7

$$×$$

$=$ 3

小**結論**：**根號數相乘去根號！**$\sqrt{5}$有多大，我們**不知道**，但是…我們**知道**將$\sqrt{5}$**平方**就會是5，

12

12

也就是$\sqrt{5}×\sqrt{5}=5$，$(\sqrt{5})^{2}=5$

12

12

5.下面的圖形表現出數字**平方**與**開根號**的紀錄，請利用下面的圖形回答下面的問題



**□2**

$$\sqrt{}$$

**平方**

**開根號**

6.

(1)$\sqrt{2} □ \sqrt{3}$

(4)$\sqrt{0.5} □ 0.5$

(2)$\sqrt{0.4} □ \sqrt{0.6}$

(5)$\sqrt{7} □ 7$

(3)$\sqrt{\frac{1}{2}} □ \sqrt{\frac{1}{3}}$

(6)$5\sqrt{2 } □ 4\sqrt{3}$

**小結論**：1. a>b>0⬄$\sqrt{a}>\sqrt{b}$

2.當數字**小於**1，數字開根號後的數字會 □變大 □變小 □不變

3.當數字**大於**1，數字開根號後的數字會 □變大 □變小 □不變

7. 什麼是**平方根**呢？

我們想**猜出**空格中的數字應該多少時**平方**才會等於2，也就是 □2= 2

 我們也可把**平方根**想成是拿掉平方後才能得到□的答案(**根**)。

這時候我們稱 □是 2 的 平方 根 (二次方根)

那 □2 = 7

這時候我們稱 □是 的 根

那 □5= 11

這時候我們稱 □是 的 根

 **平方根的意義 (當□2＝a,其中的□指拿掉平方後得到的解(根)。)** 1. *a*＞0，*a*的平方根為±，滿足(±)2＝*a*，
 其中、－分別是*a*的正平方根和負平方根。
 2. 02＝0，所以0是0的平方根，即＝0。

練習1.寫出下列各數的平方根。
(1) 23　　　　　(2) 100

(3) 　　　　　(4) 0.04

練習2. －5是2*x*－1的平方根，求*x*的值，並檢驗是否正確。

練習3 56的負平方根的值介於哪兩個連續整數之間？

8.下面的根號數做**改寫**，請完成填空後寫出答案。(這邊只探討正數，因此空格請填正數)

|  |  |
| --- | --- |
| (1) $\sqrt{4}$會是多少呢？ $$\sqrt{4}$$$$\sqrt{4}$$$$×$$$$=$$$$×$$$$=$$$$4$$⇨$\sqrt{4}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | (2) $\sqrt{49}$會是多少呢？ $$\sqrt{49}$$$$\sqrt{49}$$$$×$$$$=$$$$×$$$$=$$$$49$$⇨$\sqrt{49}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| (3) $\sqrt{18}$會是多少呢？ $$\sqrt{18}$$$$\sqrt{18}$$$$×$$$$=$$$$×$$$$=$$$$18$$⇨$\sqrt{18}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | (4) $\sqrt{60}$會是多少呢？ $$\sqrt{60}$$$$\sqrt{60}$$$$×$$$$=$$$$×$$$$=$$$$60$$⇨$\sqrt{60}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |
| (5) $\sqrt{144}$會是多少呢？ $$\sqrt{144}$$$$\sqrt{144}$$$$×$$$$=$$$$×$$$$=$$$$144$$⇨$\sqrt{144}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | (6) $\sqrt{6}$會是多少呢？ $$\sqrt{6}$$$$\sqrt{6}$$$$×$$$$=$$$$×$$$$=$$$$6$$⇨$\sqrt{6}=$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

**小結論**：$\sqrt{a}×\sqrt{a}=a$ ⇨ $a\sqrt{b}=\sqrt{a^{2}b}$，$\sqrt{a^{2}b}=a\sqrt{b}$ 練習：$\sqrt{1\frac{4.8}{12.1}}=$

練習：若$\sqrt{a}=7$,求a＝?

9. (1)$\sqrt{2}×\sqrt{3}$的結果你會寫成什麼？ (2)$\sqrt{2}÷\sqrt{3}$的結果你會寫成什麼？

10.動動腦

1.＋＝是否成立？
＋＝2＋3＝5，＝，5≠，所以不成立

2. ＝2是否成立？
＝＝＝，2＝，≠，所以不成立

11. 請問$5\sqrt{2}$和$4\sqrt{3}$哪一個比較大？你會怎麼比大小呢？

12. 請問$\sqrt{6}+\sqrt{8}$和$\sqrt{5}+\sqrt{9}$哪一個比較大？你會怎麼比大小呢？

13.請**合併(簡化)**計算出下列各式的結果，說說看，那些題會有**困擾**？為什麼？

(1)$3+\sqrt{16}$

(2)$\sqrt{2}+\sqrt{2}$

(3)$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(4)$\sqrt{2} + \sqrt{18}$

