

數學科教師共備手冊

高中課程

單元1

三角函數



數學新世界

2018年09月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第 1 次反思單撰寫 2.CA 教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第 2 次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1. 編修單元學習單 2. 再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

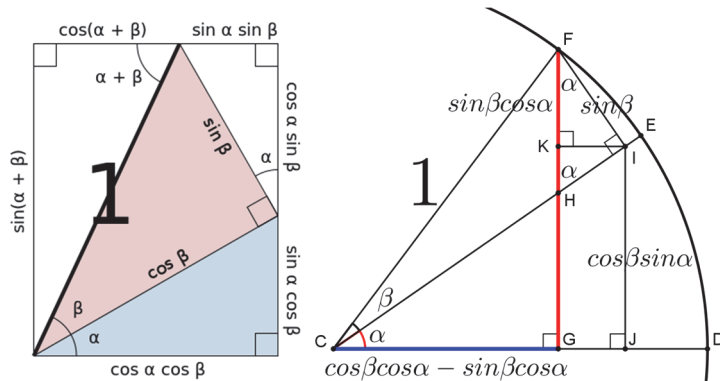
七、其他



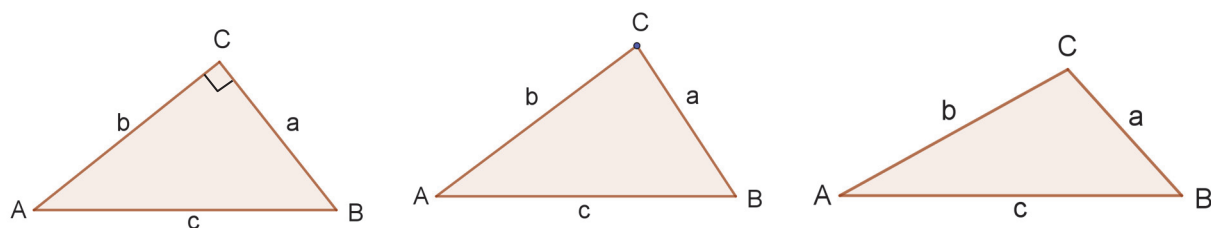
一、反思問題

1. 我們知道有三角學，以及，三角函數，這兩門數學主題有何異同之處？互相之間有包含關係嗎？他們主要處理的問題是什麼？每一個主題的核心知識又是什麼（用什麼手段來解決問題）？在高中階段，分別要介紹到哪裡才到位？
2. 三角函數，既然它標示著函數，那麼這些函數想要呈現的是什麼樣的變化關係呢？
3. 在三角函數中，有人使用度（360 度）也有人使用徑度（ π ）的方式來表示一個角的大小，請分別說明使用這兩種方式的時機以及適切性！
4. 三角函數的名詞跟圓息息相關，為什麼會考慮到圓這個議題？這些名詞又是如何命名的？
5. 三角函數所有書本的定義都是：對邊比斜邊，對邊比鄰邊，鄰邊比斜邊，鄰邊比對邊，斜邊比鄰邊，斜邊比對邊。這種用比值的方式來定義函數的概念跟函數的變化本質似乎格格不入，這樣定義的優缺點何在？要怎麼說明這些定義的本質最能展現三角函數的本意？

6. 三角函數都不是線性函數，因此有必要引入和差公式，通常有許多方式可以介紹這些公式的來龍去脈，下面兩種介紹方式非常直觀好理解，可是又有些微的差別，請分析這些差別所呈現出來的意義，就教學以及後來的發展哪一種表示方式比較有利，原因何在？



7. 接上題， $a\sin\theta + b\cos\theta$ 的公式可以怎麼看？
8. 三角函數，其函數值有正有負，到底正負根據什麼想法或需求決定的？
9. 既然談到三角函數，那麼難免會考慮到各個函數在不同角度的變化，高中階段，我們通常利用函數圖形來做說明，可是，就變化的精確描述，還是以微分最為精準，在學過和角公式以及一些極限的概念之後，我們習慣用代數合併極限來求得微分，就理解而言，畫圖是最好的方式，可不可能用畫圖的方式來求三角函數的微分？
10. 我們學過勾股弦定理（畢氏定理），一個 $\triangle ABC$ 其對應邊的長度分別為 a 、 b 、 c ，當 $\angle C$ 為 90° 、小於 90° 、大於 90° 時，我們分別有： $a^2 + b^2 = c^2$ 、 $a^2 + b^2 > c^2$ 、 $a^2 + b^2 < c^2$ 的性質，那麼，大多少？小多少呢？可不可以用這個角度來談餘弦定理呢？怎麼談呢？



二、核心概念

1. 三角學

2. 三角函數

3. 徑度 (π)

4. 單位圓對於三角函數的意義

5. 和角公式

6. 三角函數的正負數

7. 三角函數的合成

8. 三角函數的微分

9. 餘弦定理

三、概念發展脈絡

試根據概念發展的「認知」、「形成」、「使用」三個階段，說明下列名詞。

三角學	
-----	--

三角函數	
扇形	
徑度 (π)	
單位圓與 三角函數	
和角公式	
三角函數 的正負數	
三角函數 的合成	
三角函數 的微分	
餘弦定理	

四、觀摩、討論與修改

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics 即可透過關鍵字查詢下面影片。

1. 參考影片

- (1) [數學新世界 CA 概念詮釋 三角函數的定義 20180710](#)
- (2) [數學新世界--CA--三角函數暨其正負號 入班教學 20180622 \(臺中市黎明國中\) PART1](#)
- (3) [數學新世界--CA--三角函數暨其正負號 入班教學 20180622 \(臺中市黎明國中\) PART2](#)
- (4) [數學新世界--CA--三角函數 入班教學 九年級 20180604 \(彰化縣永靖國中\) PART1](#)
- (5) [數學新世界--CA--三角函數 入班教學 九年級 20180604 \(彰化縣永靖國中\) PART2](#)
- (6) [數學新世界--CA--三角函數 入班教學 20180307 \(屏東縣萬新國中\) PART1](#)
- (7) [數學新世界--CA--三角函數 入班教學 20180307 \(屏東縣萬新國中\) PART2](#)
- (8) [數學新世界--CA--三角函數 入班教學 20180307 \(屏東縣萬新國中\) PART3](#)

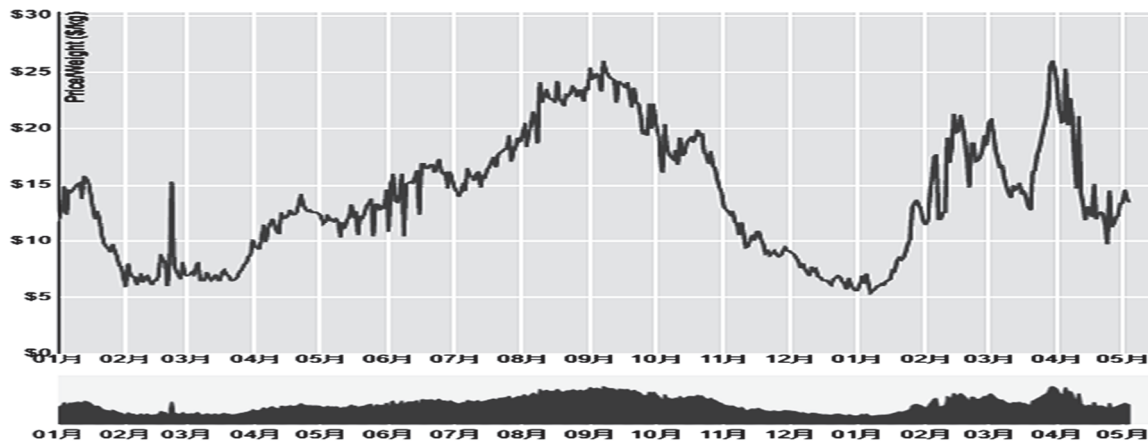
2. 針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3. 找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

