

數學科教師共備手冊

國中課程

單元 10

證明與推理



數學新世界

2018 年 10 月 編印

📖教學共備 memo

一、共備模式

(一) 單元共備單

此模式為教師們透過單元共備單之反思、核心概念、概念發展教學脈絡的討論，形成本身的概念發展教學脈絡而實踐於教學。

(二) 觀摩教學知能影片

此模式為備課階段的共備，旨在掌握數學知識的本質內涵與觀摩概念發展教學如何進行，從中重新認識數學概念知識，形成教師本身的教學脈絡。

(三) 學習單實踐教學

此模式為觀課、議課階段的共備，旨在實踐以概念發展為主軸的教學，於過程中再次釐清知識本質內涵，不斷修正與精進教學知能。

二、共備流程

單元共備單	觀摩教學知能影片	學習單實踐教學
共備前	共備前	共備前
單元共備單反思	1.第1次反思單撰寫 2.CA教學或教專研習影片觀摩 3.撰寫觀摩影片記錄	1.撰寫與編修單元學習單 2.確立學習單教學脈絡與設計想法 3.使用學習單教學
共備	共備	共備
1.討論單元共備單 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.討論觀摩影片記錄 2.釐清數學概念知識 3.確立單元教學脈絡	1.分享教學心得感想 2.討論觀課記錄 3.發想概念發展教學設計
共備後	共備後	共備後
1.核心概念細部分析 2.概念發展的教學脈絡細部調整 3.嘗試概念發展的教學	1.第2次反思單撰寫 2.編修單元學習單	1.編修單元學習單 2.再次使用學習單教學

三、共備紀錄表（參考版）

共備單元：_____ 共備日期：_____

本次共備主持人：_____ 共備紀錄：_____

📖 本次共備討論素材：

☐ 單元共備單

☐ 單元概念反思單

☐ 觀摩教學或研習影片（影片名稱：_____）

☐ 生根單元學習單（學習單名稱：_____）

☐ 其他 _____

📖 討論內容：

一、針對「單元共備單」、「單元概念反思單」、「觀摩教學影片紀錄」、「觀摩研習影片」或「生根單元學習單」進行想法交流。

二、本單元概念核心本質與內涵。

三、本單元概念教學脈絡。

四、本單元教學巧思與眉角。

五、本單元學生常見學習迷思解決之道。

六、學習單修改建議與實際教學建議。

七、其他

證明與推理

一、單元名稱：證明與推理

二、反思提問：

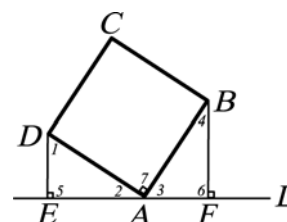
1. 什麼是定義？什麼是定理？什麼是公理？什麼是性質呢？這些名詞之間有何異同之處呢？

在證明平行四邊形對角相等時，我們可以說因為這是平行四邊形，所以對邊會等長，再透過三角形全等得證嗎？

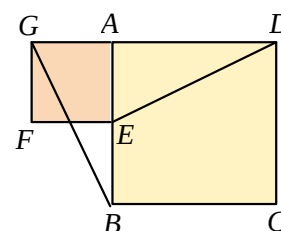
2. 證明與推理被課本設計成一個單元來進行教學，其實，我們教學中不斷地使用著證明與推理，也就是說，證明與推理素養的養成應該就在平常的數學學習中，那，證明與推理素養的核心本質是什麼呢？請您試著舉例說明。

3. 下面的題目，感覺上，老師都已經知道如何證明的情況下來教學生寫證明，怎麼說明可以讓題目有動態的感覺，讓學生先有感覺的猜測，再進入證明呢？

(1) 已知：如圖，已知 $ABCD$ 是正方形， A 在 L 上， $\overline{DE} \perp L$ ， $\overline{BF} \perp L$ ，垂足分別為 E 、 F ($\overline{AE} \neq \overline{AF}$)。
求證： $\triangle ADE \cong \triangle BAF$ 。