(5)$\sqrt{3} + \sqrt{300}$

(6)$\sqrt{27}+\sqrt{32}-\sqrt{18} +2\sqrt{3}$

14.根號數的**近似值**：請說明$\sqrt{19}$有多大？

(1)請試著使用**估算**的方法估計$\sqrt{19}$有多大，

估計到小數第1位。

 (2)使用**計算機**

(3)**查表法**：利用**乘方開方表**，回答下面問題

請查出$\sqrt{19}$的數值 請查出$\sqrt{190}$的數值

請查出$\sqrt{441}$的數值

15.根號數**綜合練習**

|  |
| --- |
| (1)$\sqrt{1\frac{4.8}{12.1}}=$ (2)$\sqrt{12}$= (3) × |
| (4) ÷ = (5)$\sqrt{2^{6}×3^{5}×5^{2}}$= (6) $\sqrt{2^{2017}}$ |
| (7)$ 3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+5\sqrt{2}+2\sqrt{3}=$ | (8)$\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{72}+\sqrt{50}=$ |
| (9) － | (10)$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{2}=$ | (11)$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=$ |

 (12) (－4)×(－)－4 (13) (－3＋)÷

 (14) (－2)(＋2) (15) (16) －

 ＋1

(9)利用所附的**乘方開方表**，求出下列各數的**近似值**。

　 (2)
解：(1) ＝＝≒≒1.154700≒1.1547
　　(2) ＝＝≒＝2.28035≒2.2804

加強演練

1.若 為正整數，則正整數*a*有多少個？ 11

2.若*n*為正整數，且13≤≤23，則符合條件的*n*有個。

3. 若50＜*a*≤200，且 不為整數，則正整數*a*共有多少個？
解：當 為整數時，*a*＝82、92、102、112、122、132、142共7個
　　得所求＝(200－50)－7＝143(個)

4.(1) 請將1936寫成標準分解式。

(2) 承(1)題的結果，求1936的平方根為何？



(3)求$\sqrt{1936}$的平方根

解： (1) 1936＝24×112
(2) 1936的平方根＝± ＝±44
(3) $√1936$的平方根＝±$√$44＝±$2√11$

5.若 ＋＝0，則：
(1) *a*與*b*的值分別為多少？
(2) 的平方根為多少？

(1) ⇒
(1) *b*＝－1(1⇒ *a*＝3(2) 因為9*a*＋2*b*＝252) ⇒ ＝＝5 ， 的平方根＝±

6. (1)若*x*＋*y*的正平方根是4，*x*－*y*的負平方根

是－2，則 ＝？

(2)若－是5的一個平方根，則 的平方根為。

解：∵*x*＋*y*＝16，*x*－*y*＝4
　　∴＝＝＝8

7. 試比較 、、、四數的大小關係。：因為( )2＝，()2＝，( )2＝，( )2＝　　又＞＞＞，所以＞＞＞

8. 若*a*＋*b*＜0，*ab*＞0，則＝？ －3*a*2*b*3

9. 已知*x*＞4，化簡－＝　－*x*－5

10. 的近似值是13.41，若的近似值是0.1341，則*x*的值？ 0.018

11.已知 、、、皆為正整數，且22＜＜23，則滿足此條件的最小正整數*a*、*b*、*c*、*d*分別是多少？

解：222＝484，232＝529。 *a*的最小值＝529－504＝25。*b*的最小值＝504－484＝20

因為504＝23×32×7 所以c的最小值＝2×7＝14
所以d的最小值＝2×7＝14

12.設*m*為正整數，且*m*＜200，則使為正整數的*m*可為　13、52、117　(請全部列出)。

令*m*＝13×12＝13＜200(合)

*m*＝13×22＝52＜200(合)

*m*＝13×32＝117＜200(合)

*m*＝13×42＝208＞200(不合)

故*m*可為13、52、117

13. 求223 的平方根＝

所求＝±

＝±

＝±

＝±

＝±｜15－｜＝±14

14. =

所求＝
 ＝
 ＝
 ＝

 ＝17＋＝17

15. =

所求＝
 ＝ ＝
 ＝

 ＝18－＝17

16. 已知≒12.369，≒12.649，則：

(1)的整數部分＝　12　；
小數部分＝　－12　。

(2)與的小數部分相差
　－　。

(1) 由≒12.369可知其整數部分＝12
小數部分＝原值－整數部分＝－12

(2) 部分＝－12 部分＝－12故其小數部分相差 ｜(－12)－(－12)｜＝｜－12－＋12｜＝｜－｜＝－

17. 已知*x*為正整數，40≤*x*≤80，且為正整數，則*x*＝　42、58、67　(請全部列出)。

(1)由40≤*x*≤80

⇒ 120≤3*x*≤240

⇒ 115≤3*x*－5≤235

(2)由於為正整數，可知3*x*－5為完全平方數
又因115≤3*x*－5≤235
故可令3*x*－5分別為121、144、169、196、225
可解得*x*分別為42、(不合)、58、67、(不合)