五、概念發展學習單

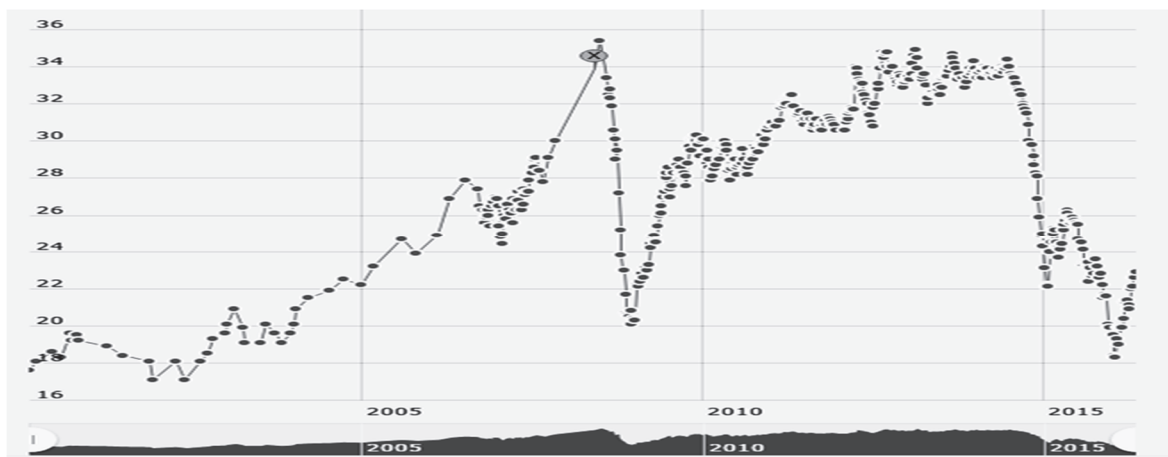
20161225 三角函數 設計源頭：CA 編者：陳梅仙

1.下面是蘿蔔 20150101~20160517 每日每公斤的平均價格所畫出來的圖形，你看到什麼？

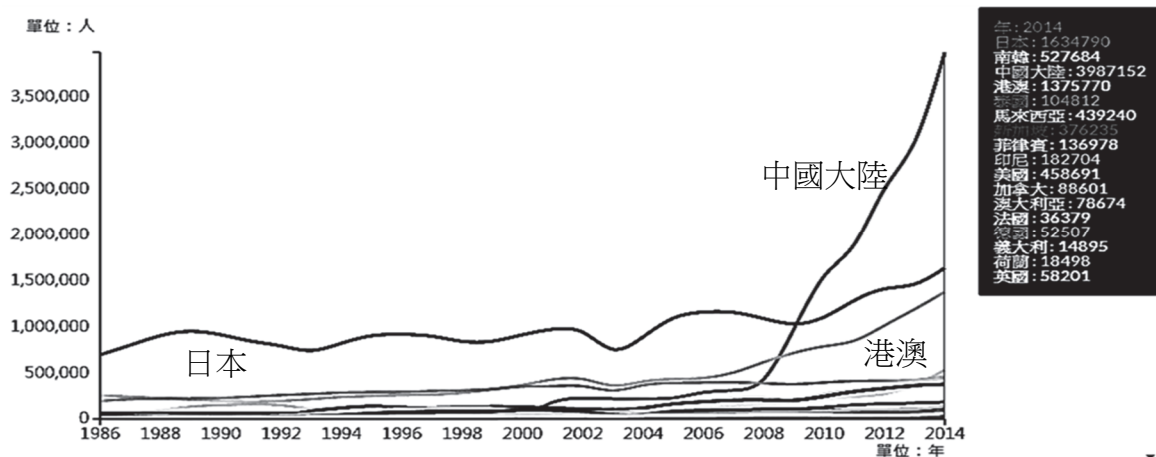


資料來源：[用數據看台灣](#)

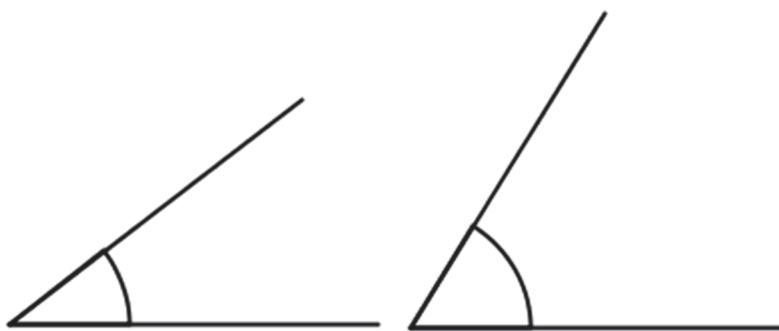
2.下面是 92 無鉛汽油 20000216~20160517 每日每公升的平均價格所畫出來的圖形，你看到什麼？



3.下面是來台旅客人數(依主要國家)畫出來的圖形，你看到什麼？



- 3.想一想，你可以找到幾種不同的紀錄方式來記錄下面的角度有多大？
也就是說，當角度在改變的時候，什麼也跟著改變了呢？



- 4.拉壞的時候是拉什麼來拉出陶器(圓)的大小的呢？

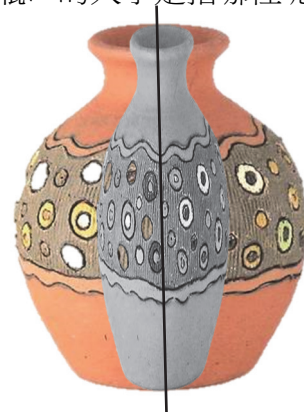
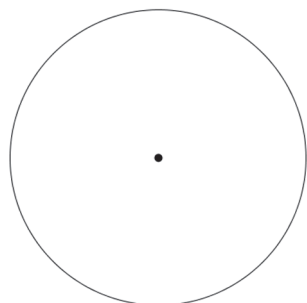


- 5.下面是大水缸的製造過程，這種方法稱為土條盤築法，首先做好器物底部，再將事前練好的土條從底部沿著層次一層一層逐步盤繞上去，直到想要到達的高度為止，再以拍陶用具拍打出型體直到完成。你知道那一層一層的土條要做多長才會剛剛好呢？



鶯歌高職李進福老師(20150317 去世)

- 6.如果想做瓶口這麼大的大水缸，土條應該準備多長才會剛剛好呢？瓶口的大小是指哪裡呢？



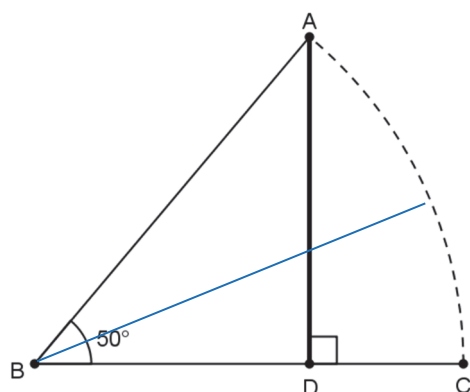
7.量弧長：度度量 and 徑度量(半徑是 1 的弧長，圓周長=直徑×圓周率= $1 \times 2 \times \pi = 2\pi$)， $\pi = 3.1415926...$

徑度量	0												π
度度量	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180

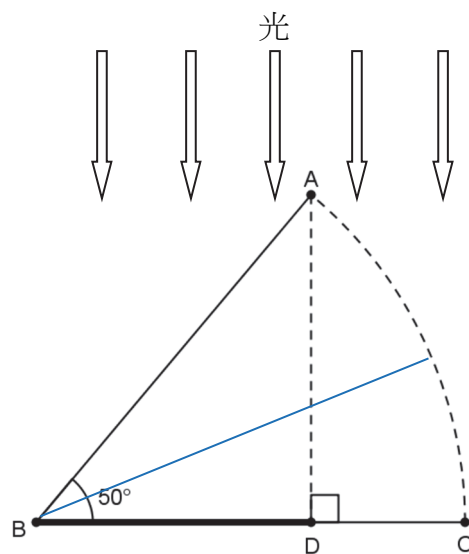
8.請問徑度 1 和 60 度的弧長，誰比較長？

9.分別利用“高”和“投影長”來表示一個角的大小。

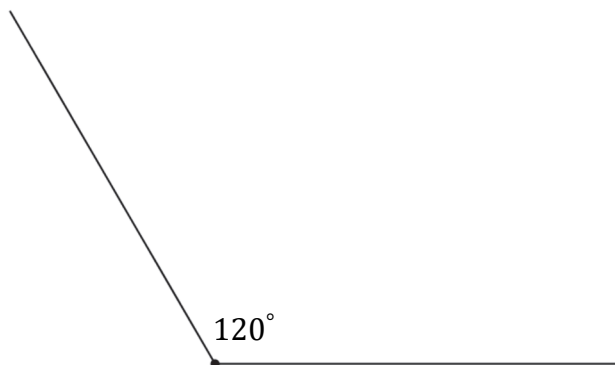
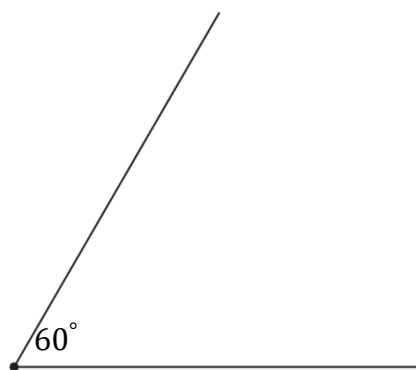
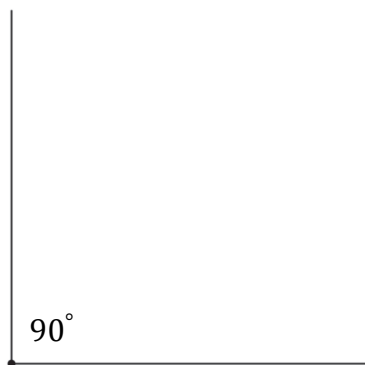
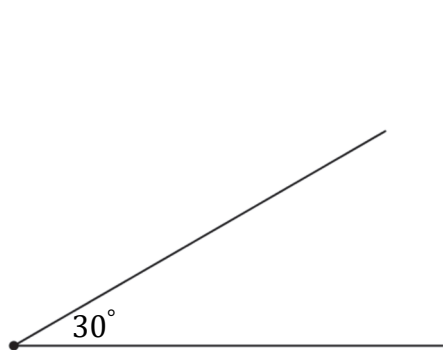
(1)利用“高”來表示一個角的大小