(2) 已知：如右圖，四邊形 $ABCD$ 及四邊形 $AEFG$ 皆為正方形。
求證： $\overline{DE} = \overline{BG}$ 。



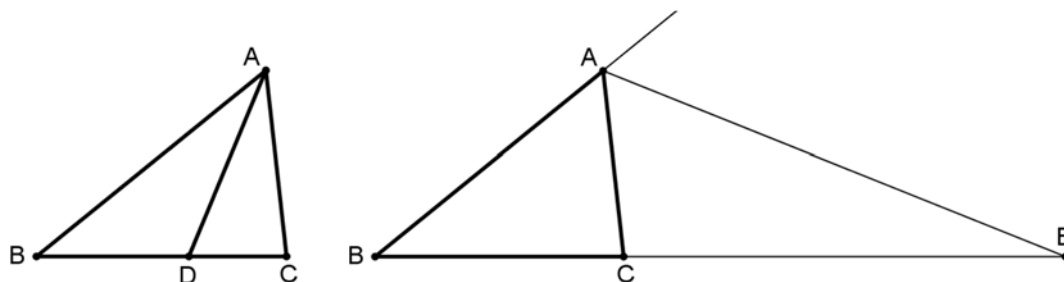
4.幾何證明的核心手段是什麼呢？試試下面幾道題目，你可以找到幾種方法解題？

(1)已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線與 $\overline{BC}$ 交於D點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$

此題是內分比，課本是透過面積關係進行證明，有沒有別的方法呢？

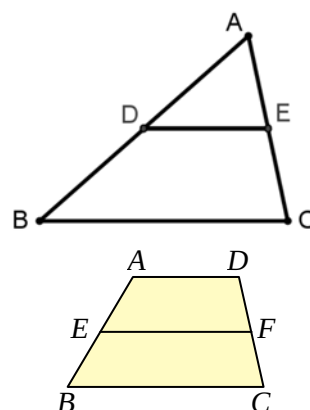
那，外分比 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$ 呢？可以有相同的方法嗎？



(2)已知： $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AB}$ 中點，E 為 $\overline{AC}$ 中點。

求證：(1) $\overline{DE} // \overline{BC}$ ，(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

此題課本是利用平行線截比例線段與其逆敘述的性質來證明，如果撇開課程的順序，我們還可以怎麼證明此題？



(3)已知：如右圖，梯形 ABCD 中， $\overline{AD} // \overline{BC}$ ，E、F

分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點。

求證： $\overline{AD} // \overline{EF} // \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 。

此題和(2)是相同類型的題目，但是課本採用的方法與(2)不同，課本採用切割拼成三角形的型態後完成證明，有沒有可以更直觀可以一以貫之的想法呢？

三、試著撰寫下面名詞的核心概念。

定義

定理

性質

公理

證明

推理

輔助線

四、試著根據概念發展的三個階段草擬下面名詞的概念發展脈絡。

概念	認知	形成	使用
定義			
定理			
性質			
公理			
證明			
推理			
輔助線			

五、觀摩、討論&修改

1.參考影片

※透過 YouTube 查詢數學新世界，再進入 New Horizon of Mathematics

即可透過關鍵字查詢下面影片。

(1)數學新世界--CA--談定義與性質 教師研習 20171114 (嘉義市南興國中)

PART1

(2)數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 九年級推理證明 PART 1

(3)數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 九年級推理證明 PART 2

(4)數學新世界--CA 談數學--20161206 社頭國中 教學共備 推理證明

(5)數學新世界--CA--三角形三心推理證明 教師研習 20171120 (臺中市大德國中)