18. 滿足不等式2≤≤3的正整數*n*共有個。

由2≤≤3 ⇒ 4≤12－≤9

⇒ －8≤－≤－3 ⇒ 8≥≥3

⇒ 64≥*n*≥9

故滿足此不等式的*n*共有64－9＋1＝56個

19. 解＝2，*x*＝。

原式＝＝2×＝ ⇒ 3－1＝

⇒ 3＝ ⇒ ＝ ⇒ 12＋*x*＝13

⇒ *x*＝1

20. 若一個正立方體的表面積為*a*，則以*a*的式子表示此正立方體的體積＝　　(可不用將根式有理化)。

(1) 一個正立方體有六個全等的面
每個面的面積＝
且其邊長為其面積的正平方根
故該正立方體的邊長＝

(2) 所求該正立方體的體積
＝()3＝()2×＝

21. 若(*ax*－*b*)2的正平方根為*c*(其中*a*≠0)，則*x*

＝　或　(以*a*、*b*、*c*的式子來表示)。

由題意可知*ax*－*b*＝±*c*

由*ax*－*b*＝*c* 由*ax*－*b*＝－*c*

⇒ *ax*＝*c*＋*b* ⇒ *ax*＝－*c*＋*b*

⇒ *x*＝ ⇒ *x*＝

由上可知*x*＝ 或

22.$\frac{\sqrt{12}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=$

$$\sqrt{5}$$

23.若$ \frac{a}{b}=\sqrt{2}+1且ab\ne 0，則\frac{a^{2}+b^{2}}{4ab}=$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

24. (1) 計算(1＋－)(1－＋)＝？

 (2) 計算(3＋)4(3－)3＝？

 (3)計算 ＝?

(1) －7＋2

(2)

(3) 。

25. (1) 化簡 ＋＝？9

 (2)下列等式何者不正確？

(A) ＝－2

(B) ＝π－3.14

(C) ＝7－4

(D) ＝3－13

26.(1)若*x*是正整數，且*x*＜3＜*x*＋1，則*x*＝？

(2) 若3 的小數部分為*y*，則＝？

解：(1) 因為3＝ ⇒ 6＜3＜7
 所以*x*＝6
(2) 因為3＝6.… ⇒ *y*＝3－6
 所以＝
 所以＝
 所以＝＝
 所以＝

27. 若＝*a*＋*b*，且*a*為整數部分，*b*為純小數部分，則2*b*2＋8*b*－1的值為何？

 解：＜方法一＞
　　∵＝2.236…，∴*a*＝2 則*b*＝－2
　　將*b*＝－2代入2*b*2＋8*b*－1
　　可得2(－2)2＋8(－2)－1
　　　　＝2(9－4)＋8－16－1
　　　　＝18－8＋8－16－1＝1
　　＜方法二＞
　　又(*b*＋2)2＝()2
　　*b*2＋4*b*＋4＝5
　　*b*2＋4*b*＝1
　　故2*b*2＋8*b*－1＝2(*b*2＋4*b*)－1

 ＝2×1－1＝1

28.若*a*、*b*、*c*為三個負分數，且*a*×＝*b*×＝*c*×，則*a*、*b*、*c*三數的大小關係為何？

解： 令*a*×＝*b*×＝*c*×＝－1
⇒
所以*c*＞*b*＞*a*

29. 若*a*＝－，*b*＝－，*c*＝－，則*a*、*b*、*c*的大小關係為何？

解：因為
⇒ *a*2＞*b*2＞*c*2
又*a*、*b*、*c*都是負數
所以*a*＜*b*＜*c*

30. 若*x*＝、*y*＝，則*x*2＋*y*2＝？

解：因為*x*＋*y*＝
因*y*＝*y*＝6
又*xy*＝×＝
所以*x*2＋*y*2＝(*x*＋*y*)2－2*xy*
＝(6)2－2×2＝72－＝64

31. 已知*a*＝4＋、*b*＝4－，計算下列各式，並將結果化為最簡根式，若為分式，則將根式有理化。
(1) *a*2＋*b*2＝？(2) ＝？

 解：(1)∵*a*＋*b*＝8，

 *a*×*b*＝(4＋)(4－)＝40
 *a*2＋*b*2＝(*a*＋*b*)2－2*ab*＝(8)2－2×40＝112
　　(2) ＝× ＝

32. 已知*a*＝，*b*＝－，求＋之值

＋＝

33. ，得*x*＝*a*，*y*＝*b*，則*a*、*b*的最大公因數是

*2*

34.化簡 ＋＋＋…＋＋＝。

原式＝＋＋＋…＋＋

＝－(－)＝－＋

35.計算＋＋…＋＝？

原式＝＋＋……＋
　　＝(－)＋(－)＋…
　　　＋(－)
　　＝－＋＝－＋5＝4

36.如圖所示，將正方形*ABCD*摺疊，使得*C*點

落在上的*E*點處，且：＝1：2，若

為摺痕，*M*點在上，*N*點在上，且正

方形*ABCD*的邊長為24，求的長。

答：$\frac{20}{3}$。

37.如右圖，長方形ABCD中，$\overbar{AB}$＝21，

$\overbar{BC}$＝24，$\overbar{DE}$：$\overbar{CE}$=2：1，$\overbar{AF}$⊥$\overbar{BE}$，則$\overbar{AF}$=?



$$\frac{504}{25}$$