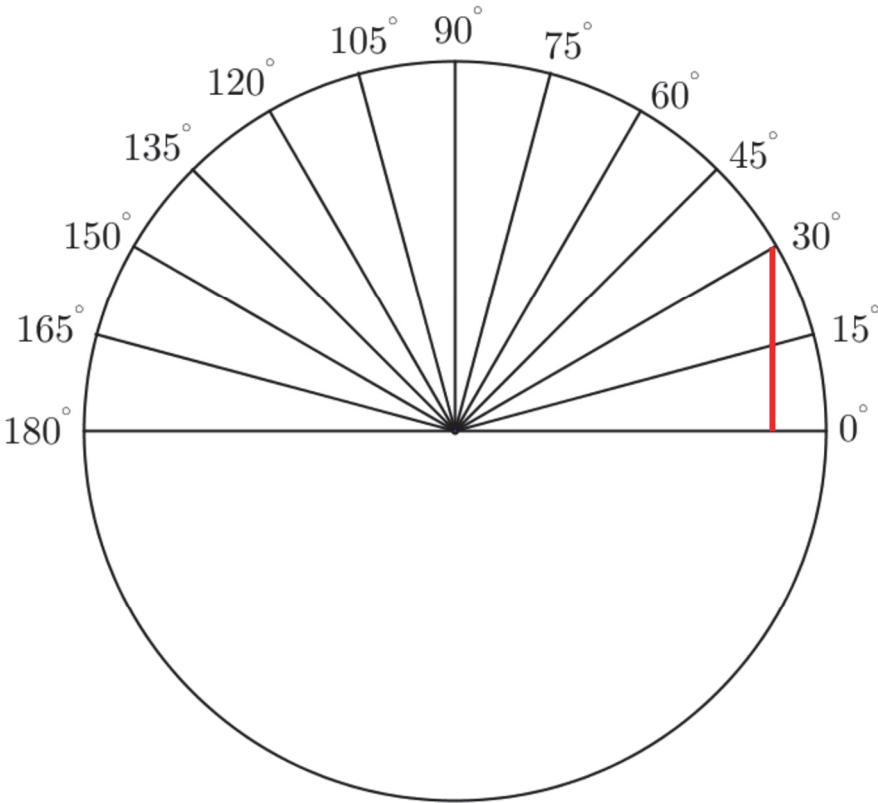
(2)利用“投影長”來表示一個角的大小



(3)請畫出下列角的“高”和“投影”。

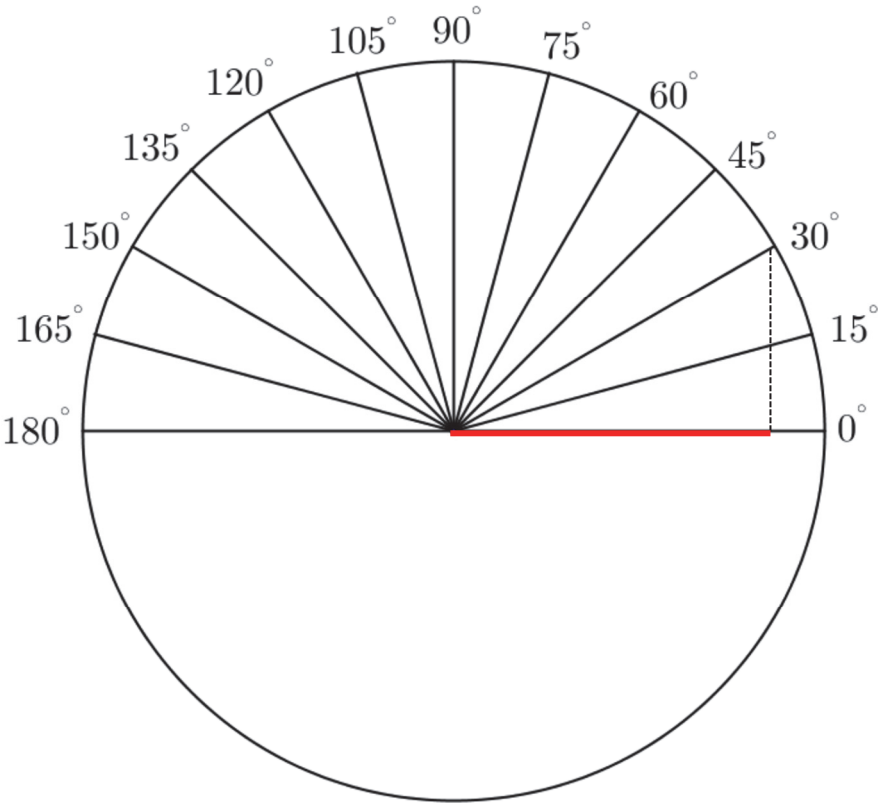


10.請複製出角的“高”，並將“高”的長度畫在下方對應表格中。



度度量	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°	
徑度量	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π	