2.針對單元核心概念、概念發展的教學脈絡進行細部分析或調整。

3.找出屬於自己最自在的概念發展的教學脈絡。

六、學習單：完整版請參考數學新世界國中九年級教材

證明與推理

1.放學回家後，曉華和媽媽的對話。

曉華：媽媽！媽媽！我這次數學考很好喔！

媽媽：考幾分？

曉華：70 分！

媽媽：70 分而已？！

你覺得曉華和媽媽誰比較有道理？

第 1、2 題參考來源：鄭惠珊、吳淑娟

2.晚餐後，小民和媽媽的對話。

媽媽：你今天在學校乖嗎？

小民：有啊！我很乖！

媽媽：可是你在家都不聽話，在學校會乖？

(1)媽媽可以用小民在家裡的表現來檢查小民在學校乖不乖嗎？

(2)小民怎麼說服媽媽他在學校有乖呢？

(3)媽媽該怎麼反駁小民，才可以說小民在學校不乖呢？

3.找出下面每個小題錯誤的理由並作正確修正

(1)多項式 $\frac{4x+3}{2}$ 可被化簡為 $2x+3$ 。

(2)方程式 $3x+1=6$ 經過等量公理，等號兩邊同除以 2 的運算可以化簡為 $x+1=2$ 。

(3)因為 $3x-1>6$ 可以得到 $3x>6$ ，因此，不等式 $3x-1>6$ 和 $3x>6$ 的會有相同的解。

(4) 2×10^{-3} 這個數字是負數。

(5)三個邊長是 5、6、8 的三角形是銳角三角形。

(6) $(2x+3)^2 = 4x^2 + 9$

(7) $4x^2 - 9 = (2x-3)(2x-3)$

(8) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

4. 試著說說看

(1) 已知 $a > b$ ，所以 $a^2 > b^2$ 嗎？

(2) 已知 x 這個數字是個正整數，那麼 $4x+3$ 這個數字會是 2 的倍數嗎？

(3) 已知 x 這個數字是個偶數，那麼 $(3x+2)^2$ 這個數字會是個奇數還是偶數呢？

(4) 若 a 是正整數，且 a 除以 3 餘 2，則 a 會是偶數還是奇數呢？

5. 證明題 part1

(1) 已知：直角三角形的三邊長為 7、 b 、 c (b 、 c 為正整數)，其中 c 為斜邊長。

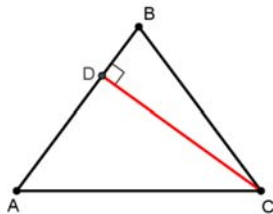
求證： $(c+b)$ 是 49 的因數。

(2) 已知： a 、 b 均為奇數。

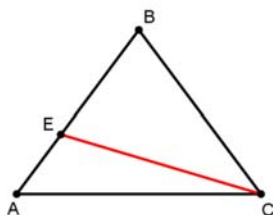
求證： ab 為奇數。

6. 畫出全等和相似

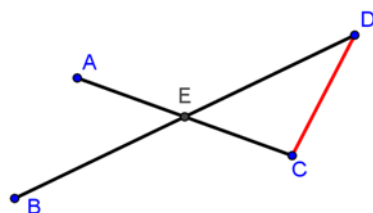
(1) 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ 、 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ，請試著利用三角形全等性質畫出會和 $\overline{CD}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



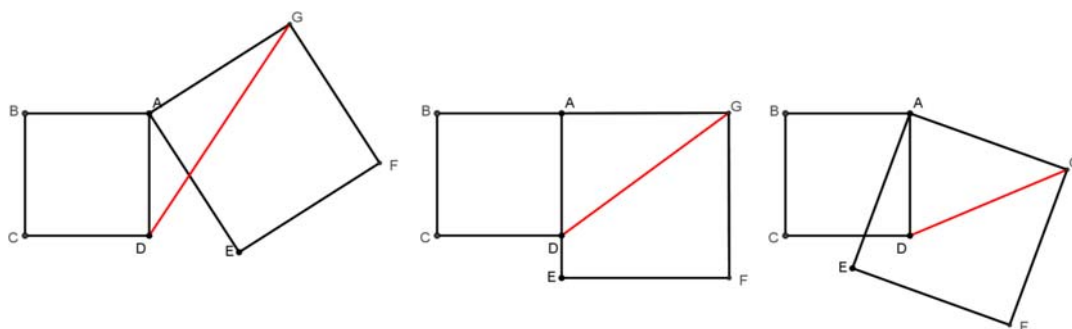
(2) 如圖， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，請試著利用三角形全等性質畫出會和 $\overline{CE}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



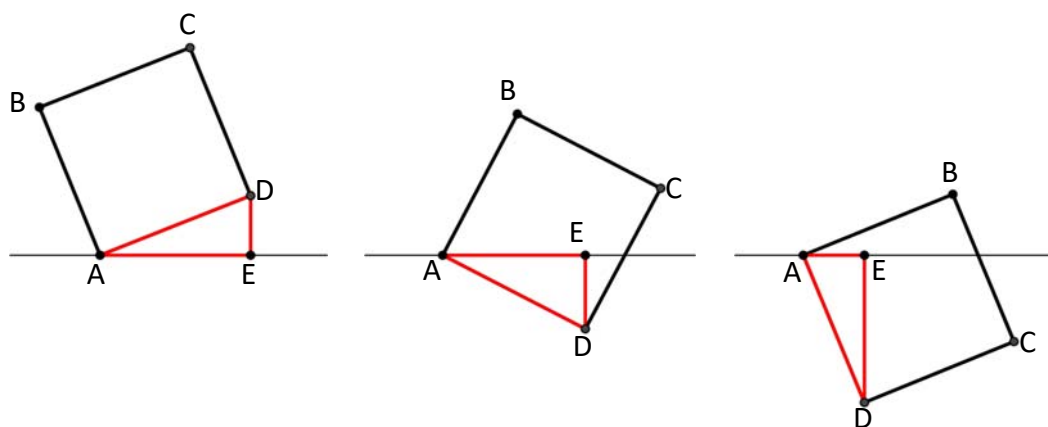
- (3) 如圖， $\overline{AE} = \overline{CE}$ 、 $\overline{BE} = \overline{DE}$ ，請試著利用三角形全等性質畫出會和 $\overline{CD}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



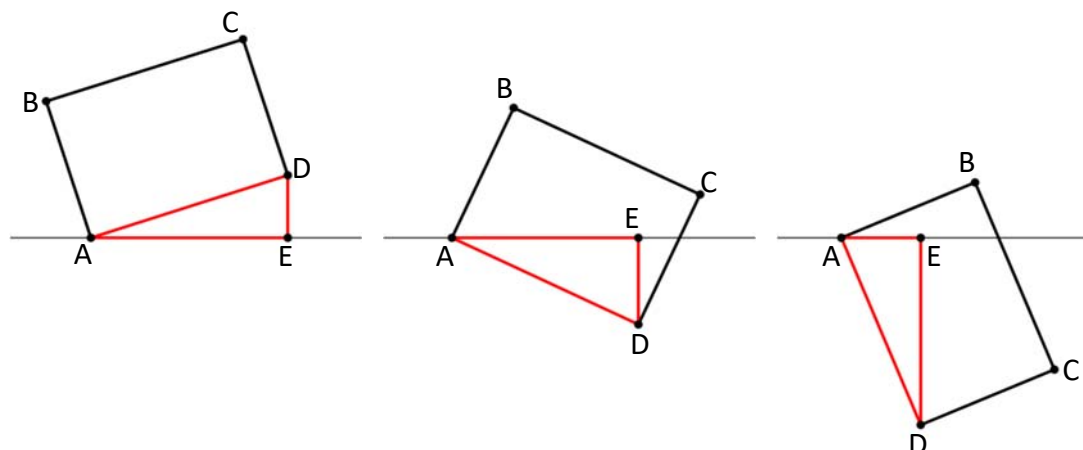
- (4) 如圖，四邊形 ABCD 及四邊形 AEFG 皆為正方形，請試著利用三角形全等性質畫出會和 $\overline{DG}$ 一樣長的線段，並說明相等的理由。



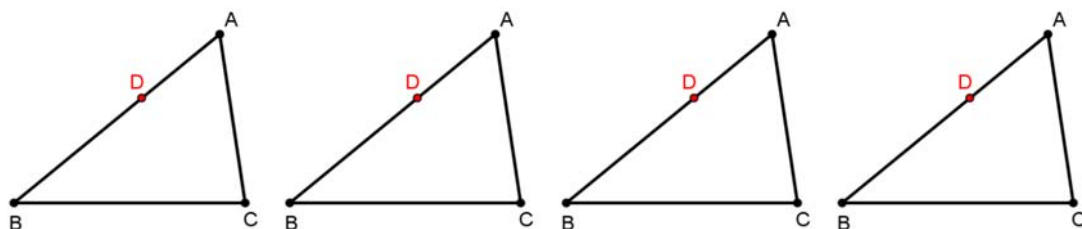
- (5) 如圖，四邊形 ABCD 為正方形，請試著利用三角形全等性質畫出會和 $\triangle ADE$ 全等的三角形，並說明全等的理由。