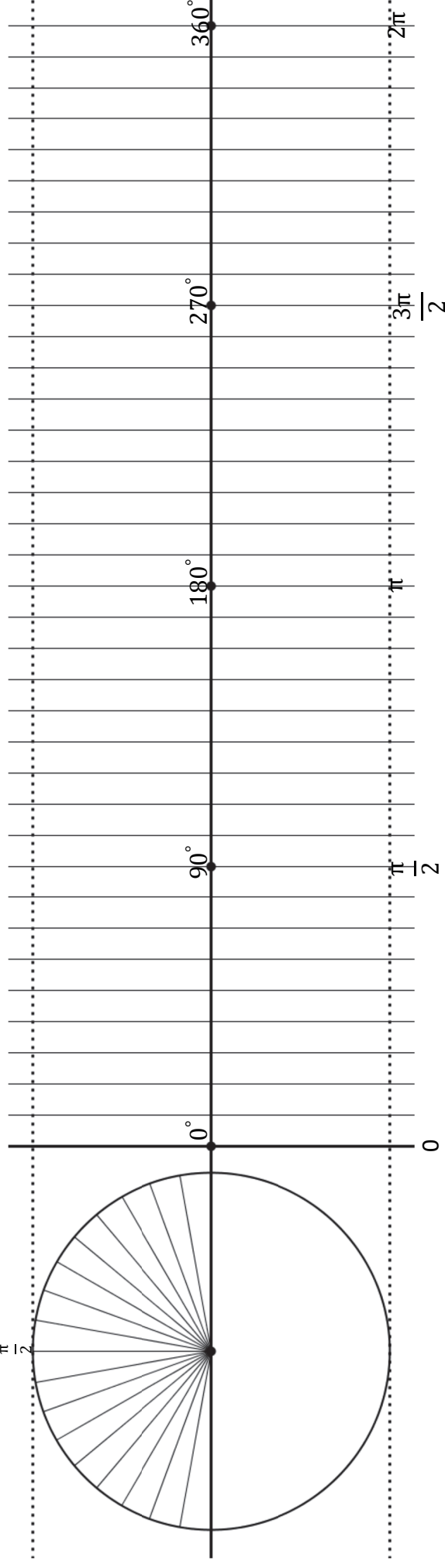
11.請複製出角的“投影長”，並將“投影長”的長度畫在下方對應表格中。



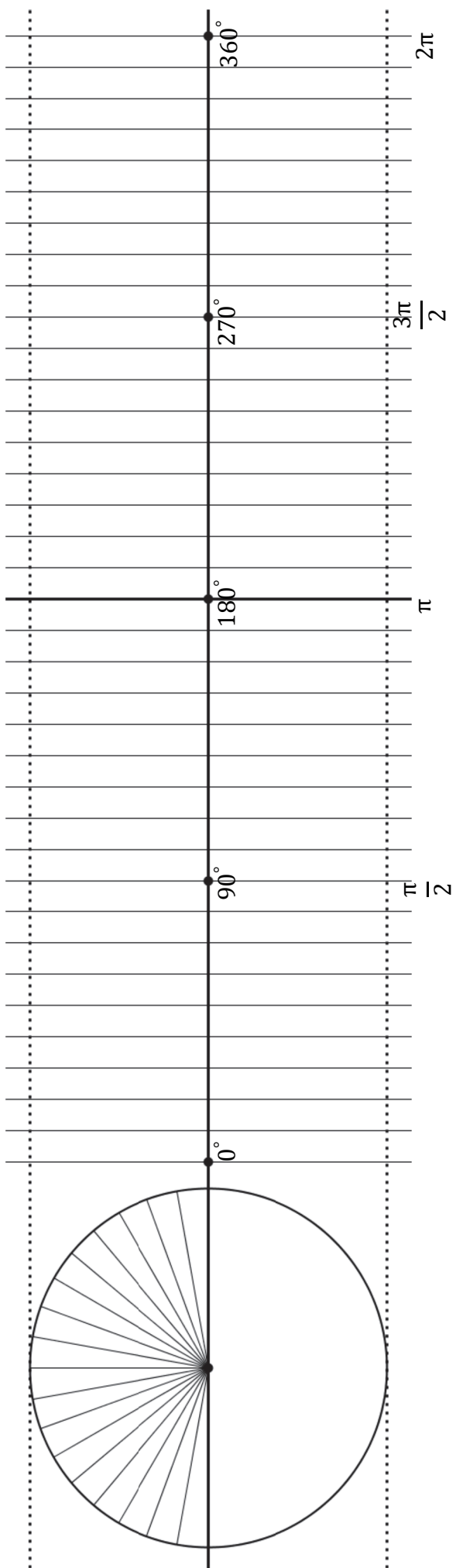
度度量	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
徑度量	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π

12.精緻化！

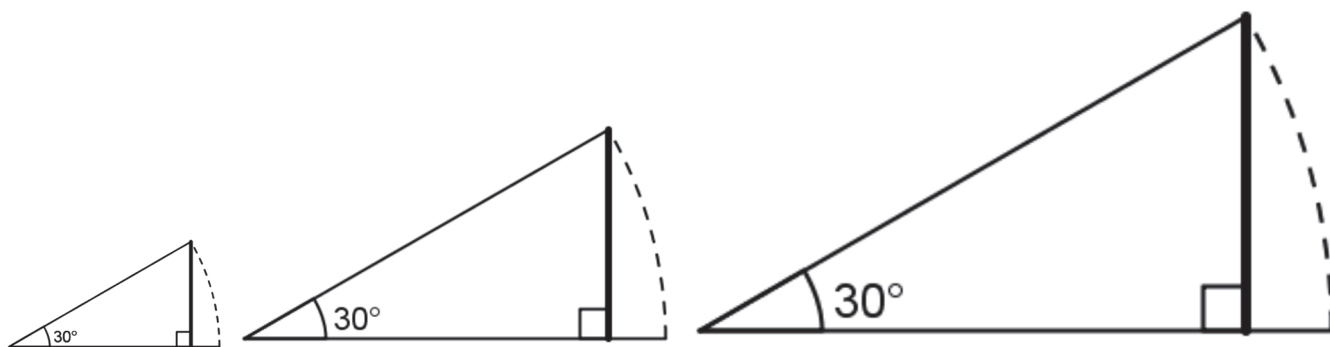
(1)高度變化函數：請複製出角的“高”，將“高”的長度畫在下方對應表格中。



(2)投影變化函數：請複製出角的“投影長”，將“投影長”的長度畫在下方對應表格中。

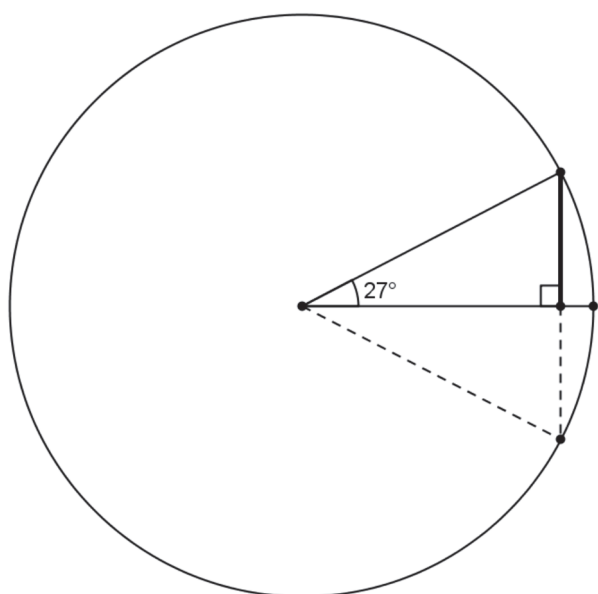


13. 下面都是 30° 度角的“高”，相同大小的角度卻有不同長度的“高”，但是我們又希望可以利用“高”的長度來表示角度的大小，怎麼辦才好？

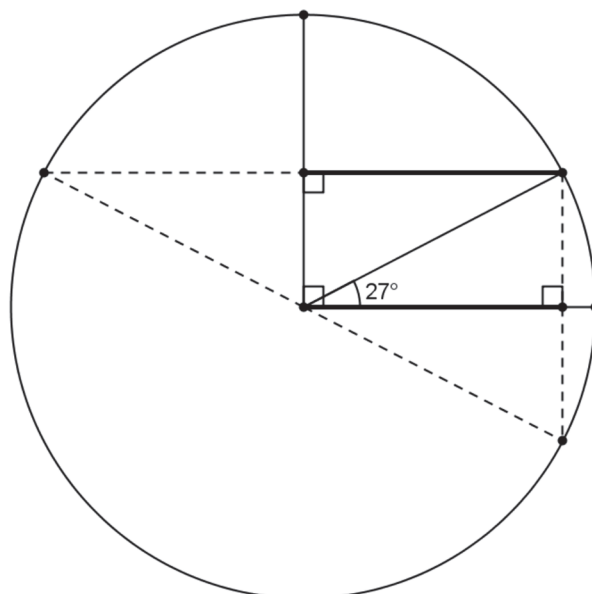


14. 三角函數的命名

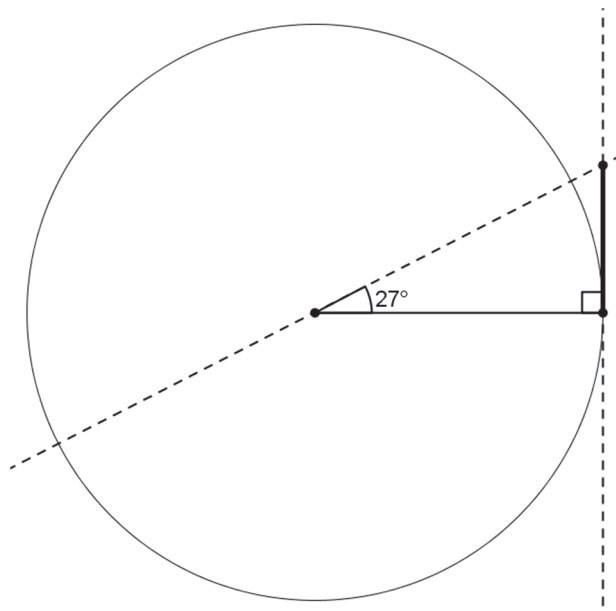
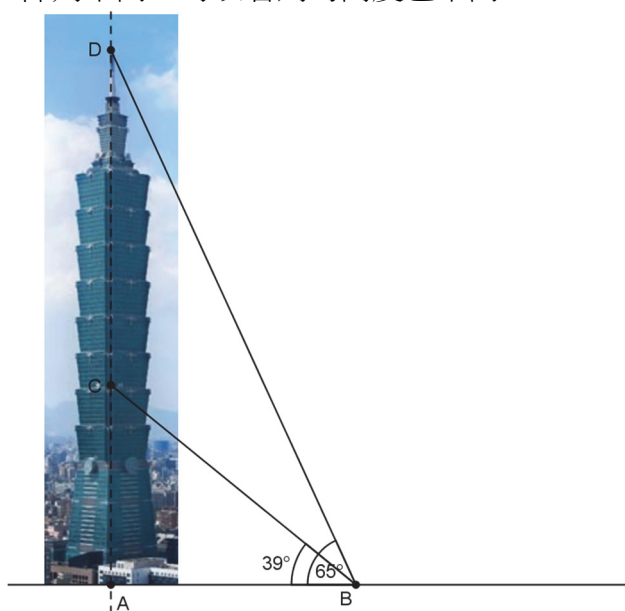
(1) 高度變化函數