- (6) 如圖，四邊形 ABCD 為長方形，請試著利用三角形相似性質畫出會和 $\triangle ADE$ 相似的三角形，並說明相似的理由。



(6)如圖，請試著通過 D 點，利用三角形 AA 相似性質，畫出會和 $\triangle ABC$ 相似的三角形，總共有 4 種畫法喔，試著全部找出來！

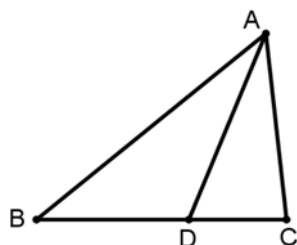


7.證明題 part2

(1)已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的角平分線與 $\overline{BC}$ 交於 D 點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{DB} : \overline{DC}$

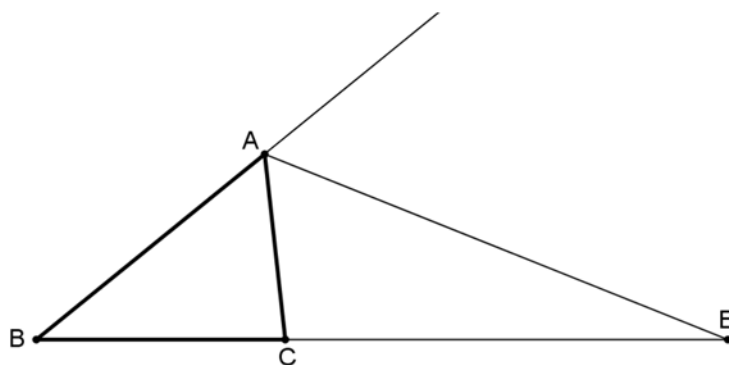
提示：請利用平行線創造出相似三角形。



(2)已知： $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的外角平分線與 $\overline{BC}$ 的延長線交於 E 點。

求證： $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{EB} : \overline{EC}$

提示：請利用平行線創造出相似三角形。

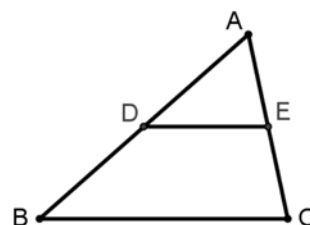


(3)已知： $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AB}$ 中點，E 為 $\overline{AC}$ 中點。

求證：(1) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，(2) $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$

提示：(1)一樣高就會是平行線

(2)利用相似三角形

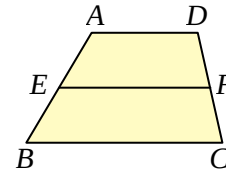


(4)已知：如右圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， E 、 F 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點。

求證： $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC})$ 。

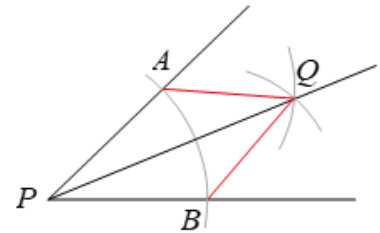
提示：(1)一樣高就會是平行線

(2)利用相似三角形



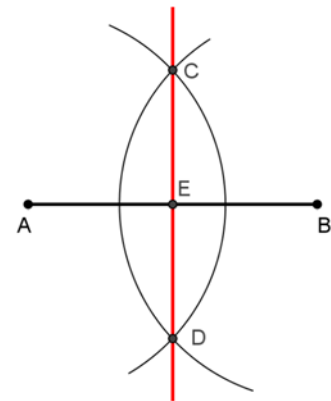
(5)右圖使用尺規作圖畫 $\angle APB$ 的角平分線 $\overrightarrow{PQ}$ ，請證明這樣的作圖可以讓 $\angle APQ = \angle BPQ$ 。

提示：利用全等三角形



(6)右圖使用尺規作圖畫 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 $\overleftrightarrow{CD}$ ，請證明這樣的作圖可以讓 $\overline{AE} = \overline{BE}$ 且 $\overleftrightarrow{CD} \perp \overline{AB}$ 。

提示：利用全等三角形



重行樸實數學路 發現數學新世界



數學新世界網站

<http://tw.newhorizonofmathematics.com>