(2) 投影變化函數

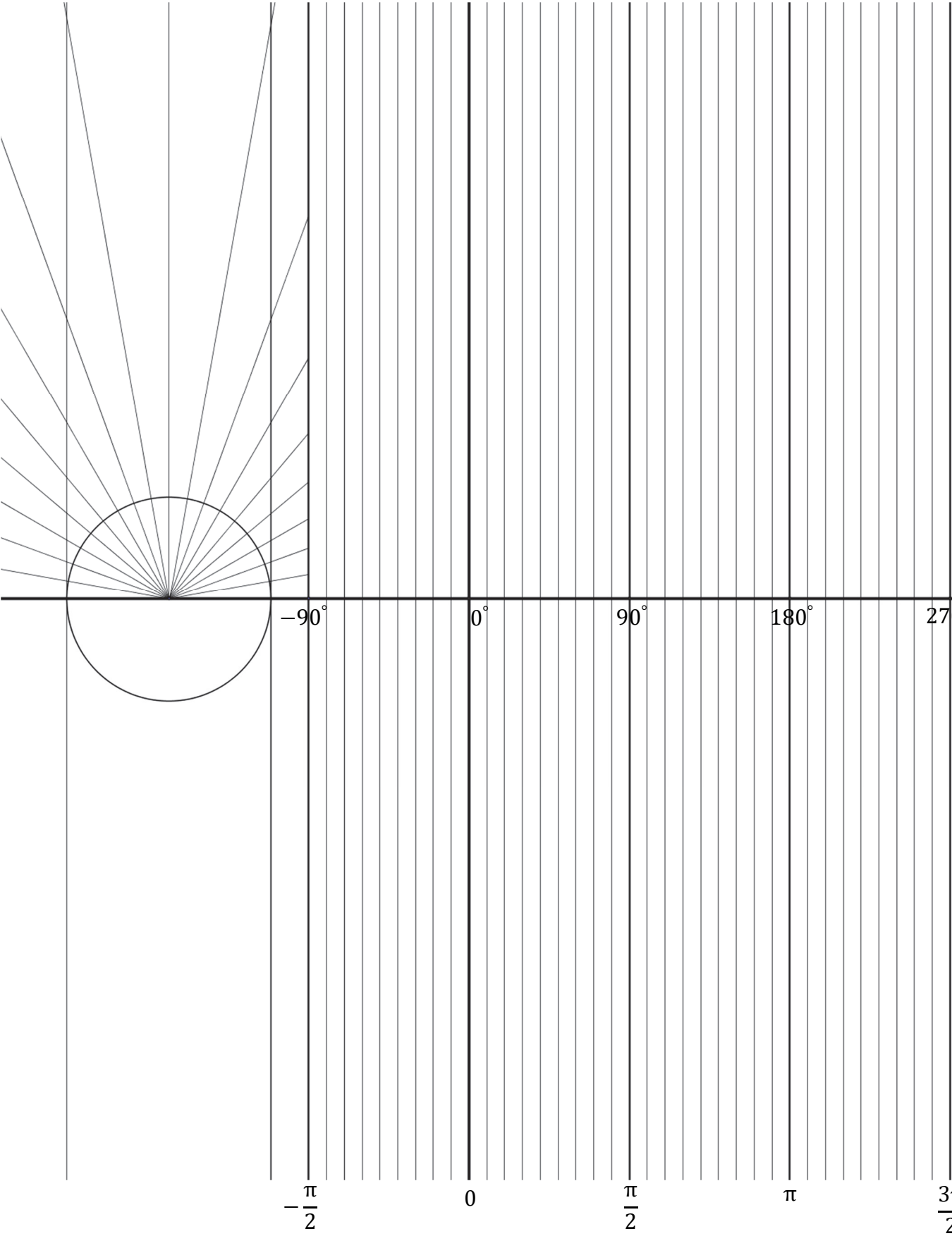


15. 仰角不同，可以看到的高度也不同！

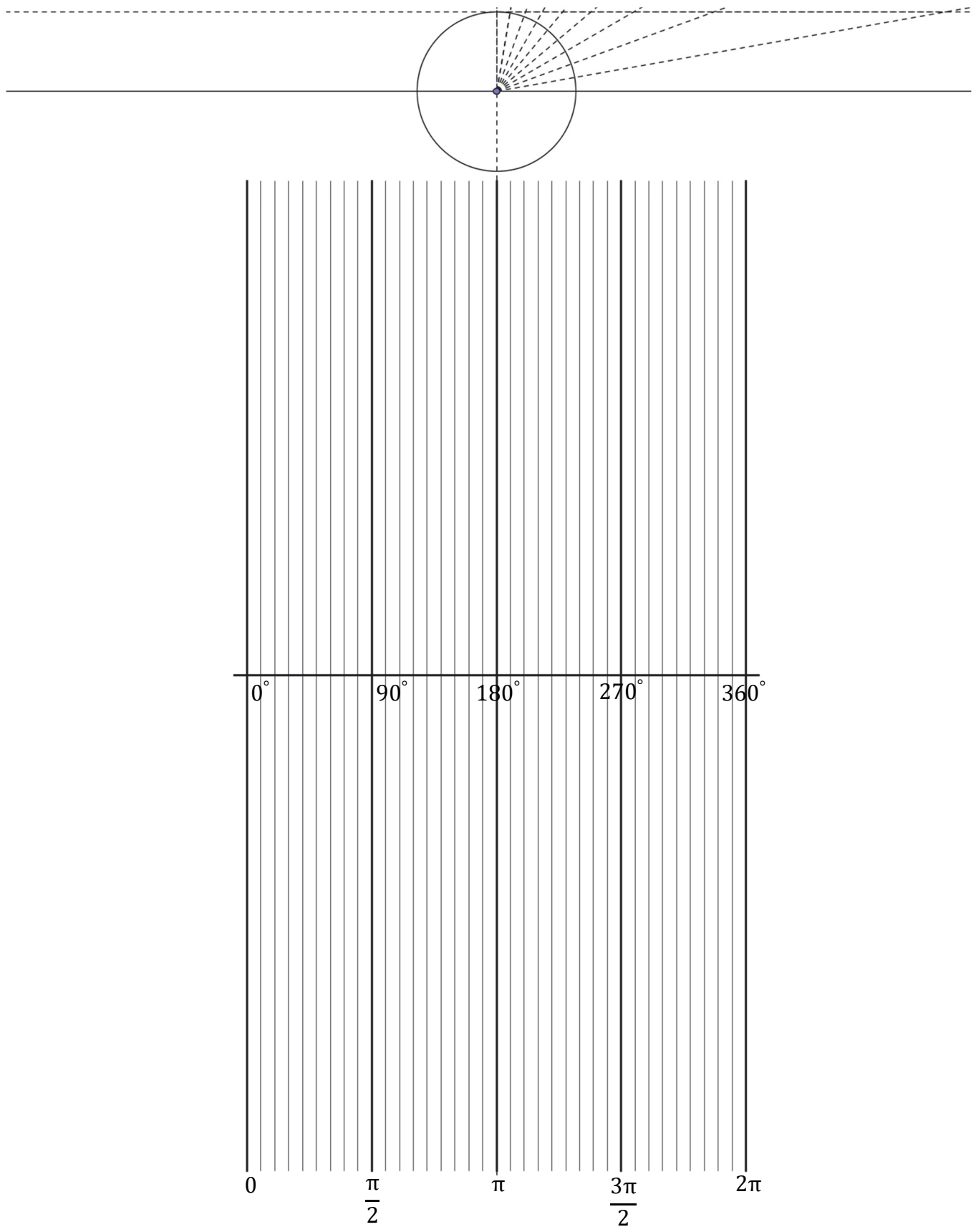


16. 三角函數的命名：(1) 仰角高度變化函數 (2) 仰角的餘角高度變化函數。

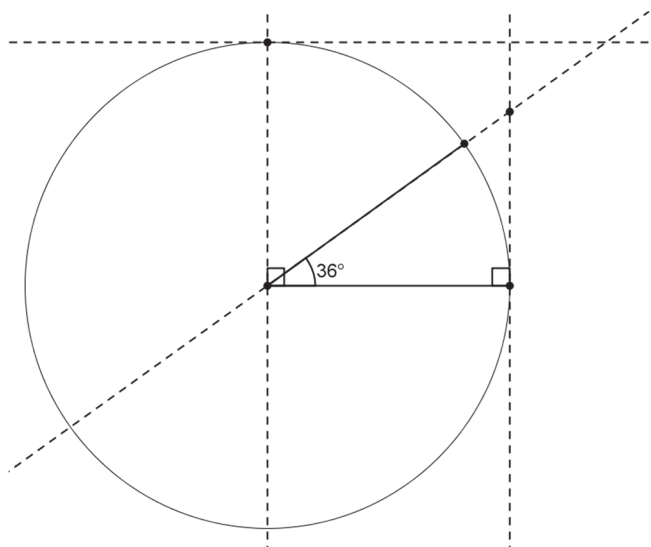
17.精緻化！請複製角所正對到的“切線長”，將“切線長”的長度畫在下方對應表格中。



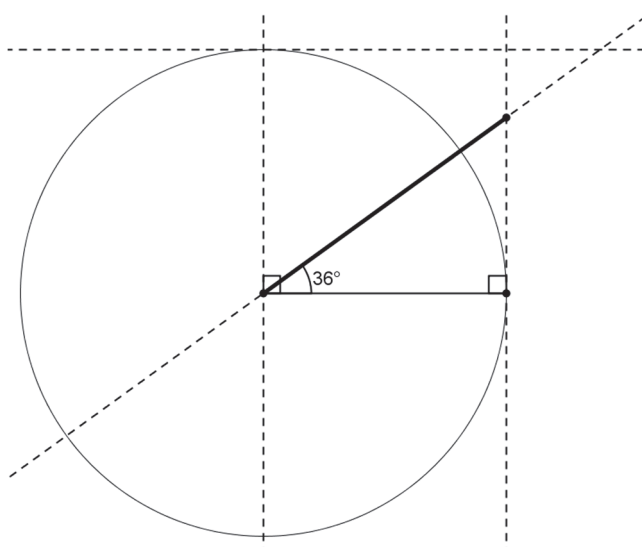
18.精緻化！請複製“餘角”所正對到的“切線長”，將“切線長”的長度畫在下方對應表格中。



19.請在下面單位圓中，畫出這個角和餘角所正對的弦長和切線長，做出正確標記。



20.回顧第 16 題，當仰角改變的時候，什麼也跟著變了？你會怎麼命名呢？

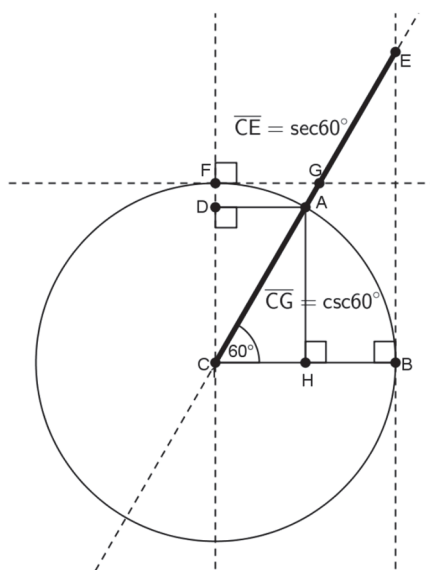
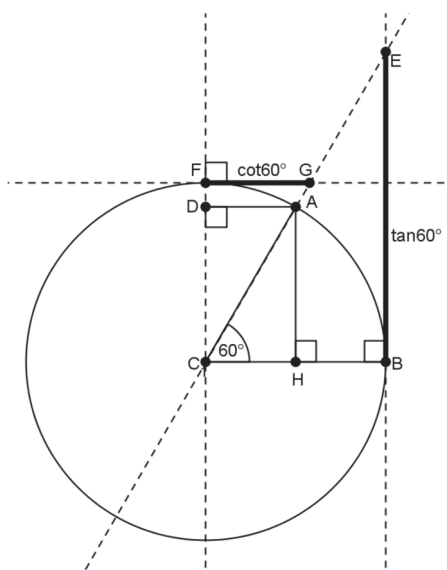
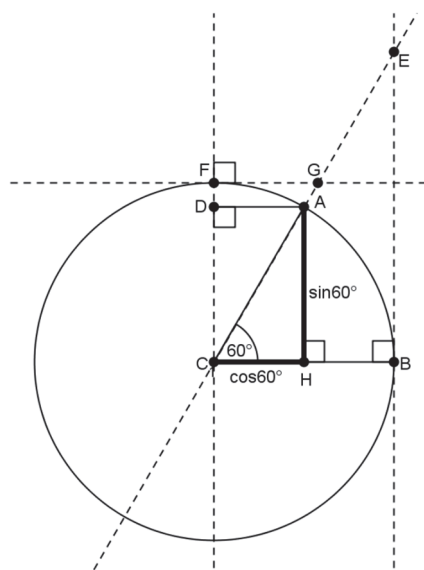


21.三角函數總整理

正弦函數、余弦函數

正切函數、餘切函數

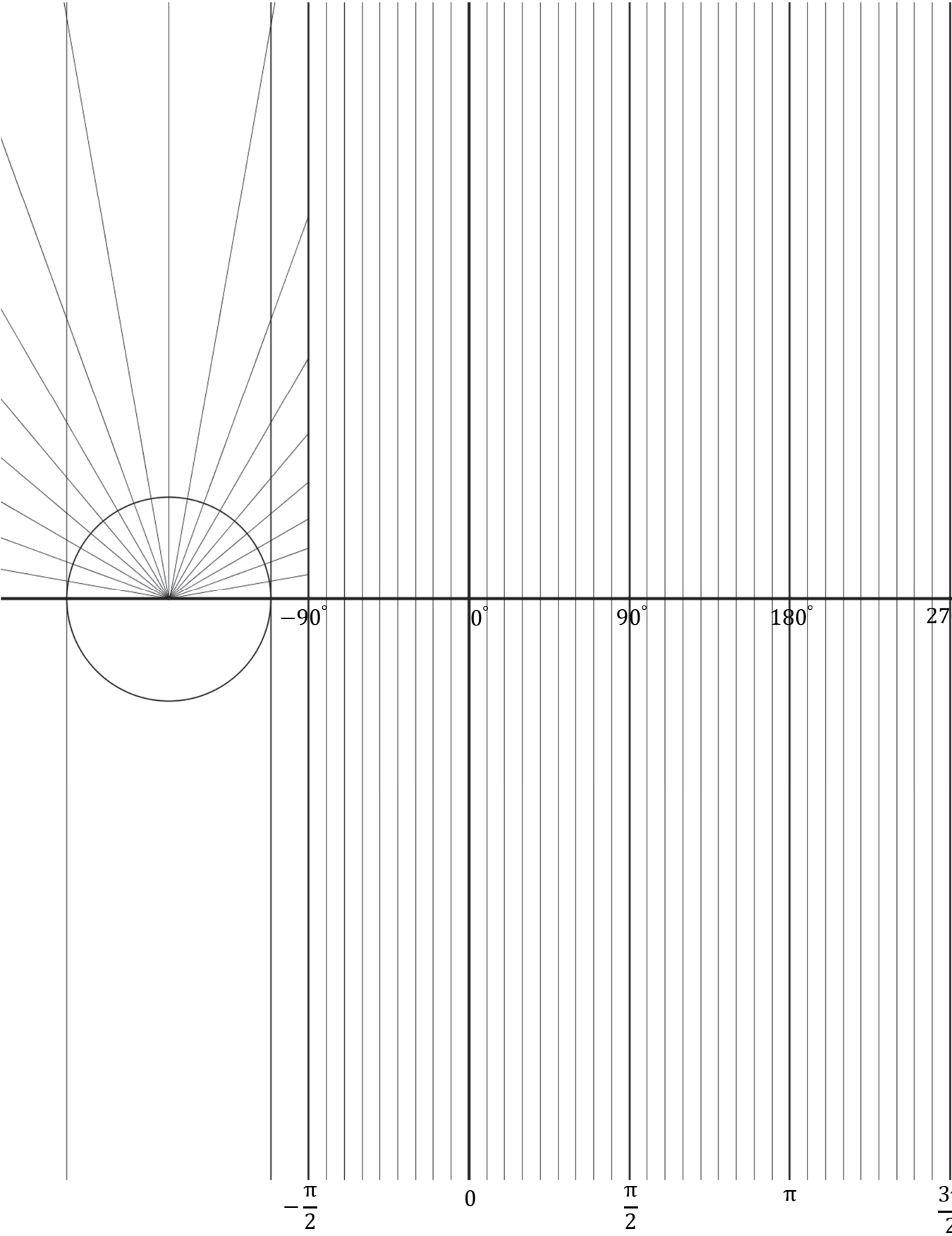
正割函數、余割函數



22.觀看第 21 題的圖形，利用畢氏定理寫出一些三角函數關係式。

23.觀看第 21 題的圖形，利用相似形寫出一些三角函數關係式。

24.精緻化！請複製角正對到的“割線長”，將“割線長”的長度畫在下方對應表格中。

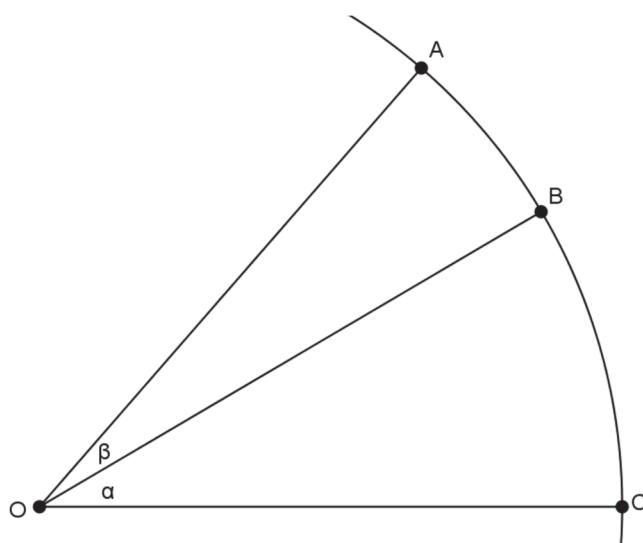
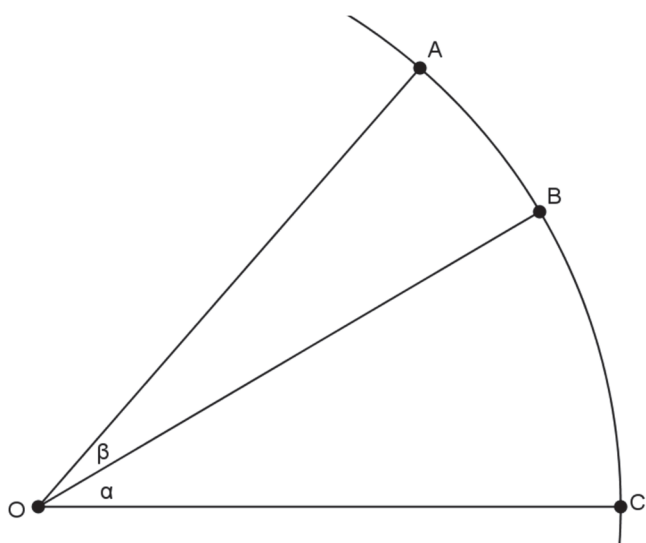
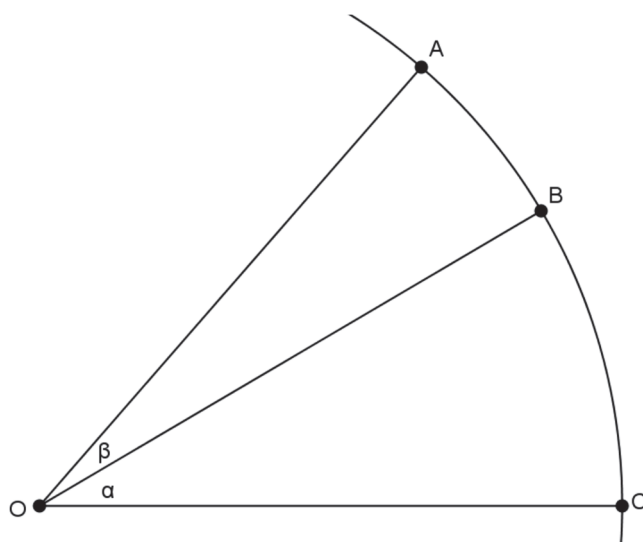
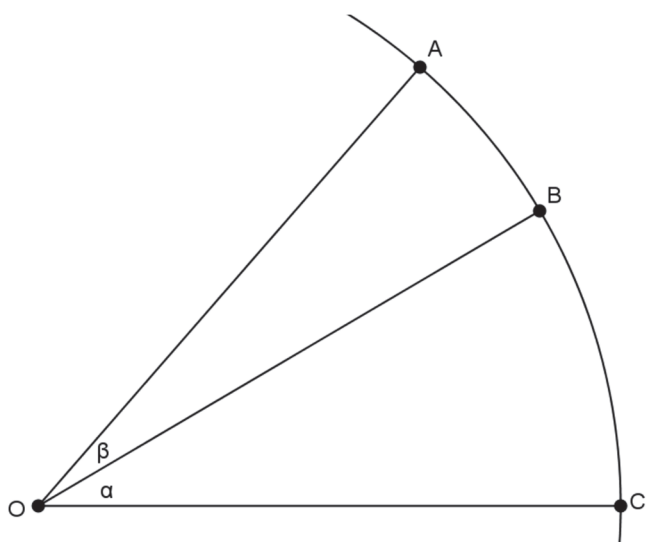


26.和角公式

(1)請畫出 $\sin \beta$ 、 $\sin(\alpha + \beta)$ 、 $\cos(\alpha + \beta)$ 。

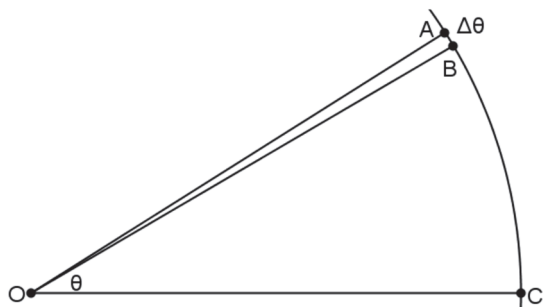
(2)畫畫看！怎麼算出 $\sin(\alpha + \beta)$ ？

(3)畫畫看！怎麼算出 $\cos(\alpha + \beta)$ ？

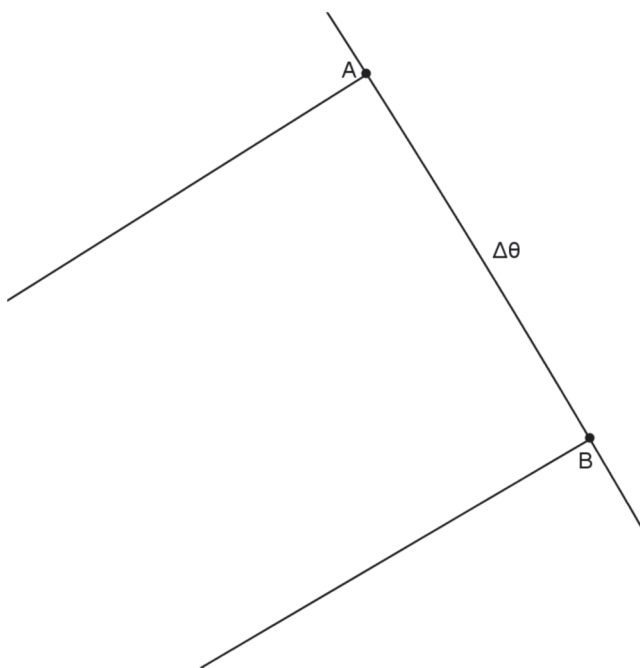


27.微分：正弦函數、餘弦函數

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sin \theta$ 的變化量

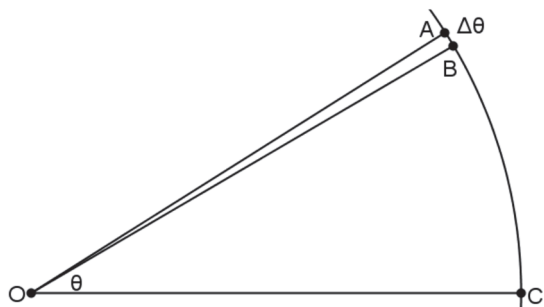


(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sin \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)

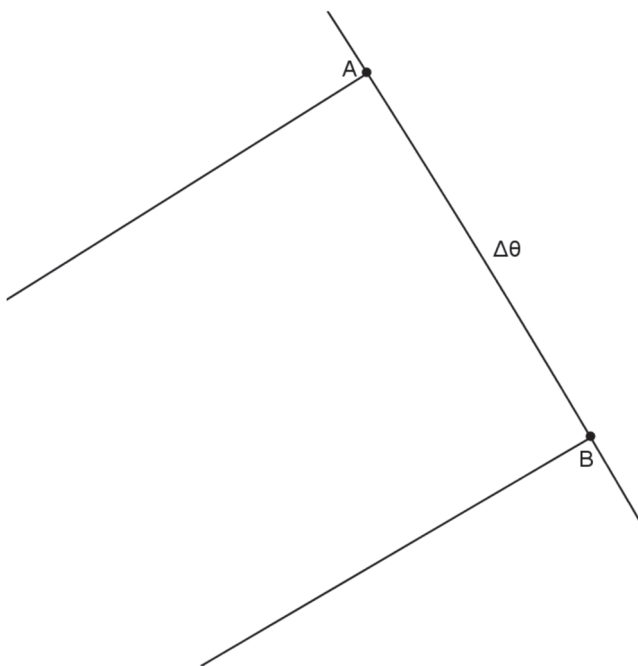


(3)請求出 $\frac{\Delta \sin \theta}{\Delta \theta}$ 的值

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cos \theta$ 的變化量



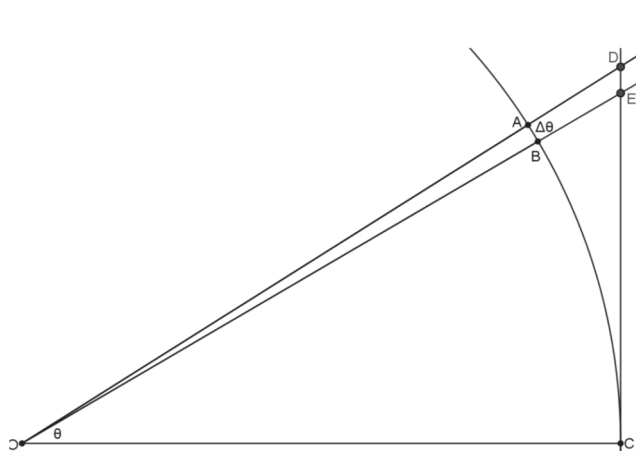
(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cos \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)



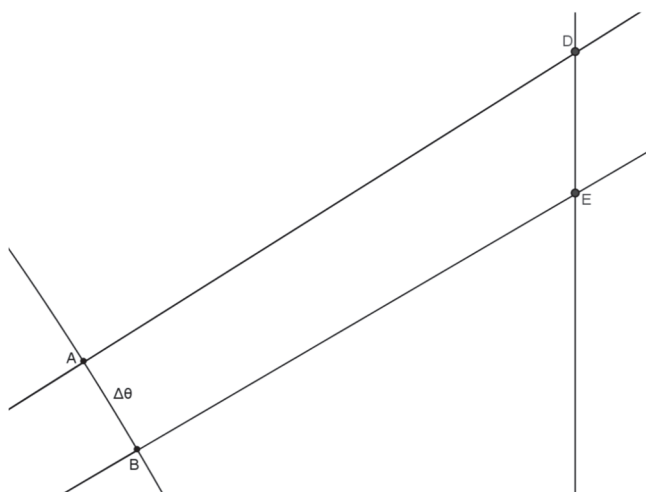
(3)請求出 $\frac{\Delta \cos \theta}{\Delta \theta}$ 的值

28.微分：正切函數、餘切函數

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\tan \theta$ 的變化量

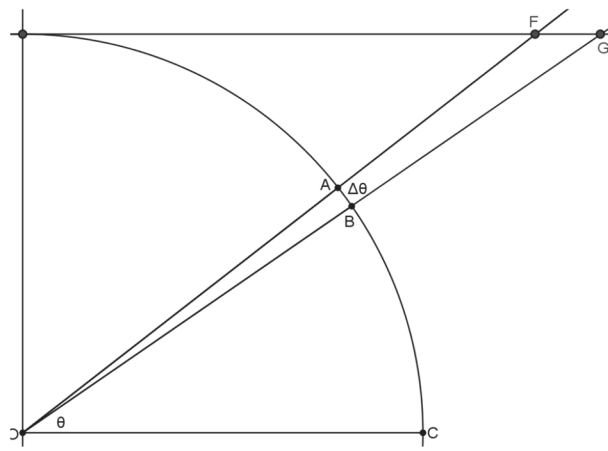


(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\tan \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)

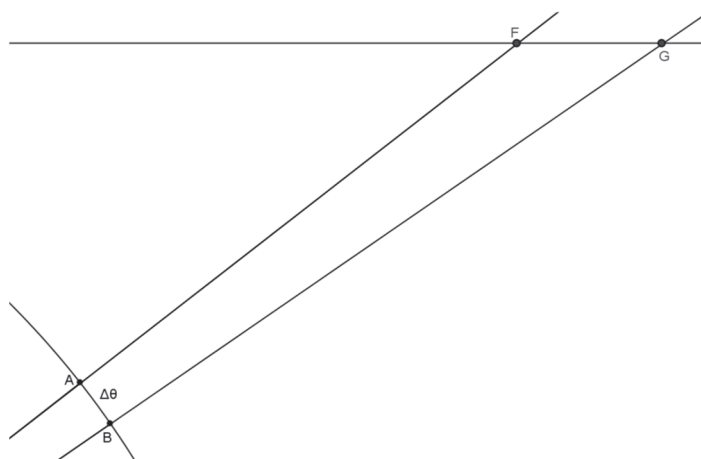


(3)請求出 $\frac{\Delta \tan \theta}{\Delta \theta}$ 的值

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cot \theta$ 的變化量



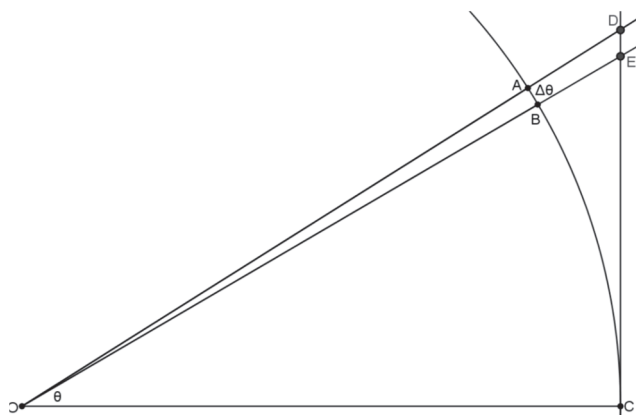
(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\cot \theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)



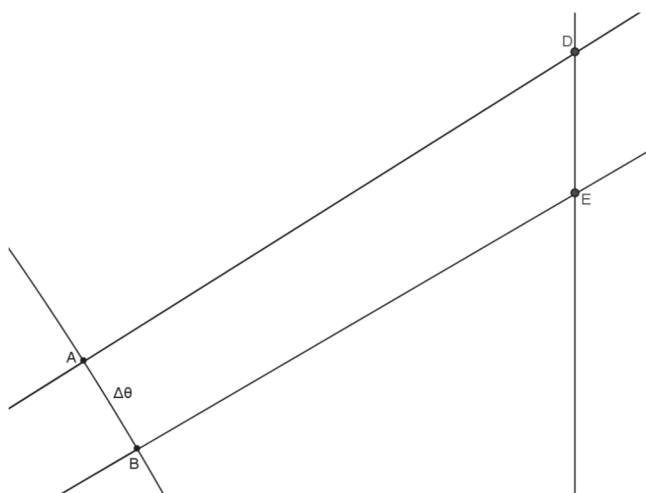
(3)請求出 $\frac{\Delta \cot \theta}{\Delta \theta}$ 的值

29.微分：正割函數、餘割函數

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sec\theta$ 的變化量

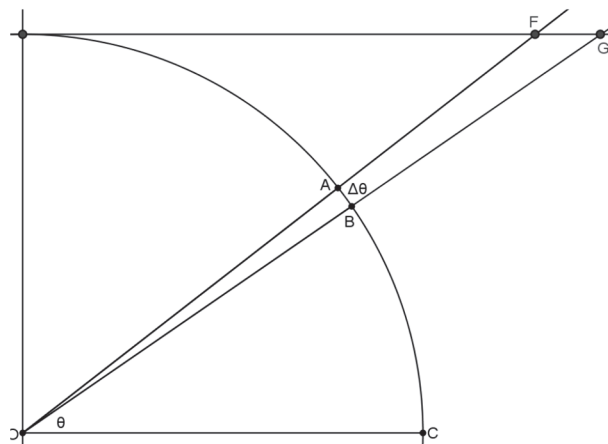


(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\sec\theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)

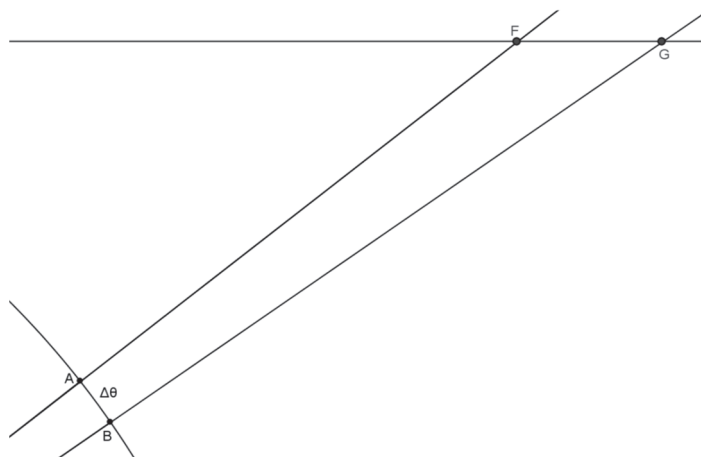


(3)請求出 $\frac{\Delta \sec \theta}{\Delta \theta}$ 的值

(1)想看當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\csc\theta$ 的變化量



(2)請找出當 $\Delta\theta \rightarrow 0$ 時， $\csc\theta$ 的變化量
(下面這個圖是上面圖形的局部放大)



(3)請求出 $\frac{\Delta \csc \theta}{\Delta \theta}$ 的值